

Deutsche
Geophysikalische
Gesellschaft e.V.



Protokoll
über das Kolloquium
Elektromagnetische Tiefenforschung

21. Kolloquium, Haus Wohldenbergl, Holle, 3.-7.10.2005

ISSN 0946-7467

herausgegeben von

Oliver Ritter
GeoForschungsZentrum
Telegrafenberg
14473 Potsdam

Heinrich Brasse
Freie Universität Berlin
Fachrichtung Geophysik
Malteserstr. 74-100
12249 Berlin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	I
Inhaltsverzeichnis	II
Teilnehmerverzeichnis	III
Haak, V	1
Geschichte(n) zum EMTF-Kolloquium	
Schmucker, U.	59
1D interpretation of electromagnetic response estimates with the Psi-algorithm	
Stadelmann, J. & P. Weidelt.....	91
Electromagnetic time constants of the Earth's mantle	
Varentsov, Iv. M. and EMTESZ-Pomerania WG.....	111
Method of horizontal magnetovariational sounding: techniques and application in the EMTESZ-Pomerania project	
Sokolova, E. Yu., Iv. M. Varentsov & EMTESZ-Pomerania WG.....	124
RRMC Technique Fights Highly Coherent EM Noise	
Hübert, J. & O. Ritter.....	137
Kanonische Kohärenzen - Indikator für kohärenten Noise	
Jung, A. & U. Weckmann.....	141
Einfluss von rotierten Feldern auf das Processing von MT-Zeitreihen	
Červ, V., Pek J. & M. Menvielle.....	146
Bayesian Monte Carlo for MT Tensor Decomposition	
Worzewski, T., V. Haak & H. Brasse.....	156
Untersuchung der Dimensionalität magnetotellurischer Daten mit Mohrkreisen und Rotationsinvarianten	
Baranwal, V.C., A. Franke, R.-U. Börner, K. Spitzer, S.P. Sharma.....	164
2D inversion for plane wave EM methods using an adaptive unstructured grid finite element approach: formulation, calculation of sensitivities and first results	
Franke, A., R.-U. Börner & K. Spitzer.	173
2D Finite Element modelling of plane-wave diffusive time-harmonic electromagnetic fields using adaptive unstructured grids	
Schwarzbach, C.....	183
3-D Finite Elemente zur Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen	

Börner, Ralph-Uwe.....	191
3D-TEM-Simulation für axialsymmetrische Leitfähigkeitsstrukturen mit der Finite- Elemente-Methode	
Hölz, S., T. Hiller & H. Burkhardt.....	197
Effects of Dipping Layers on TEM 1D-Inversion	
Martin, R., C. Scholl, S. L. Helwig, O. Koch & B. Tezkan.	207
3D Inversion transienteletromagnetischer Daten	
Hanstein, T., J. Lange & S. L. Helwig.	216
Simulation unterschiedlicher Metallobjekte zur Detektion von Landminen mit Metalldetektoren	
Lange, J., T. Hanstein & S. L. Helwig	227
Numerische Simulation von Metalldetektordaten in 2D und 3D	
Lange, J., T. Hanstein & S. L. Helwig.	233
Inversion von Metalldetektordaten im Zeit- und Frequenzbereich	
Müller, M., M. Hertrich & U. Yaramanci.....	243
Resolution and depth of investigation studies of Magnetic Resonance Sounding (MRS) using SVD	
Radić, T.....	249
Zeitreihenauswertung von NMR Messungen im Erdmagnetfeld	
Günther, T. & C. Rücker.....	258
Applications of the Triple-grid Technique to the Inversion of DC Resistivity Data	
Schmucker, U.....	266
Ein Kontinent erwacht – Induktionsanomalien langperiodischer erdmagnetischer Variationen in Europa	
Weckmann, U.....	276
Phase Splitting: Evidence for mantle anisotropy?	
Brasse, H., Y. Li, G. Kapinos, D. Eydam, & L. Mütschard.	281
Uniform Deflection of Induction Vectors at the South Chilean Continental Margin: A Hint at Electrical Anisotropy in the Crust	
Kreutzmann, A., A. Neska, H. Brasse, & EMTESZ Working Group.....	288
The EMTESZ project: Induction vectors, strikes and 2-D modeling	
Becken, M., O. Ritter, U. Weckmann, W. Wilhelms, J. Hübert, T. Branch, P. Bedrosian, S. Park & M. Weber.	292
Imaging the deep roots of the San Andreas Fault Zone at Parkfield, CA, with magnetotelluric measurements	
Wilhelms, W., M. Becken, U. Weckmann & O. Ritter.....	298
Processing and analysis of MT array data from the San Andreas Fault around Parkfield, California	

Weckmann, U., T. Branch & O. Ritter.	302
Comparing magnetic and magnetotelluric data for the Beattie Magnetic Anomaly, South Africa	
Kapinos, G. & H. Brasse.	307
An Amphibious Magnetotelluric Experiment at the South Chilean Continental Margin	
Steuer, A. & B. Siemon.	315
Untersuchungen der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne mit TEM, HEM und SkyTEM	
Schünemann, J. & A. Steuer.	325
Geoelektrische Tiefensondierungen über der Cuxhavener Rinne	
Neumann, J., R. Bergers, S. L. Helwig, T. Hanstein, N. Kozhevnikov & B. Tezkan.	331
Messung der TEM-Antwort von Bodenproben	
Stadtler, Ch., A. Margane, F. Schildknecht, U. Schäffer & J. Wrabel.	339
Investigation of the Groundwater Resources in the Eiseb Graben in Namibia with TEM Soundings	
Schwalenberg, K., C. Scholl, R. Mir, R. N. Edwards & E. C. Willoughby.	350
Gas Hydrate assessment using a marine bottom-towed controlled source electromagnetic system: latest results from Cascadia	
Löhken, I., R. Bergers & B. Tezkan.	360
Monitoring der Bodenfeuchte mit Georadar und FDR	
Bosch, F. P.	365
Applicability of RMT, VES and Dual Loop EM for the mapping of a Quaternary buried valley in the area "Heiliges Feld" (NRW, Germany)	
Stoll, J. B.	373
Stoneley wave induced electrokinetic potentials in large sandstone blocks	
Pulz, E. & O. Ritter.	385
Umbau von MAGSON-Magnetometern und Kalibrierung mittels Rotation des Sensors im Erdfeld	
Panzner, M., F. Sohl & K. Spitzer.	392
Numerische Simulation einer Permittivitätssonde zur Messung der elektrischen Eigenschaften planetarer Regolithe	
Schaumann, G., G. Reitmayr, H. Schmidt, B. Siemon, B. Röttger & H.-J. Rehli.	401
Geophysikalische Erkundung des Kohlefeuergebietes von Wuda, China, mit Magnetik und Elektromagnetik	
Rodemann, H., Brost, E., Schünemann, J., Noell, U., Siemon, B., Sauer, A.	409
Gleichstromgeoelektrische Untersuchungen eines mit aerelektromagnetischen Messungen kartierten Süßwasservorkommens im Sahlenburger Watt unter Berücksichtigung von Äquivalenzfällen	

Vorwort

Das Kolloquium *Elektromagnetische Tiefenforschung* fand vom 3.-7.10.2005 im Haus Wohldenbergl, einer Jugendbildungsstätte der Diözese Hildesheim in Holle, statt. Organisiert wurde das Treffen gemeinsam von Michael Grinat und Bernhard Siemon vom Institut für Geowissenschaftliche Gemeinschaftsaufgaben und der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe des Geozentrums Hannover. Mit über 80 Teilnehmern aus 25 nationalen und internationalen Forschungseinrichtungen gab es wiederum ein reges Interesse an dem nunmehr 21. Kolloquium *Elektromagnetische Tiefenforschung*. Der AK *Elektromagnetische Tiefenforschung* ist damit nach wie vor der größte Arbeitskreis der DGG.

Überschattet wurde unser Treffen vom viel zu frühen Tod Hartmut Jödicke, einem der Wegbereiter der Magnetotellurik in Deutschland (siehe hierzu auch den Nachruf von Jürgen Untiedt in den Mitteilungen der DGG, Nr. 3/2005). Al Duba vom American Museum of Natural History, New York City, erinnerte in seinem Beitrag: „Carbon in the Crust, a Retrospective in Memory of Hartmut Jödicke“, an das weitreichende, wissenschaftliche Werk Hartmut Jödicke aber auch an seine besonderen menschlichen Qualitäten. Hartmuts Wärme, verbunden mit seiner Freude und Leidenschaft an der Geophysik waren ungemein ansteckend und haben den freundschaftlichen und familiären Charakter der Kolloquien entscheidend geprägt.

Ein besonderer Höhepunkt des Kolloquiums war Volker Haaks Beitrag: „Geschichte(n) zum EMTF-Kolloquium“. Wir wurden daran erinnert, dass das Kolloquium, wie es das lateinische Wort sagt, vor allem ein Gespräch untereinander sein solle. „Hier habe man noch die Freiheit, individuell und mutig Unsinn zu sagen. Das solle man ernst nehmen!“ Interessanterweise wurde vor dem Gebrauch des 3. Kolloquiumsbandes (Gossler, 1965) ausdrücklich gewarnt: „Achtung! – Die folgenden Vortragzusammenfassungen, Berichte usw. dienen nur der Information eines begrenzten Kreises von Interessierten; sie gelten nicht als Veröffentlichungen. Zitate daraus können nur mit schriftlicher Zustimmung der Autoren zugelassen werden“.

Auf jeden Fall ist es auch dieses Mal ein sehr vielseitiger Kolloquiumsband geworden, unter anderem mit Arbeiten über vielerlei methodische Ansätze, numerische Verfahren, regionale Studien, oberflächennahe Anwendungen und die Gerätetechnik. Im Bereich der oberflächennahen Anwendungen gab es eine ganze Reihe von Beiträgen, die sich mit Verfahren zum sicheren Auffinden von Landminen beschäftigten. Ein Thema, das sicherlich jeden nachdenklich stimmt, und bei dem die Diskussion über die Verlässlichkeit und Aussagekraft von geophysikalischen Modellen plötzlich eine ganz andere Tragweite bekommt.

Für Diskussionen während des Kolloquiums sorgte die Frage, ob sich eine zu große Anzahl von Beiträgen auf Englisch möglicherweise nachteilig auf den Charakter der Kolloquien auswirken könnte, die ja vor allem dem Gespräch untereinander dienen sollen. Die Frage wird uns wahrscheinlich noch weiter beschäftigen, jedoch scheinen die meisten Teilnehmer das eher pragmatisch zu sehen. Beiträge und Diskussionen sollten auf jeden Fall auf Deutsch möglich sein, allerdings fällt es mittlerweile vielen leicht, sich auch auf Englisch zu unterhalten. Der aktuelle Kolloquiumsband enthält 41 Beiträge, wovon 20 auf Deutsch und 21 in Englisch verfasst sind.

Nachdem sich Andreas Hördt und Johannes Stoll nach sechsjähriger, erfolgreicher Arbeit nicht mehr als Sprecher des Arbeitskreises elektromagnetische Tiefenforschung zur Verfügung stellten, wurde Oliver Ritter (GFZ Potsdam) zum neuen Sprecher gewählt.

Unser aller, ganz herzlicher Dank gebührt Henri Brasse von der FU Berlin für die redaktionelle Arbeit am Kolloquiumsband und Dirk Brändlein für die technische Umsetzung. Stefan Helwig von der Universität zu Köln danken wir für die Weitergabe seiner Erfahrungen mit dem Erstellen des Kolloquiumsbandes in digitaler Form.

Oliver Ritter

III

Teilnehmerverzeichnis

Baranwal Vikas Chand	TU Freiberg
Becken Michael	GFZ Potsdam
Bergers Rainer	Universität zu Köln
Börner Ralph-Uwe	TU Bergakademie Freiberg
Bosch Frank	Universität Münster
Branch Thomas	GFZ Potsdam
Brasse Heinrich	FU Berlin
Brunke Heinz-Peter	GEOnumerix Wendeburg
Duba Al	American Museum of Natural History, New York City, USA
Duba Lucy	American Museum of Natural History, New York City, USA
Eydam Diane	FU Berlin
Franke Antje	TU Bergakademie Freiberg
Golden Steven	Universität Frankfurt
Grinat Michael	GGA-Institut
Günther Thomas	GGA-Institut
Gurk Marcus	
Haak Volker	Blankenfelde
Hanekop Ole	Universität Göttingen
Hanstein Tilman	Universität zu Köln
Heise Wiebke	Institute of Geological and Nuclear Sciences, Lower Hutt, New Zealand
Helwig Stefan L.	Universität zu Köln
Hölz Sebastian	TU Berlin
Hördt Andreas	Universität Bonn
Hübert Juliane	GFZ Potsdam
Jung Andre	GFZ Potsdam & Universität Potsdam
Junge Andreas	Universität Frankfurt
Just Anita	Universität Leipzig
Kalberkamp Ulrich	BGR Hannover
Kalscheuer Thomas	Uppsala universitet
Kapinos Gerhard	FU Berlin

Kreutzmann Anja	FU Berlin
Kuhnke Falko	
Kurz Gerhard	TU Berlin
Lange Jörn	Universität zu Köln
Leven Martin	Universität Göttingen
Löhken Inga	Universität zu Köln
Martin Roland	Universität zu Köln
Meqbel Naser	Universität zu Köln
Moorkamp Max	Dublin Institute for Advanced Studies
Müller Martin	TU Berlin
Müller Mike	TU Berlin
Mütschard Lutz	FU Berlin
Neska Anne	Polish Academy of Sciences, Warszawa
Neumann Jan	Universität zu Köln
Nix Barbara	Universität zu Köln
Nover Georg	Universität Bonn
Palshin Nikolay Shirshov	Institute of Oceanology, Moscow
Panzner Martin	TU Bergakademie Freiberg
Pedersen Laust B.	Uppsala universitet
Pek Josef	Geophysikalisches Institut, Prag
Peskovetskaya Lidia	
Polag Daniela	TU Berlin
Pulz Eberhard	GFZ, Observatorium Niemegk
Radic Tino	Radic Research
Rath Volker	RWTH Aachen
Ritter Oliver	GFZ Potsdam
Rodemann Helmut	GGA-Institut Hannover
Rossberg Rainer	Universität Frankfurt
Rücker Carsten	Leipzig
Rühaak Wolfram	GGA-Institut Hannover
Schaumann Gerlinde	BGR Hannover
Schmucker Ulrich	Göttingen
Scholl Carsten	Universität zu Köln
Schünemann Jörn	GGA-Institut Hannover
Schwalenberg Katrin	BGR Hannover

Schwarz Gerhard	Geological Survey of Sweden, Uppsala
Schwarzbach Christoph	TU Bergakademie Freiberg
Smirnov Maxim	Uppsala
Sokolova Elena Yu.	Geoelectromagnetic Research Centre, Inst. Physics Earth, RAS, Troitsk, Russia
Spitzer Klaus	TU Bergakademie Freiberg
Stadtler Christopher	BGR Hannover
Steuer Annika	BGR Hannover
Stoll Johannes B.	ANTARES GmbH, Stuhr
Tezkan Bülent	Universität zu Köln
Thierner Martin	Uni Bonn
Varentsov Ivan M.	Geoelectromagnetic Research Centre, Inst. Physics Earth, RAS, Troitsk, Russia
Walter Jens M.	Universität Bonn
Weckmann Ute	GFZ Potsdam / DIAS, School of Cosmic Physics
Weidelt Peter	TU Braunschweig
Wilhelms Wenke	GFZ Potsdam / Uni Leipzig
Winter Helmuth	Frankfurt am Main
Worzewski Tamara	FU Berlin

Geschichte(n) zum EMTF-Kolloquium

Von Volker Haak, Blankenfelde

Ehem. Ludwig-Maximilians-Universität München
Ehem. Freie Universität Berlin
Ehem. Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt
Ehem. Freie Universität Berlin (2. Mal)
Ehem. GeoForschungsZentrum Potsdam
Ehem. Sprecher der Arbeitsgruppe des FKPE
„Elektromagnetische Tiefenforschung“

Die Kolloquien zur Erdmagnetischen Tiefensondierung, Magnetotellurik
Und Geoelektrik fingen in Kassel 1962 an, gingen in Salzgitter weiter
und schließlich in Goslar 1965, meinem ersten Kolloquium.
Eigentlich hat sich bis heute nichts geändert, nur Schmucker
war noch immer in den USA und schickte Briefe, die vorgelesen
wurden.

Warten auf Schmucker

01. 1962 Kassel
02. 1963 Salzgitter-Lebenstedt
03. 1965 Goslar
04. 1969 Reinhausen
05. 1971 Rothenberge
06. 1974 Grafrath1
07. 1978 Neustadt 1
08. 1980 Berlin-Lichtenrade
09. 1982 Neustadt 2
10. 1984 Grafrath2
11. 1986 Lerbach
12. 1988 Königstein im Taunus
13. 1990 Hornburg
14. 1992 Borkheide
15. 1994 Höchst
16. 1996 Ludwigstein 1
17. 1998 Neustadt 3
18. 2000 Altenberg
19. 2001 Ludwigstein 2
20. 2003 Königstein in Sachsen
21. 2005 Wohldenberg

Auf der Tagung der DGG in Münster, wahrscheinlich 1978, hatten Herr Kertz und Herr Untiedt mich gefragt, ob ich bereit wäre, Sprecher dieser Arbeitsgruppe des FKPE zu werden. Ich habe mich nie getraut, zu widersprechen. Schon gar nicht einer Legende namens „Kertz“.

Professor Walter Kertz war Ordinarius des Instituts in Braunschweig. Er saß bei allen Tagungen immer vorne in der ersten Reihe, sodaß wir immer sehen konnten, wann er mit seinem Kopf nickte oder ihn schüttelte über die Akzeptierbarkeit des Vorgetragenen. Seine Bemerkungen waren immer einfach formuliert, aber sehr grundlegend, meist auch menschlich grundlegend. Man spürte dann immer, daß mehr hinter der Wissenschaft stand als eben Wissenschaft. Deshalb will ich hier aus einem Vortrag einiges wörtlich zitieren, den er auf einer Tagung der Evangelischen Akademie in Tutzing am Starnberger See hielt. Es war eine Tagung von Wirtschaftsführern der ganzen Republik, die über Leistung in der Wissenschaft diskutierten. Kurz nach 1968. Kertz war damals in der Presse bekannt als der „rote Professor“, der eine ziemlich grundlegende „Demokratisierung“ seines Instituts durchgeführt hatte. Das soll aber hier nicht das Thema sein.

VERHÄLTNIS VON MITBESTIMMUNG UND LEISTUNG IN FORSCHUNG UND LEHRE

Professor Dr. Walter Kertz,
Direktor des Instituts für Geophysik und
Meteorologie der TU Braunschweig.

(Das Referat wurde am 18. Juli 1972 anlässlich des Akademischen Symposiums der Evangelischen Akademie Tutzing gehalten)

Wenn wir hier von Leistung sprechen, so werden wir sie nicht im Sinne der Technik verstehen, dort wird Leistung in Pferdestärken gemessen. Dabei muß man an Pferde denken, die etwa zum Wasserpumpen immer im Kreis herumgejagt werden.

Zur Leistung in Forschung und Lehre gehören Einfälle, intensive Arbeit (die, ähnlich wie im Sport, eine gewisse Askese vom Forscher verlangt) und schließlich, die Hilfe, die der Forscher aus seiner Umgebung bekommt.

Paulus sagt in 1. Korinther 13,2: „ Und wenn ich weissagen könnte“ – für einen Meteorologen kein schlechter Prospekt: Und wenn ich eine 100%ig genaue Wettervorhersage geben könnte - "und wüßte alle Geheimnisse, und hätte alle Erkenntnis, und hätte der Liebe nicht, so wäre ich nichts".

Statt „ so wäre ich nichts" würde man in diesem Zusammenhang wohl sagen: „Meine wissenschaftliche Leistung wäre Null“.

Vielleicht kann man auch den vorhergehenden Satz in unserer Sprache so ausdrücken: "Und wenn ich weissagen könnte, und wüßte alle Geheimnisse, und hätte alle Erkenntnisse, und fragte nicht nach der gesellschaftlichen Relevanz so wäre ich nichts". (Die Formulierung des Apostel Paulus scheint mir allerdings besser und umfassender zu sein.)

Die Technische Universität Braunschweig ist, verglichen mit anderen Universitäten, eine sehr ruhige Universität, an der die Studenten fleißig ihrer Arbeit nachgehen und nicht viel Interesse an politischen Unruhen haben.

Der Institutsversammlung gehören alle an, die im Institut sind. Sie soll nach unserer Satzung das oberste Entscheidungsgremium in institutspolitischen Fragen sein.

Die Verbindung der Begriffe Liebe, wissenschaftlicher Leistung und gesellschaftlicher Relevanz: das war eben Kertz.
Das „System Kertz“, und es wurde für mich ein Leitmotiv.

In den 60er Jahren herrschten die Ordinarien. Es war nicht einfach für Studenten und Mitarbeiter verschiedener Institute, etwas gemeinsam zu machen.

Hier gelang es Kertz mit der Gründung des FKPE alle Ordinarien 2 mal im Jahr an einem Tisch zu versammeln, um über gemeinsame Tätigkeiten, Projekte, Publikationen der Institute zu sprechen und zu tun. Gleichzeitig wurden Arbeitsgruppen des FKPE gegründet, und EMTF war eine von ihnen, die mit dem Segen des FKPE alle interessierten Institute zusammenführte. Ganz offiziell. Und Herr Untiedt war dann der Sprecher dieser Arbeitsgruppe. Reinhausen, Rothenberge und Neustadt I waren die Kolloquien unter diesem Vorsitz, es war eine wunderbare Zeit. Die Kolloquien wurden Feste der elektromagnetischen Forscher in Deutschland.

Meine „Inauguration“ fand auf dem Kolloquium Neustadt I statt, mit dem auch eine Zäsur in der Thematik der Kolloquien verbunden war:
Es sollte ab jetzt mit Blick nach unten die Induktion im Erdinnern, und nicht auch mit dem Blick nach oben die Prozesse von Ionosphäre und Magnetosphäre, erforscht und diskutiert werden. Induktion in der Erde sollte nun das Thema sein. Seitdem heissen wir nicht mehr „Arbeitsgruppe für Erdmagnetische Tiefensondierung, Magnetotellurik und Geoelektrik“, sondern „Arbeitsgruppe Elektromagnetische Tiefenforschung (EMTF)“.

So hielt Kertz am Vorabend des Kolloquiums eine eindrucksvolle Rede, im Weinkeller auf einem Tische sitzend mit einem Glas Wein in der Hand.

Hier will ich einige Sätze wörtlich zitieren, weil sie Mut machen können, solch ein Amt des Sprechers einer großen Gruppe hoch-intellektueller Personen zu übernehmen.

„Am Vorabend der Neustädter Tagung (1978) hatte ich es unternommen, unsere Arbeitsgruppe ... in den leuchtendsten Farben vorzustellen. Mir schien, es sei gut gelungen, anderen wohl auch; denn sie baten mich, ähnliches für das Vorwort dieses Protokolls zu schreiben.

Jetzt merke ich, wie hilfreich der gute Neustädter Wein bei diesem Geschäft war. Mit nüchternen Worten fällt es schwerer, die Arbeitsgruppe ins rechte Licht zu rücken.“

War das nun positiv oder negativ über unsere Arbeitsgruppe ?

„Zum ersten Symposium lud die Deutsche Forschungsgemeinschaft uns im Februar 1962 ins Schloßhotel nach Kassel-Wilhelmshöhe ein.

...

Im Herbst 1965 trafen wir uns im Hotel Achtermann in Goslar.

Danach gab es nur noch Kolloquien, obwohl sich an Form und Inhalt nichts änderte.“

Das waren recht beachtliche Tagungsstätten, keine verschwiegenen Jugendheime oder Herbergen

„Vor den Tagungen wurde in den Instituten fleißig gearbeitet – die Forschung machte Quantensprünge.“

Das sind doch die kleinsten Sprünge, die es überhaupt gibt: War es nun Lob oder Tadel?

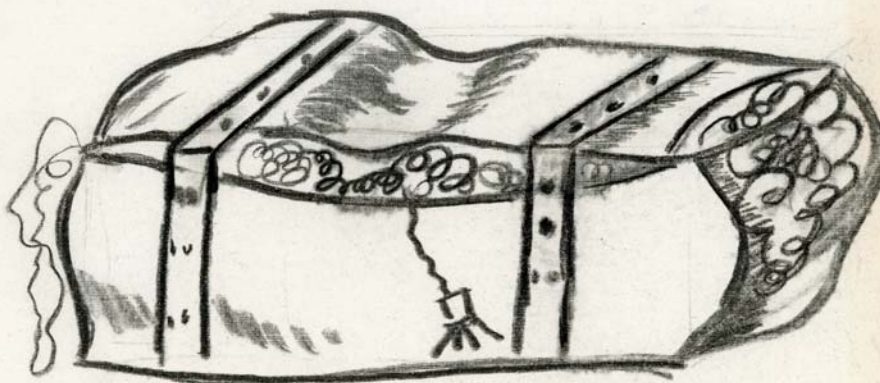
„An Geräten gab's anfangs nur Magnetometer. Die Elektrographen mußten sich ihren Platz erkämpfen.“

Das lag an Julius Bartels, dem Direktor des Göttinger Geophysikalischen Instituts, der nur dem magnetischen Feld wissenschaftlichen Wert zuerkannte. Das elektrische Feld dagegen würde von jedem Kuhfladen und Maulwurfs-Hügel verzerrt werden und somit unbrauchbar für die Geophysik sein.

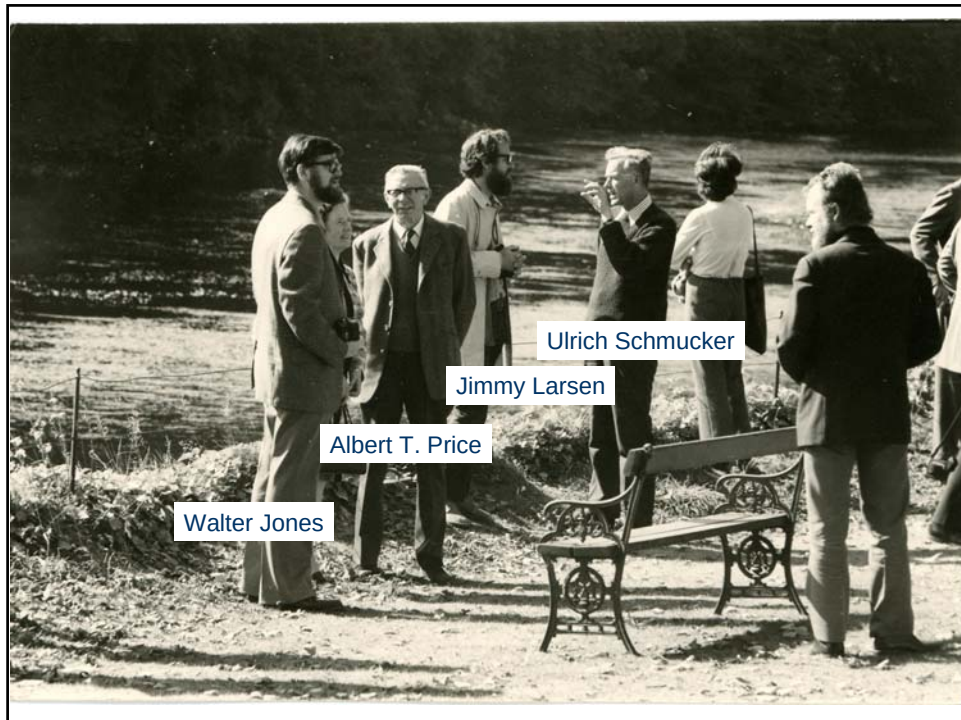


Dagegen opponierte unser Ordinarius Gustav Angenheister in München und ließ uns Elektrographen bauen und mit ihnen messen, zunächst aber nur in Bayern.

Der Münchener Elektrograph ca. 1968, Eigenbau







„In unserem Kreis sind Mensch und Wissenschaft zu ihrem Recht gekommen. Etwas besseres lässt sich über eine solche Arbeitsgruppe nicht sagen.

Glückauf!
Auf eine weitere und erfolgreiche und fröhliche Zusammenarbeit
in der Tiefenforschung“

Ende des Vorwortes von W. Kertz

Das Kolloquium in Berlin-Lichtenrade 1980

Nachdem ich nun Sprecher dieser Arbeitsgruppe geworden war und den ersten Kolloquiumsband „Neustadt1“ herausgebracht hatte, wollte ich mich meinen neuen Aufgaben an der Freien Universität Berlin widmen. Aber schon kam ein unsanfter Anstoß von Untiedt im Herbst 1979: Das nächste Kolloquium stehe ja unmittelbar bevor, wo und wann es denn nun sein werde? Das hatte ich tatsächlich auf eine längere Bank geschoben, da die Kolloquien bisher unregelmäßig in größeren Abständen stattfänden. Wo finde ich nun in Berlin oder im entfernten Westdeutschland in einem $\frac{1}{2}$ Jahr eine Tagungsherberge für 60 Leute. Hilfe kamen von Detlef Damaske und Gerhard Schwarz, die schon mehr Berlinerfahrung hatten als ich.

Am Ende der Welt: Das Schwesternausbildungsheim und Kinderkrankenhaus Sankt Christopherus in Lichtenrade. Zum Bahnhof Zoo ist es etwa genau so weit wie in Frankfurt am Main vom Bahnhof bis nach Königstein.

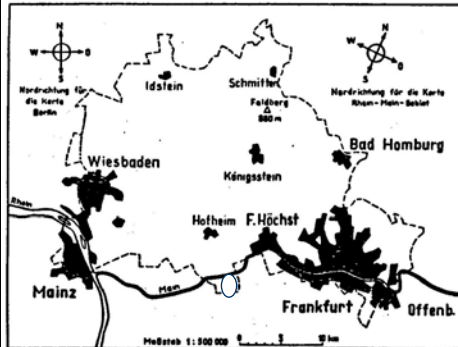


Abb. 1: Vergleich der Größe des Stadtgebietes von Berlin mit den Städten Frankfurt/Main, Wiesbaden, Mainz und Umgebung



Abb. 2: Vergleich der Größe des Stadtgebietes von Berlin mit dem Stadtgebiet von München und Umgebung

An den Abenden saßen wir im „Kaminzimmer“ in einer größeren Runde in tiefen Ledersesseln, was bereits damals 1980 zu fernseh-tauglichen Talkshows führte. Hier kamen alle heiklen Punkte der Vorträge am Tage zur Sprache, und manch einer verstand diese Vorträge überhaupt erst nach diesen offenen Aussprachen oder auch überhaupt nicht mehr.

Die folgenden Ausschnitte aus Szenen dieser Talkrunde sind seitdem in mir gespeichert gewesen. Es ist Zeit, sie jetzt auszuladen (outloading?), bevor das Speichermedium unleserlich wird.

Herr Andersohn, der Schöpfer der Askania-Variographen, wurde in Berlin entdeckt und überredet, an unserem Kolloquium teilzunehmen. Er erklärt uns ausführlich den tiefen und feinen Zauber dieser feinmechanischen Kunstwerke.

„Um dem Torsionsfaden die richtige Steife zu geben, müssen Sie ihn einzufetten. Dazu müssen Sie ihn zwischen Daumen und Zeigefinger nehmen und in einem Zug durch ziehen. Dann spüren sie eine Vibration, und auf diese Frequenz kommt es an, nur sie gibt an ob der Faden richtig gespannt und gefettet ist.“

(Es ist zehnmal leichter, Computerprogramme zu schreiben als solch einen Askaniavariographen auch nur annähernd zu verstehen)

Joachim Meyer will den Grundpfeiler der EMTF stürzen: die Induktionspfeile. Als er wiederholt den wissenschaftlichen Wert des Untiedt-Pfeils anzweifelt, erklärt Untiedt die Untiedt-Pfeile zu Unsinn-Pfeilen.

Schmucker empfiehlt Herrn Meyer unterdessen in diesem Zusammenhang, Komponenten wie Mehlsäcke zu addieren (Meyer: Hören Sie: Mehlsäcke!, das erklärt alles, ALLES.)

Im Protokoll schließlich ein Aufsatz von J. Meyer mit dem simplen Titel: „Die Vervollständigung der Maxwellgleichungen.“ (So viel Mut hat heute keiner mehr)



Untiedt:
„Herr Schmucker, wie machen
Sie das in Ihren Arbeiten.



Da steht gleich am
Anfang so eine Formel, über
die wir wochenlang grübeln,
bis wir sie verstehen.
Entwickeln Sie diese vorher
auf mehreren Seiten und
lassen dann den ganzen
Anfang weg?

Oder schreiben Sie
sie die Formel einfach so
hin?"

Choose a basic response function within the n^{th} layer

$$\Psi(\omega, z) = 4 \tanh^{-1} \left\{ \frac{h_n}{a_n} \exp(2K_n z) \right\}$$

$$= 2 \ln \{ K_n C(\omega, z) \}.$$

Schmucker: „Einfach so hin“
(aus der „Entstehung des
PSI-Algorithmus“)

Diese Diskussionen zeigten uns, dass es notwendig war,
sie als wichtigen, ausführlichen Bestandteil in das Kolloquium
zu etablieren.



Ulrich Schmucker, Gaston Fischer und Hartmut Jödicke konnten
mit unterschiedlichen Themen diesen Flächenbrand freier und lebendiger
Diskussionen in den kommenden Jahren immer wieder anfachen

Das Kolloquium sollte, wie es das lateinische Wort sagt, vor allem ein Gespräch untereinander sein.

Generelles Motto „Fröhliche Wissenschaft“ frei nach Nietzsche

Vormittags Vorträge
Nachmittags gelenkte Diskussionen
Abends freie Diskussionen

Ein gewisser Unterschied zwischen „ehemals“ und „jetzt“:
Vor allem sind es die Poster-Präsentationen, die jetzt nach Jahren eine feste Position einnehmen. Sie bieten eine Fülle an Informationen an, aber sie fördern auch eine mehr selektive Wahrnehmung. Das widerspricht meinem Wunsch, das Kolloquium zu einem Gemeinschaftserlebnis zu machen und damit auch jedem die Augen zu öffnen für alle Aspekte der elektromagnetischen Induktion. Nicht nur in der Natur, auch bei uns spielt die Diversifikation der Forschungsthemen eine wichtige Rolle, und es bleibt ein Rätsel, wie alle auf einmal über immer mehr sprechen können.

Es herrschte auch in unserem geordneten Lande und sogar in unserer Gruppe eine Vielfalt von physikalischen Einheiten, die eigentlich auf der IUGG 1971 in Moskau abgeschafft wurden.

So nicht!

Gemeinsame Terminologien:
Alles im SI-System

1 Wiener Fuss	= 0,316102 Meter.	1 Rheinischer oder
1 Pariser Fuss	= 0,324839 "	Preussischer Fuss = 0,313853 Meter.
1 Rüssischer Fuss	= 0,304794 "	1 Englischer Fuss = 0,304794 "
1 Schwedischer Fuss	= 0,296838 "	Eisenlohr, 1863
1 Badischer Fuss	= 0,300000 "	

B statt H (wir messen immer B, in der Einheit nT)
Natürlich kann man auch H verwenden, aber nur in der Einheit A/m

Pascal statt PSI oder Bar oder Torr oder mmHg

Impedanzen (E/H) in Ohm oder MT Übertragungsfunktionen
E/B in der Einheit km/sec

Skews zeigen nicht die Dimension der Bodenleitfähigkeit,
sondern der elektrischen und magnetischen Felder an.

MT heißt nicht „leer“ (N.Y. Hafenarbeiterjargon)
Vorschlag MagTel klingt nach dem schottischen Vorfahren
eines Schweizer Volkshelden (Diskussion in „Geophysics“)

Zwischen den Kolloquien:

Professor Joachim Homilius war immer mein Mitherausgeber des Kolloquiumsbandes

Er erfindet die Farbe Blau - und führt die leere Seite („Vacat“) vor einem neuen Artikel ein, der damit immer auf einer ungeraden Seite beginnt, wie in einem professionell hergestellten Buch

Exemplare wurden an ausländische Interessenten geschickt, die behaupteterweise deutsche Texte verstanden.

Die damals notwendige mechanische Arbeit zur Herstellung der Manuskripte verschlang enorm viel Zeit und setzte große Kunstfertigkeit voraus.

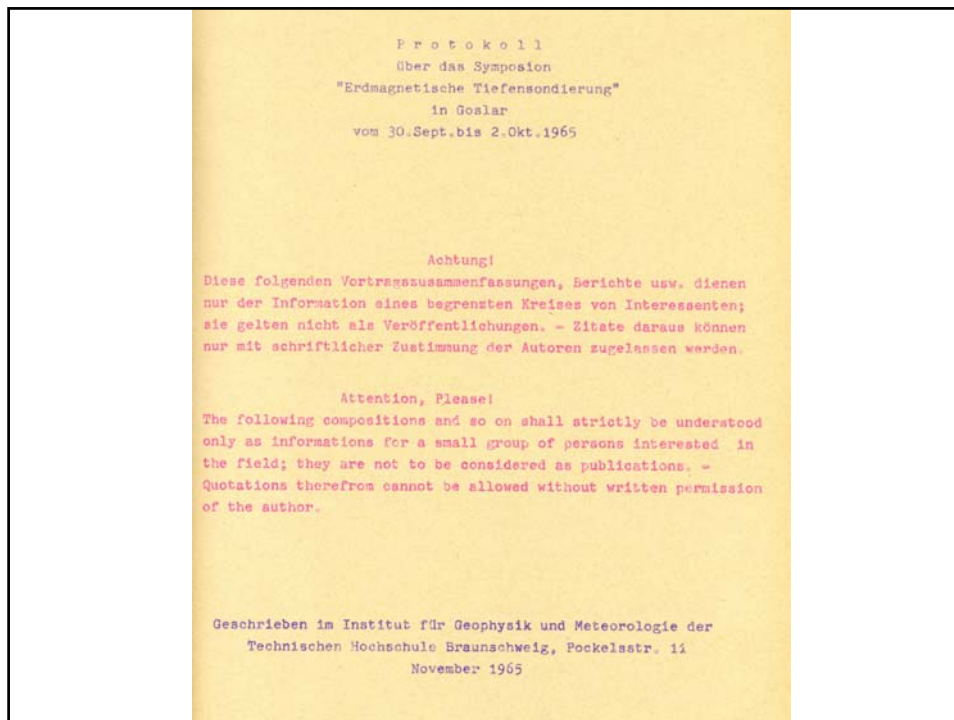
Die neuen Kolloquiumsbände wirken sehr professionell:

Ehemals: Einzel-Autoren	Jetzt Autoren-Teams
Deutsch	Englisch

Was ist der tiefe Grund ? Warum springen noch so viele auf einen Zug, der gar nicht abfährt, zumindest nicht in einen Publikationshimmel. Das Protokoll wird als Publikationsorgan nicht ernst genommen (Aussage eines langjährigen Gutachters der DFG u.s.w.)

Hier hat man doch die Freiheit, individuell und mutig Unsinn zu sagen. Das sollte man ernst nehmen. Hier kann fröhliche Wissenschaft beginnen.

Deshalb wurde früher vor diesem Protokoll auch gewarnt, in deutsch und in einer Art English.



Es entstand die Frage, ob wir nach dem Vorbild der Asfa-Gruppe des FKPE eine ständig präsente, ständig aktive Arbeitsgruppe bilden sollten:

Enge Zusammenarbeit in Projekten, in der Anschaffung und Betrieb von Geräten, Austausch von Computerprogrammen, Anträge zur Finanzierung, Arbeitstreffen zwischen den Kolloquien.

Ich versuchte die Zeiten zwischen den Kolloquien durch Mitteilungen und kleinere Treffen zu beleben

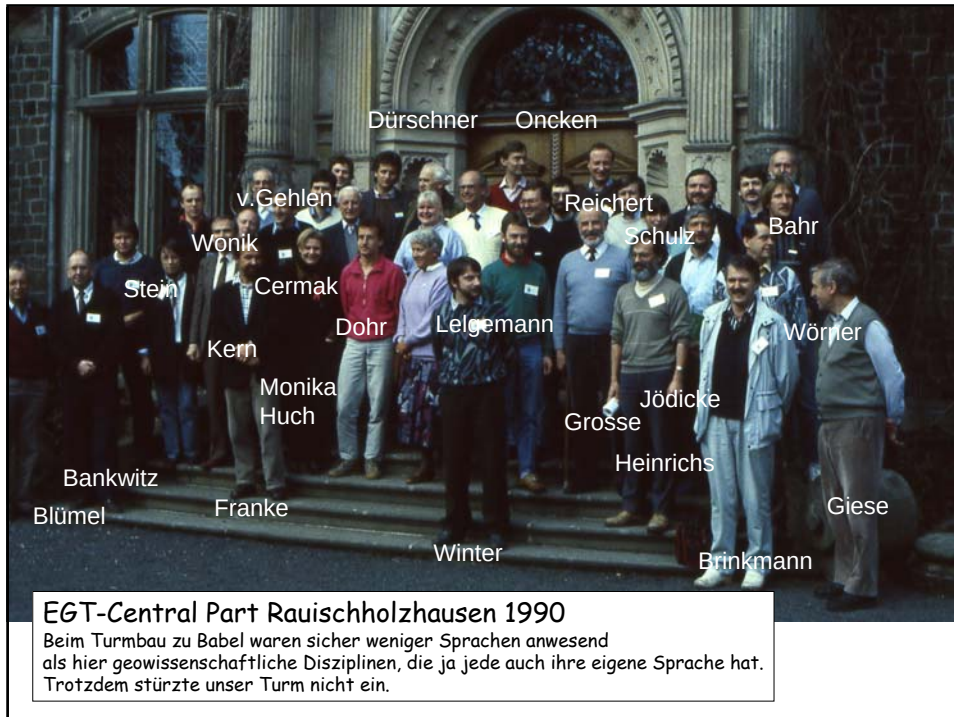
All das wurde auch mit viel Mühe begonnen, es war auch die Zeit mehrerer großer nationaler und internationaler Projekte. Für mich war die Teilnahme an diesen Projekten eine Frage des Überlebens dieser EMTF in Deutschland. Man braucht Geld, für alles, für Meßgeräte, für Doktoranden. Einige Projekte schlossen schon ganz Europa ein, und natürlich alle Disziplinen der Geowissenschaften:

Große Projekte der 80er und 90er Jahre
 Unterkruste (Göttingen, Münster)
 DEKORP (Jödicke)
 Kontinentales Tiefbohrprogramm KTB (ELEKTB-Gruppe)
 Europäische Geotraverse EGT (Rauischholzhausen)
 Orogene Prozesse
 EUROPROBE: Hierzu gehörte von Anfang an auch das TESZ,
 Projekt, aber noch viele andere Ziele

Ein Blatt aus
 der unendlichen
 Mühsal gemein-
 samer KTB-
 Projekte

DFG-Sachbeihilfe Nr. 1210/2-5		Jahresverwendungsnachweis 1988				
Universität	Kassenmittel	Personal	Reise- kosten	Verbrauch	Summe d. Ausgaben	Bestand
Berlin (Dr. Schütte Anlage 4)	6.500,00	(am 31.12.88 noch nicht abgerechnet)		1.087,58	1.087,58	5.412,42
Braunschweig Dr. Musmann, Anlage 3)	11.000,00	1.076,40	3.973,10	603,15	5.652,65	5.347,35
Göttingen (Dr. Steveling Anlage 1)	12.600,00	4.212,00	5.361,69	2.854,85	12.428,54	171,46
Frankfurt (Prof. Haak)	28.920,00	2.808,00	14.266,80	5.368,15	22.442,95	6.477,05
München (Dr. Berkold, Anlage 2)	11.000,00	3.195,59	5.110,85	2.849,00	11.155,44	-155,44
Summen	70.020,00	11.291,99	28.712,44	12.762,73	52.767,16	17.252,84

I. Hornbaken



EGT-Central Part Rauischholzhausen 1990

Beim Turmbau zu Babel waren sicher weniger Sprachen anwesend
 als hier geowissenschaftliche Disziplinen, die ja jede auch ihre eigene Sprache hat.
 Trotzdem stürzte unser Turm nicht ein.

Wie wichtig sind IAGA oder IASPEI für die EMTF Gruppe

Welche Tagungen sind wirklich interessant:

An sich sind unsere Methoden so interessant und so schwierig, dass wir außer uns niemand brauchen, sie allein zu erforschen. Also IAGA und EMTF national und international genügen.

Andererseits ist die elektrische Leitfähigkeit nicht eine Untergruppe der verschiedenen seismischen Geschwindigkeiten und kann eben manchmal nur zur Bestätigung seismischer Modelle verwendet werden:

Nein, wir liefern völlig unabhängige Information. Einmal korrelieren hohe Leitfähigkeiten mit kleinen Geschwindigkeiten, ein ander mal mit hohen seismischen Geschwindigkeiten, oder korrelieren überhaupt nicht.

Das einzige Problem ist es, für andere verständlich zu bleiben, ob mit Induktionspfeilen, Realteilen, Phasen, Dekompositionen: Dann aber sind wir ein Fall für die IASPEI.

EMTF Kolloquium Goslar 1965		
Dr. P. Goerlich	Deutsche Forschungsgemeinschaft 532 <u>Bad Godesberg</u> Kennedyallee 40	Prof. Dr. H. Mennel Dr. R. Outdeutsch Dipl.-Geophys. W. Weigel Institut für Physik des Erdkörpers 2 <u>H a m b u r g 13</u> Binderstr. 22
Prof. Dr. K. Strobach	Institut für Meteorologie und Geophysik der Freien Universität Berlin, Abteilung Geophysik 1 <u>B e r l i n 33</u> Podbielskiallee 62	Studienrat E. Lerbach 2 <u>H a m b u r g - Gr. Plottbeck</u> Kaulbachstr. 23
Dr. R. Schulze Dipl.-Ing. Jakobi	Askania-Werke 1 <u>B e r l i n 42</u> Großbeerenstr. 2-10	Dir. Dr. F. Hallenbach Dr. Deppersmann Dr. Stein Dipl.-Ing. Röhne Bundesanstalt für Bodenforschung 3 <u>H a n n o v e r - Buchholz</u> Alfred-Bentz-Haus
Prof. Dr. W. Kerts Dr. J. Untch Dr. H.-G. Seneupe Dr. O. Wegner Dipl.-Phys. W. Losecke cand. phys. B. Hente cand. phys. D. Heese cand. phys. H. Lauche Präulein I. Müllrick	Institut für Geophysik und Meteorologie der Technischen Hochschule Braunschweig 33 <u>Braunschweig</u> Pockelsstr. 11	Prof. Dr. St. Müller Geophysikalisches Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe 75 <u>K a r l s r u h e - West</u> Herzstr. 16
Prof. Dr. O. Rosenbach Dipl.-Geophys. Fröhlich	Institut für Geophysik der Bergakademie Clausthal 3392 <u>C l a u s t h a l - Z e l l e r f e</u> Adolf-Römer-Str. 2A	Dr. Tiedemann Institut für Geophysik 23 <u>W i e l</u> Neue Universität, Haus 34
Dr. K. Wienert Dr. A. Korschunow	Erdmagnetisches Observatorium 808 <u>F ü r s t e n f e l d b r u c k</u>	Prof. Dr. G. Angenheister Dr. F. Oiese Dr. C. Prodehl Dipl.-Geophys. A. Berkold Dipl.-Geophys. J. Pohl Dipl.-Geophys. K.P. Sengepiel Dipl.-Geophys. R. Wanke cand. geophys. M. Purani cand. geophys. V. Hask cand. geophys. W. Latka stud. geophys. Grönewald Institut für Angewandte Geophysik der Universität München 8 <u>M ü n c h e n 2</u> Richard-Wagner-Str. 10
Dr. M. Siebert Dr. J. Meyer Dr. H. Völker Dipl.-Phys. P. Spitta cand. phys. Hufen cand. phys. Steveling cand. phys. Weidelt cand. phys. Winter	Geophysikalisches Institut der Universität Göttingen 34 <u>G ö t t i n g e n</u> Herzberger Landstr. 180	Dr. M. Schuch Dr. O. Müßnest Bayer, Landesanstalt für Bodenkultur, Pflanzenbau und Pflanzenschutz 9 <u>M ü n c h e n 19</u> Menzinger Str. 54
Als die „IASPEI“ noch zur EMTF kam		Landeserdbobendienst Baden- Württemberg 7 <u>S t u t t g a r t 1</u> Richard-Wagner-Str. 44

IAGA

IASPEI, IUGS, IAVCEI, UMWELT

Wenn man über folgende reden will:

1-D Inversion

2-D Inversion

Induktionspfeile

Imaginärteile

Phasen

Minimum-structure Modelle

Maxwellgleichungen

Dekomposition

Satelliteninduktion

Deponien

Vulkane

Anomalien

Temperaturen

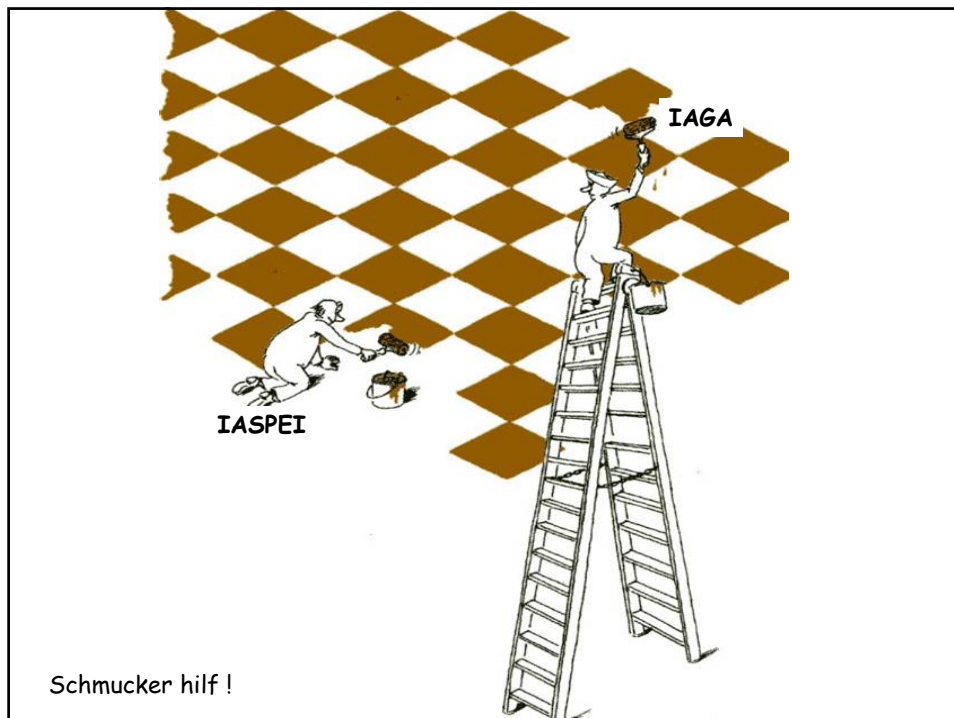
Wasser

Scherzonen

Erdmantel

Erdbebenforschung

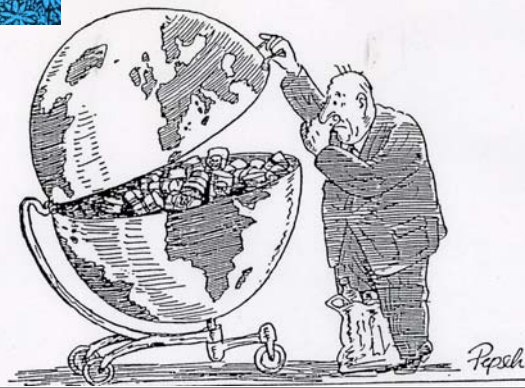
Im EMTF-Kolloquium redet man über alles, hoffentlich hören auch alle zu





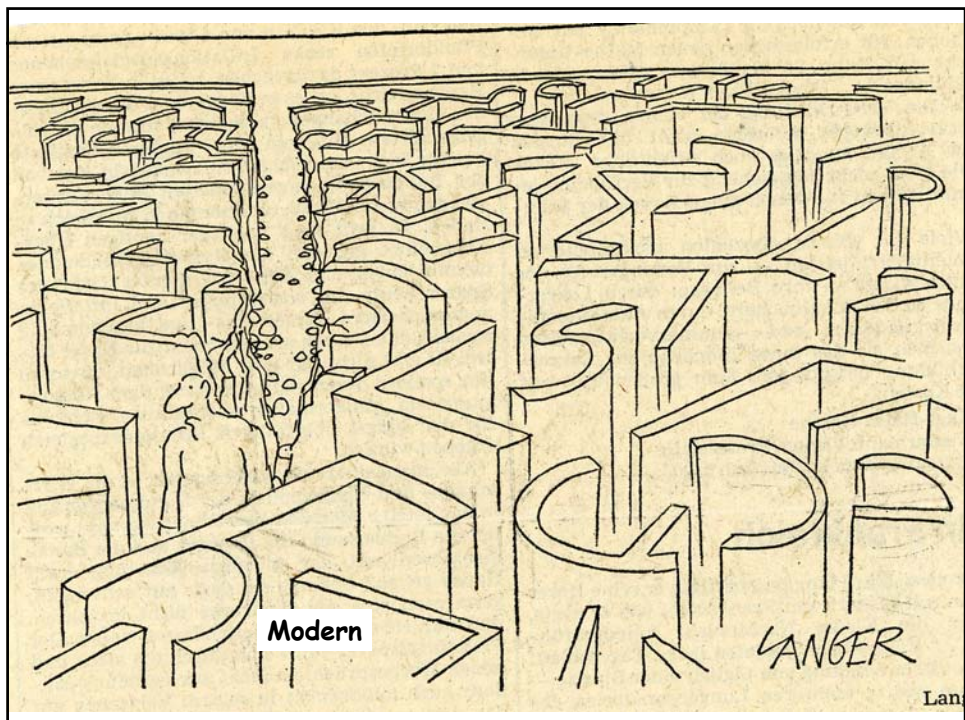
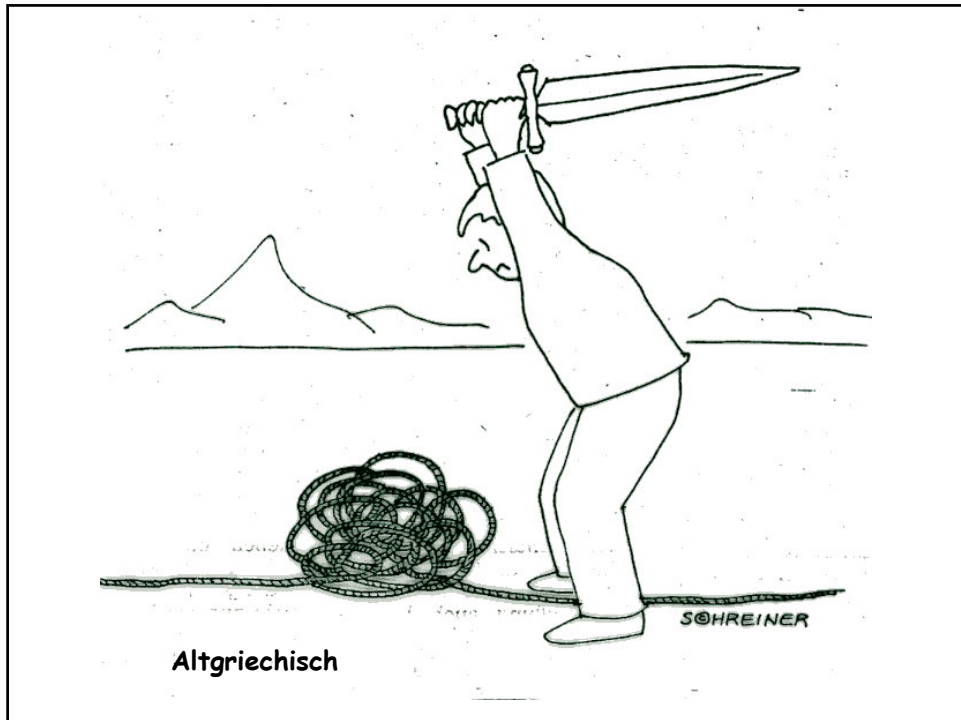
Es ist eine individuelle Entscheidung, in der Ästhetik und Harmonie eine gewisse Rolle spielen.

Es fällt leichter, sich mit dem Erdinnern zu beschäftigen, wenn man sich in den externen und unirdischen Feldern Kraft holen kann.



Forschungsansätze und Forschungsstile

Man kann auf viele Arten Probleme lösen, um bahnbrechende Entdeckungen machen zu können



Urerfahrungen des Menschen



**Ich glaube, es wird immer eine Lücke zwischen
Wissenschaft und Wirklichkeit geben**

Frühe wichtige Themen:

Datenbearbeitung

1-D Inversion

2-D Modellierung

Dekomposition

Gerätebau

Asthenosphäre (ELAS)

Topographie

Schmucker verstehen

Elektrische Leitfähigkeit im Labor und
in der Theorie

Umweltprobleme: Deponien, Ozeanströme

Magnetfeldprojekte der Satelliten:

Magsat, Oersted, Champ, Swarm

Gelöste Probleme (sehr problematisch, Schmucker fragen)

Der Egbertcode
(eine Nachricht aus dem frühen Mittelalter)

EMTF Kolloquium 1200

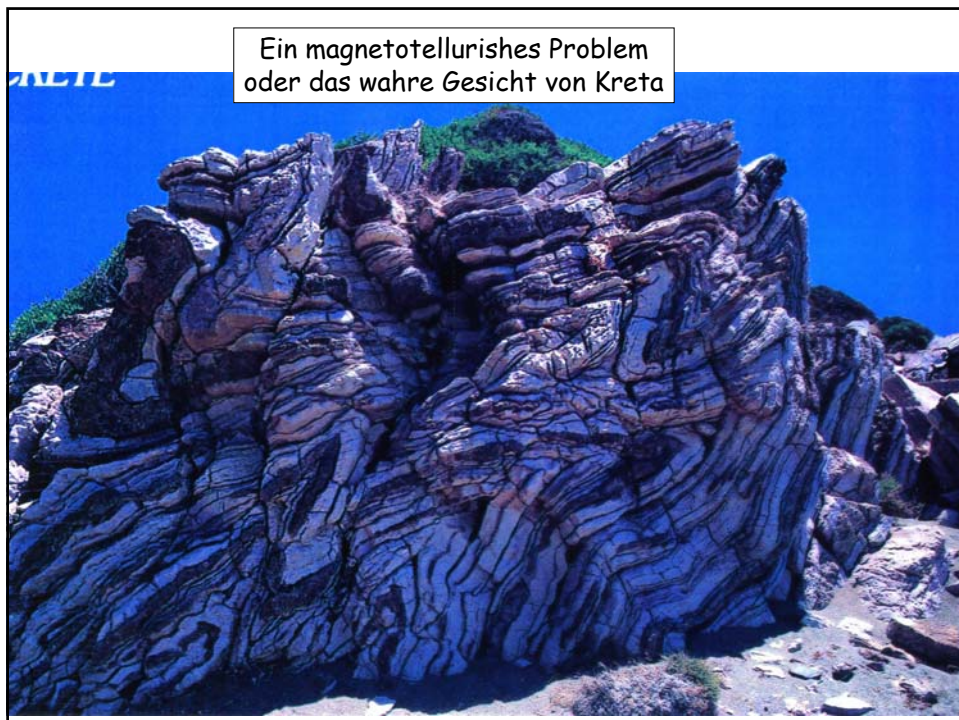
DER EGBERT CODEX



Kapitel „Ungelöste Probleme“: Die Dekomposition

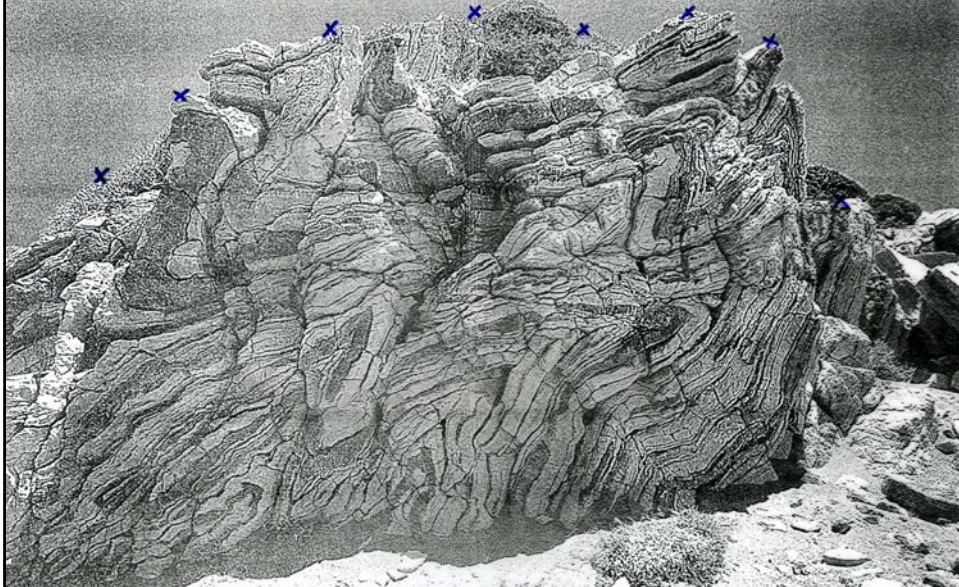
(die Dekomposition einer Symphonie von Beethoven ist gelöst, es ist vielen Dirigenten und Orchestern gelungen)

Die Dekomposition eines Magnetotelluriktensors ist problematisch, da keiner weiß, wer ihn komponiert hatte, und wie – vor allem.



CRETE

Eine MT-Feldmessung – Planung und Durchführung an den Kreuzen



Das neue Bild von Kreta

nach Dekompositionen und Static Shift-

korrektur
und
Minimum-
Structure-
Inversion

100 Ωm

1000 Ωm

sind alle
wesentlichen
Eigenschaften
entfernt.





Es bleibt immer noch zu viel stehen

Es ist die Frage, was wir wollen:

Die Natur verstehen, oder Modelle der Natur erstellen, die nur jene Teile der Natur enthalten, die wir verstehen.

Der König Empedokles - lange ist's her - wollte die Wahrheit über die Erde, die Welt, wissen. Er überlegte sich das sein ganzes Leben lang und kam schließlich zu der Erkenntnis, diese Wahrheit im Innern der Erde zu finden. Deshalb stürzte er sich in den Vulkan Aetna.

Dieser Weg ist, wir wissen es jetzt, der Königsweg zur Wahrheit. Er ist uns Gemeinen verwehrt. Wir müssen Anträge stellen, Formulare ausfüllen, Messgeräte anschaffen, sie in allen Ländern aufbauen, unendliche Datenmengen in Computer schleusen, um schließlich Modelle finden.

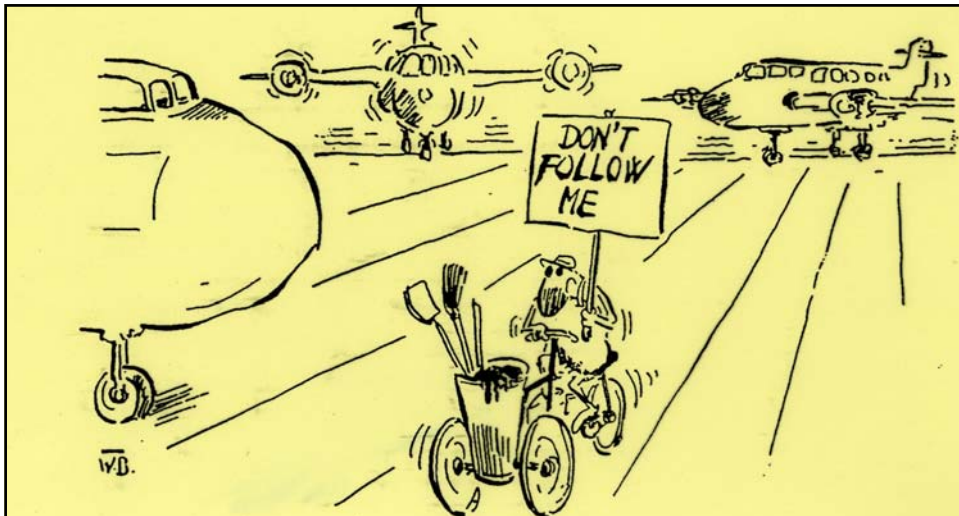
Eben! Modelle!

A.T. Price, einer der Väter der elektromagnetischen Induktionstheorien in der Erde erzählte (Edinburgh 1972):

The tale about the mathematician who went slightly mad, and was greatly affected by the moon. He was so madly obsessed with the moon, that he made a beautiful model of it, and then he became convinced

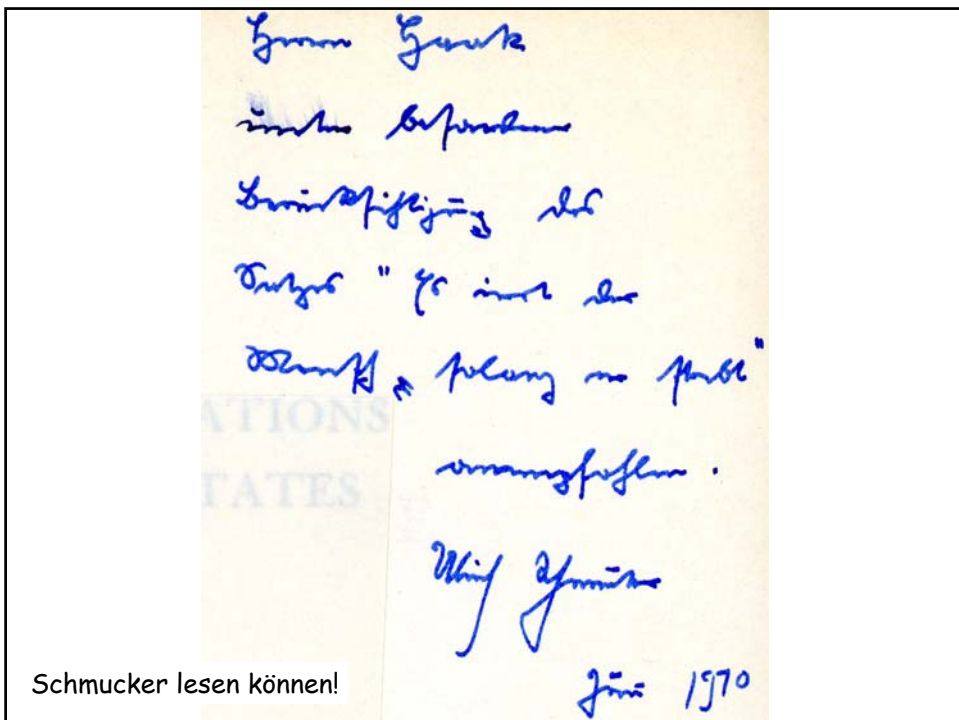
that his model was the real moon,

and the thing in the sky merely a figment of the imagination!
Need I say more than "Mathematicians, beware of being seduced by your beautiful models".



Ich verlasse hier die Szene. Die Aufgabe des Sprechers war Herstellung von Ordnung und Reinigung, seine Rolle darf nicht missverstanden werden.

Eines bleibt noch zu sagen: Ulrich Schmucker hat der EMTF und mir unendlich viel gegeben. Es ist aber auch schwer gewesen, alles zu verstehen



Schmucker lesen können!

1D interpretation of electromagnetic response estimates with the Psi-algorithm

Ulrich Schmucker, Goettingen

1 Preliminaries

There seem to be good reasons to return from time to time to 1-dimensional interpretations of electromagnetic (EM) sounding data. Not long ago Whittall & Oldenburg (1992) published an extensive treatise on the subject and Parker & Booker (1996) presented an extension of their earlier work to treat the 1D non-linear inversion without recourse to linearization. It is also interesting to note that still sites are singled out in the most complicated and multi-dimensional situations, where an interpretation by 1D models can be justified (e.g. Lathi et al., 2005; Section 4). It may not be very difficult anymore to find models which match EM sounding data within error limits, provided they are sufficiently consistent with this kind of interpretation. There will be, however, a multitude of competing models to account for a limited number of error-bearing estimates. Therefore the fit of modelled to observed responses should be only one of several criteria when interpreting EM sounding data. Other aspects are the structural complexity of the derived model, the achieved resolution at a given target depth and the accuracy of the model at that depth.

These four aspects will be the key elements of the following discourse. It is centred on the Psi-algorithm, of which Larsen (1975, Section 5.1) gave a concise outline, and a short overview can be found in Appendix A. Further references are Schmucker (1974), Schmucker & Weidelt (1975, Section 6.4) and Haak (1978, Section 3.12), here in connection with related work by Eckhardt (1968). Subsequent improvements have been summarized by Schmucker (2001). They are extended now and complemented.

2 The linearization of the 1D inverse problem

We seek to formulate a well-posed inverse problem in the sense that its solution depends continuously on the data. Otherwise small changes of the data, by errors for example, could yield quite disparate solutions. For instance, when $\tau(z) = \int_0^z 1/\rho(\hat{z}) d\hat{z}$ denotes the depth-integrated conductivity, with z as depth and ρ as resistivity, then the derivation of $\tau(z)$ from EM responses represents a well-posed problem, and the same presumably applies when deriving $\rho(z')$ in a conductivity-weighted depth

$$z'(z) = \int_0^z \sqrt{\rho_0 / \rho(\hat{z})} d\hat{z} \quad (1)$$

(Weidelt, 1972; eq.4.2), while the derivation of $\rho(z)$ in true depth would be ill-posed (Berdichevsky & Dmitriev, 2002; Sections 8.1 and 8.3). The transition from z to z' implies that depth sections of high resistivity, in comparison to ρ_0 , are compressed and those of low

resistivity enlarged, smoothing out the downward attenuation of the incident field. The scaling constant ρ_0 can be freely chosen, but should lie preferably in the range of expected resistivities as inferred for instance from the range of apparent resistivities (cf. Appendix B).

When a continuous model $\rho(z')$ in z' -depth is approximated by a sequence of layers of resistivity ρ_m ($m=1,2,\dots,M-1$) above a uniform half-space of resistivity ρ_M , we shall subdivide it into layers of *constant* thickness d' . Eq. (1) implies then that the model $\rho(z)$ in true depth has the layer thicknesses

$$d_m = d' \sqrt{\rho_m / \rho_0} , \quad (2)$$

a constraint which has been used repeatedly in the past in this context. It implies that only the layer resistivities remain as the M unknowns to be found, provided the layer thickness d' is not among them, as it will be the case in our approach. The optimal choice of d' will be considered separately in Subsection 4.4.

Under certain circumstances, when for example the responses to be interpreted extend over a wide range in frequency and thereby over a large range of penetration depths, it may be useful to follow Larsen (1975) and to vary layer thicknesses also in z' by adopting layer weights w_n relaxing the above constraint to

$$d_m = w_n \cdot d' \sqrt{\rho_m / \rho_0} . \quad (3)$$

In this way the model can be more finely subdivided at shallow depths than further down, for example, concentrating then on the interpretation of high frequencies, or vice versa. The weights are either arbitrarily chosen or determined separately in an iterative process, which starts with preliminary layer resistivities derived for unit weights. Then by solving a linear system similar to that in the forthcoming eq. (4), successive improvements are obtained simultaneously for w_n as well as ρ_m .

The data to be interpreted are complex-valued transfer functions for angular frequency ω_n , with $n=1,2,\dots,N$. Henceforth we denote them with y_n , the layer parameter for resistivity to be found with x_m , with $m=1,2,\dots,M$ and the connecting non-linear functional for the n -th frequency with F_n . Constraining layer thicknesses according to eq. (2), the functional depends in addition to the layer parameter only on the layer thickness d' multiplied with the frequency factor α_n as introduced in the forthcoming eq. (6), yielding in $y_n^{\text{mod}} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_M; \alpha_n d')$ the model response for frequency ω_n . Unless the non-linear 1D problem is truly to be solved by inversion, an iterative procedure can be used by linearization of the problem. A standard, but here not followed form of linearization proceeds from a Taylor expansion of the functional, truncated after first-order terms:

$$y_n = F_n(x_m^{(0)}; \alpha_n d') + \sum_m \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \Delta x_m \quad \text{with the derivatives taken at } x_m = x_m^{(0)} \text{ and with } x_m^{(0)} \text{ as}$$

starting model. The resulting linear problem

$$y_n - F_n(x_m^{(0)}; d') = \sum_m \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \Delta x_m^{(0)} + \delta(y_n - F_n), \quad (4)$$

with $\delta(\cdot)$ as misfit residual, is solved towards improvements $\Delta x_m^{(0)}$. They are added to the starting model to yield $x_m^{(1)}$ for the next iteration and new derivatives of F_n at $x_m = x_m^{(1)}$. The iterations may or may not converge towards a final model, not counting the possibility that it may be influenced by the choice of the starting model. But the principal drawback for our purposes is that modelling errors are difficult to obtain, and thus they are rarely quoted in the literature for models which have been derived in this manner.

The use of the Psi-algorithm resolves partially the convergence problem and removes the other two shortcomings altogether. Data and model are defined now in such a way that the functional receives the quasi-linear form

$$y_n^{\text{mod}} = \sum_m g_{nm} x_m, \quad (5)$$

with g_{nm} as data kernel (cf. eq. A4), which depends primarily on the preset product $\alpha_n d'$, to a lesser degree also on the model parameter x_m , thus preserving the non-linearity of the inverse problem. But the dependence on layer resistivity is weak unless the model is very rugged. When for example resistivity changes between adjacent layers over two orders of magnitude, with $0.1 \leq \rho_{m+1} / \rho_m \leq 10$, the data kernel does not change by more than about 10%. Furthermore, no starting model is involved because iterations can start with the totally model-independent approximation

$$g_{nm}^{(0)} = 2 \sinh(\alpha_n d') \exp(-2\alpha_n z'_m) \quad \text{with} \quad \alpha_n = \sqrt{i\omega_n \mu_0 / \rho_0} \quad (6)$$

and $z'_m = (m - 1/2)d'$ as depth of the centre of the m -th layer in z' (cf. eq. A5). Solving then the linear problem

$$y_n = \sum_m g_{nm}^{(0)} x_m^{(1)} + \delta y_n, \quad (7)$$

it yields in $x_m^{(1)}$ for $m = 1, 2, \dots, M$ a first model approximation. The calculations are repeated with the exact data kernel $g_{nm}^{(1)}$ for this model, leading to a second approximation $x_m^{(2)}$, and so on until the differences of misfit residuals δy_n in consecutive iterations fall below a pre-set threshold. In this way each iterative cycle generates a completely new model, while updating the data kernel concurrently from cycle to cycle. Thus model errors as they arise from data errors are readily derived for the final model. The remaining problem of convergence will be addressed in Subsection 4.5. After the first iteration it is also possible to change to spherical models and to derive the first set of exact data kernels accordingly.

Depending on whether 1D sounding experiments are conducted with geomagnetic time variations alone or in combination with those of the geoelectric field, the pertinent EM responses for angular frequency ω_n are the C-response $C(\omega_n)$ or the magneto-telluric impedance $Z(\omega_n)$, with $Z(\omega_n) = i\omega C(\omega_n)$. Converted into apparent resistivities and phases

of impedance we obtain $\rho_a(\omega_n) = \mu_0 / \omega_n \cdot |Z(\omega_n)|^2 = \mu_0 \omega_n \cdot |C(\omega_n)|^2$ and $\varphi(\omega_n) = \arg\{Z(\omega_n)\} = \arg\{C(\omega_n)\} + \pi/2$. As shown in Appendix A, the following definition of data and model leads to the desired quasi-linear form of the functional:

$$y_n = 2 \cdot [\ln\{C(\omega_n)/C_0(\omega_0)\}] = \ln\{\rho_a(\omega_n)/\rho_0\} + 2i\{\varphi(\omega_n) - \pi/4\} \quad (8)$$

with $C_0(\omega_n) = 1/\alpha_n$ as C-response of a uniform half-space of resistivity ρ_0 , while the natural logarithm of resistivity in the form

$$x_m = \ln\{\rho_m/\rho_0\} \quad (9)$$

defines the model parameter. Eq. (8) is identical with Parker & Booker's eqs 4 and 5 (1996), even though here in a very different context. Estimation errors $\Delta C(\omega_n)$ for $|C(\omega_n)|$ yield data error $\Delta y_n = 2\Delta C(\omega_n)/|C(\omega_n)|$. Equating in the usual way $\Delta\rho_a/\rho_a$ with the phase error, Δy_n is also the error of the real and imaginary parts of y_n .

Renamed u_m , also an alternative model parameter will be used in order to express the change of resistivity from layer to layer,

$$u_m = \ln(\rho_m/\rho_{m-1}) = x_m - x_{m-1} \quad (10)$$

with $x_0 = 0$ and

$$y_n^{\text{mod}} = \sum_m \hat{g}_{nm} u_m \quad (11)$$

as functional. The model-independent approximation of the new data kernel $\hat{g}_{nm}$ to start iterations is

$$\hat{g}_{nm}^{(0)} = \exp\{-2\alpha_n(z'_m - d'/2)\} \quad (12)$$

(cf. eq. A7 and A8).

3 The pseudo-inverse of the data kernel

We continue in vector and matrix notations, presuming that their components and elements are real-valued. Since complex data and thereby complex data kernels have been used so far, the first N positions of the data vector $\underline{y}$ are filled with the real part and the following N positions with the imaginary part of the data, proceeding in the same way when filling the $2N$ rows of the $2N \times M$ data kernel matrix $\underline{G} = (g_{nm})$. Without change of notations y_n represents henceforth for $n \leq N$ the real part of the data, as defined in eq. (8), and for $n > N$ the imaginary part, and the same shall apply to the data kernel.

Under certain circumstances it can be of advantage to interpret only apparent resistivities or only phases. Omitting then the first or the second N entries, the data vector is reduced to N components and the data kernel matrix to N rows. Otherwise the interpretation is performed in

exactly the same way. When only phases are interpreted, the scaling resistivity ρ_0 can be used to match modelled and observed apparent resistivity for some selected frequency, thus giving the model absolute scales in resistivity and depth.

Let now $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T$ denote the model vector. Then without reference to the respective iteration, eq. (7) reduces with $\underline{\delta y}$ for the real and imaginary part of the misfit residual to

$$\underline{y} = \underline{G} \cdot \underline{x} + \underline{\delta y}. \quad (13)$$

A direct inversion of $\underline{G}$ in the case of $2N = M$ will not be considered any further because the solution $\underline{x} = \underline{G}^{-1} \cdot \underline{y}$ leaves no room for misfit residuals and is thereby unrealistic for error-bearing data. Instead a pseudo-inverse $\underline{H}$ of $\underline{G}$ will be used with dimensions $M \times 2N$. Applied to the data vector $\underline{y}$ the solution of eq. (13) becomes

$$\bar{\underline{x}} = \underline{H} \cdot \underline{y}. \quad (14)$$

The k -th components of thus obtained model vector $\bar{\underline{x}}$ represents in

$$\bar{x}_k = \sum_{m=1}^M a_{km} x_m \quad (15)$$

a certain average over layers which are adjacent to the *target* layer $m = k$, with $k = 1, 2, \dots, M$. The coefficients a_{km} are elements of a so-called $M \times M$ resolution matrix $\underline{A}$. Combining eq. (14) with eq. (15) in vector notations yields $\underline{H} \cdot \underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}$, and with $\underline{y} = \underline{G} \underline{x}$ we obtain $\underline{A} = \underline{H} \cdot \underline{G}$ and thus

$$a_{km} = \sum_{n=1}^{2N} h_{kn} g_{nm} \quad (16)$$

to express the resolution coefficients in terms of solution coefficients and data kernel. A similarly derived $2N \times 2N$ information density matrix $\underline{B} = \underline{G} \cdot \underline{H}$ connects in $\underline{y} = \underline{B} \cdot \underline{y}^{\text{mod}}$ the empirical and model responses. Both matrices can be thought to apply certain filter operations on model and data, as outlined in Appendix B.

When data of very unequal quality are involved and none of them is to be totally rejected, weights $s_0 / \Delta y_n$ can reduce the influence of bad data with large errors Δy_n , i.e. y_n is replaced by $y'_n = s_0 / \Delta y_n \cdot y_n$ and the data kernel g_{nm} by $g'_{nm} = s_0 / \Delta y_n \cdot g_{nm}$, for consistency, with a corresponding change of solution coefficients to h'_{kn} . All weighted data have now the same error s_0 , where $s_0 = 1$ is a common choice. We shall use the harmonic mean of the errors instead. Then with unity as mean weight, bad data receive weights below unity and good data those above unity, while preserving in s_0 an indicator for the errors of the original data. A further reason for using the harmonic mean will become transparent in Subsection 5.2.

Eq. (14) implies that the k-th component of the resolvable model vector is

$$\bar{x}_k = \sum_{n=1}^{2N} h_{kn} y_n \quad \text{or} \quad \bar{x}_k = \sum_{n=1}^{2N} h'_{kn} y'_n, \quad (17)$$

depending on whether original or weighted data are interpreted. It follows readily that the quadratic error or variance of $\bar{x}_k$ due to data errors is

$$\Delta \bar{x}_k^2 = \sum_n h_{kn}^2 \Delta y_n^2 \quad \text{or} \quad \Delta \bar{x}_k^2 = s_0^2 \sum_n h_{kn}'^2, \quad (18)$$

provided that the individual errors $\Delta y_{n\ell} = y_{n\ell} - y_n$ of the analysed time sections $\ell = 1, 2, \dots, L$ are independent in the sense that the sums of products $\Delta y_{n\ell} \cdot \Delta y_{\hat{n}\ell}$ over all sections are zero for $n \neq \hat{n}$.

For completeness we summarize the singular value decomposition of the data kernel matrix, which leads to the definition of its pseudo-inverse (cf. for example Kress, 1991; Section 5). Let $p \leq \min(M, 2N)$ be the maximum number of rows and columns of a non-singular quadratic matrix, which can be fitted into the rectangular matrix $\underline{\underline{G}}$, if necessary with a prior re-arrangement of rows and columns to maximize p . Let μ_j with $j = 1, 2, \dots, p$ denote the p positive eigenvalues of the eigenvalue problems $\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \underline{\underline{v}}_j = \mu_j \underline{\underline{v}}_j$ and $\underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{u}}_j = \mu_j \underline{\underline{u}}_j$, ordered according to size, and let the $M \times p$ matrix $\underline{\underline{V}}$ and the $2N \times p$ matrix $\underline{\underline{U}}$ be the modal matrices of eigenvectors $\underline{\underline{v}}_j$ and $\underline{\underline{u}}_j$, respectively. Then the singular value decomposition of the data kernel is $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{V}}^T$, yielding in $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \underline{\underline{U}}^T$ its pseudo-inverse, where $\underline{\underline{\Lambda}}$ is a diagonal $p \times p$ matrix containing the so-called *singular values* $\lambda_j = +\sqrt{\mu_j}$ as elements.

The thus obtained pseudo-inverse does not provide, however, a realistic solution in our context because eigenvalues up to $j = \min(M, 2N)$ are never exactly zero, even though they might be very small. Assuming then $p = \min(M, 2N)$, we obtain least squares or minimum-norm solutions of purely over-determined or under-determined linear systems. They are Gauss' least squares solution

$$\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{G}}^T \quad (19)$$

for $p = M < 2N$, which minimizes $\underline{\underline{\delta y}}^T \underline{\underline{\delta y}}$ for the best possible fit between empirical and modelled responses, and the minimum-norm solution

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{G}}^T (\underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^T)^{-1} \quad (20)$$

for $p = 2N < M$, which minimizes $\underline{\underline{\bar{x}}}^T \underline{\underline{\bar{x}}}$ giving the least rugged model. The first pseudo-inverse yields a perfectly resolved model with $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}_M$, the second provides a model which perfectly explains the data with $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}}_{2N}$. But as a rule, the normal equation matrix $\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}$ or $\underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^T$ is ill-conditioned for inversion. The resulting models are thus very sensitive against

data errors and the often extreme changes of resistivity from layer create convergence problems for the iterative process.

The thereby expressed adverse effect of small eigenvalues can be avoided by adding a damping factor γ_j to the reciprocals of λ_j . The choice of Tikhonov's $\gamma_j = \lambda_j^2 / (\alpha + \lambda_j^2)$, with $\alpha > 0$, and thereby the replacement of $\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$ by $(\alpha \underline{\underline{I}}_{p \times p} + \underline{\underline{\Lambda}}^2)^{-1} \underline{\underline{\Lambda}}$ in the singular value decomposition of $\underline{\underline{H}}$, eliminates the need for decomposition altogether, leading to the thus defined regularized least squares and minimum-norm solutions

$$\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} + \alpha \underline{\underline{I}}_M)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \quad (21)$$

and

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{G}}^T (\underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^T + \alpha \underline{\underline{I}}_N)^{-1} . \quad (22)$$

They neither minimize the model misfit nor the model norm anymore. Furthermore, none of the matrices $\underline{\underline{A}}$ or $\underline{\underline{B}}$ remains unitary and the resulting model is less resolved than without regularisation. But model oscillations are suppressed and model errors reduced. The identity

$$(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} + \alpha \underline{\underline{I}}_M) \cdot \underline{\underline{G}}^T = \underline{\underline{G}}^T \cdot (\underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^T + \alpha \underline{\underline{I}}_N),$$

when multiplied with $(\underline{\underline{G}} \underline{\underline{G}}^T + \dots)^{-1}$ from the right and then with $(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} + \dots)^{-1}$ from the left shows that for $\alpha > 0$ the solution matrices $\underline{\underline{H}}$ in eqs (21) and (22) are identical. They are presented here separately only to illuminate their connection to the pseudo-inverses without regularisation. The regularisation parameter α could be chosen, for example in the way that the iterations converge toward a model structure which appears as significant in terms of errors. We shall use a different approach, however, and shall use α to constrain either the model norm or the misfit residual norm.

4 The preparation and conduct of 1D model interpretations

4.1 Consistency test

Before entering into details about the actual procedures of model construction, a number of points have to be considered. First of all the data set may be at least partially inconsistent with the intended interpretation, i. e. no layered model exists which could reproduce it completely. If the causes are large random errors, still a smoothed-out model can be derived by regularization. But in the case of well determined estimates, regularisation is no substitute for the then possibly required interpretation with multi-dimensional models. Weidelt's inequalities (1972, eqs 2.30-2.34) provide straightforward tests for consistency. The constraints for phases, in $0 \leq \varphi(\omega_n) \leq \pi/2$, and for the slope of apparent resistivity curves, in $|d(\ln \rho_a)/d(\ln T_n)| \leq 1$ with period $T_n = 2\pi/\omega_n$, are rather weak and rarely violated. More stringent is the condition for the real part of the C-response $z^*(\omega_n) = \text{Re}\{C(\omega_n)\}$ as indicator for the depth of penetration. In $dz^*/dT_n \geq 0$ this condition implies that penetration depths may not decrease, when periods increase. Violations are readily detected, for example, in the

form of loops in ρ^*-z^* presentations of the data. Other not so easily detectable violations concern condition for the first and second derivatives of the complex-valued C-response. Guidelines for their implementations can be found in Weidelt (1986).

4.2 Static shifts of magneto-telluric apparent resistivities

Otherwise well determined magneto-telluric data are distorted frequently by near-surface anomalies. But they may remain consistent with 1D models, separately for the two polarisation of the magnetic field, provided that the distortion is quasi-static and the surrounding regional structure 1-dimensional. The second condition can be tested with a dimensionality study of the impedance tensor. It may show that at least a limited period range exists, within which 1D modelling towards the regional structure is justified (e.g. Bibby et al., 2005; Fig.6). There is no need to remove the distortion prior to the interpretation. Quasi-static distortion means that within the allowed period range apparent resistivities for the off-diagonal elements of the impedance tensor are multiplied with unknown shift-factors g with respect to their undistorted values, with different factors for the two polarisations. In our data definition according to eq. (8) static shift merely implies that $\ln(g)$ is added to the real parts of y_n , which is equivalent to changing the scaling resistivity ρ_0 to a different value $\rho'_0 = \rho_0 / g$. As shown in Appendix B this has no effect upon the modelling results, provided d' is changed to $d'' = d' \cdot \sqrt{\rho_0 / \rho'_0}$. Hence, an interpretation of apparent resistivities for the two polarisations as they are, alone or together with phases, yields two separate, but presumably similar models for the regional structure, even though without absolute scaling for depth and resistivity. When the shift factors were somehow known, then multiplying depths with $\sqrt{1/g}$ and subtracting $\ln(g)$ from $\ln(\rho_m / \rho_0)$ would provide also absolute scaling.

4.3 The choice of the regularisation parameter

Except for rare cases 1D interpretations require regularisation, and the problem arises which regularisation parameter α to chose. When a singular value decomposition of the data kernel matrix has been performed and thus the range of eigenvalues is known, α can be chosen in order to dampen effectively the influence of small eigenvalues. Otherwise the choice is quite arbitrarily and, for example, α could be given a large enough value that the iterative process for finding a model converges. Here we shall adopt, however, a different *target-oriented* approach by constraining either the model norm or the misfit norm. Thus either $|\underline{\bar{x}}|^2$ or $|\underline{\bar{y}}|^2$ should match a pre-set constraining constant c . The interpretations are started then with an arbitrarily chosen value α_0 . Using Newton's method the interpretation is repeated with $\alpha_1 = \alpha_0 - (s - c) \cdot (\partial s / \partial \alpha)^{-1}$, where s denotes one of the squared norms. Appendix C shows how to calculate the differential quotient $\partial s / \partial \alpha$. Interpretations are carried out with the thus updated value α_1 , and they are repeated until the target $s = c$ is reached.

4.4 The choice of the layer thickness d'

For a successful 1D interpretation it is essential to subdivide the model $\rho(z')$ in an optimal manner into layers of constant thickness d' , particularly when sparsely subdivided models

with few layers are considered. Ideally the penetration depths $z^* = \text{Re}(C)$ of the responses should fit evenly into the range from $z' = 0$ to $z' = M \cdot d'$. But the transfer of z^* into z' -depths would involve the not yet known resistivities. Therefore the following pragmatic procedure has been adopted: For given values of M and α , a starting value for d' is chosen which is definitely too small. Thus, the iterative process will derail after a few iterations because changing model parameter of excessive size violate the assumption of only weakly model-dependent data kernels. The calculations are repeated with a gradually increased d' until iterations start to converge and continued until divergence sets in again. Within the range of convergence $|\delta y|^2$ will have a more or less well developed minimum, and the value of d' , where this minimum occurs, will be regarded as optimal. The whole procedure is repeated with changing regularisation parameter, when pursuing the above stated target. The remaining problem how to find the right number of layers is postponed until Subsection 4.6.

4.5 The divergence problem

Divergence of the iterative process occurs when interpreting inconsistent or poorly determined response estimates, also for an improperly chosen layer thickness d' . In either case model parameter of excessive and rapidly changing size overstrain the basic concept of the chosen form of linearization that data kernels should not change much from one iteration to the next. Hence, iterations should be stopped, when $|x_m|$ in any layer exceeds a certain limit. With 6.9 as limit, for example, ρ_m / ρ_0 may vary over six orders of magnitude. In principle divergence could be overcome by limitless regularisation. But the result would be flattened out models of little meaning.

4.6 The derivation of sparsely subdivided models

We are ready now to turn to the actual conduct of 1D interpretations, for which two principal options exist. When the fit of model responses to empirical responses has first priority, then with $M < 2N$ the pseudo-inverse of eq. (21) for an over-determined linear system represents the right choice because it minimizes in $|\delta y|^2$ the model misfit norm. Mostly no regularisation or only a modest regularisation is required to ensure convergence. As a consequence sparsely subdivided models are always well resolved. In cases where regularisation is needed, the regularisation parameter α is used to control the model norm with the condition $|\underline{x}|^2 = c$. Since this norm is determined mainly by the largest positive or negative model parameter, a choice of, say, $c = 6.9^2$ allows ρ_m / ρ_0 to vary over roughly three orders of magnitude.

In view of the limited number layers the optimal choice for the layer thickness d' is critical and the constraint placed on layer thicknesses should be relaxed as described in the context of eq. (2). For deciding on the right value of M , misfit residuals are derived for an increasing number of layers, using each time the optimal choice for d' . Starting with very few layers, the residuals will gradually become smaller as the number of layers grows and as soon as this decline levels off the optimal number of layers is reached. Near this limit also more than one minimum of $|\delta y|$ can appear, indicating the existence of equivalent models with the best resolution either at shallow or at great depth. Models with a limited number of layers may or may not resemble reality. They can be appropriate in the case of geological strata with different resistivities and sharp boundaries, or for an Earth's mantle, in which resistivity is controlled by phase transitions rather than by a gradually changing temperature.

4.7 The derivation of finely subdivided models

When smoothness of a quasi-continuous model has the first priority, the minimum-norm solution of an under-determined linear system with $2N < M$ will be appropriate according to eq. (22). It is then preferable to use as model parameter not the logarithmic resistivity itself, but its logarithmic change from layer to layer. Thus we change from model parameter x_m to model parameter u_m of eq. (10) with a concurrent change of the data kernel from g_{nm} to $\hat{g}_{nm}$. Once the new model parameter and their errors have been found, models in terms of logarithmic resistivities and their errors follow from

$$\bar{x}_k = \sum_{\ell=1}^k \bar{u}_\ell \quad \text{and} \quad \Delta \bar{x}_k = \sum_{\ell=1}^k \Delta \bar{u}_\ell. \quad (23)$$

Regularisation is now always required, while controlling with the regularisation parameter the misfit norm. Since the data should be neither under-interpreted nor over-interpreted, the appropriate condition to be satisfied is $|\underline{\delta y}|^2 = \sum_n \Delta y_n^2$. If weighted data $y'_n = s_0 / \Delta y_n \cdot y_n$ are interpreted, the condition simplifies to $|\underline{\delta y'}|^2 = 2N \cdot s_0^2$. When data errors have been underestimated or when data with well determined errors are inconsistent with 1D models, it may not be possible to lower the squared misfit norm to the desired level, and the condition has to be relaxed to $|\underline{\delta y'}|^2 = q 2N \cdot s_0^2$, where $q > 1$ is some properly chosen constant.

With $M > 2N$ there exists no upper limit for the number of layers, but increasing it beyond any reasonable limit does not improve resolution which always should be taken into consideration. Hence, it suffices to select M as to give the model a quasi-continuous appearance, while the selection of a suitable thickness d' is not any longer critical.

In the limit of a truly continuous model, with $d' \rightarrow dz'$ and $u_m = x_m - x_{m-1} \rightarrow dx(z')/dz'$ for $M \rightarrow \infty$, the minimum-norm solution minimizes in $|dx/dz'|^2$ the derivatives of the logarithmic resistivity with respect to the conductivity-weighted depth z' . Translated into true depth with $dz' = \sqrt{\rho_0 / \rho(z)} dz$ according to eq. (1), the minimized squared model norm is $|\sqrt{\rho / \rho_0} \rho^{-1} d\rho / dz|^2$. In this sense the finely subdivided models belong to the class of minimum gradient models. Constable et al. (1987) introduced the denomination of *Occam-models*, when they are derived with a minimum of assumptions and thus with the smallest measure of arbitrariness. In our understanding not only the finely subdivided models should be regarded as Occam-models, but also the sparsely subdivided models, when as outlined the number of layers as well as the position of layer boundaries is required by the data.

5 Resolution and model accuracy

So far we have used *global* criteria when deriving models, i.e. the misfit norm involves the residuals of *all* frequencies and the model norm the model parameter of *all* layers. In contrast resolution and accuracy represent *local* criteria because they concern modelling result only for a specified target layer $m = k$ or target depth z'_k . Even though it would be possible to derive for this layer or depth a best resolved or best determined model or a combination of both, this will not be our primary goal. Instead we seek to formulate solutions, which when applied to

hypothetical data with *hypothetical* errors would yield a *hypothetical* model in accordance with the just described local criteria.

5.1 Models with the best possible resolution

The first task is to define a measure for resolution, which when brought to a minimum provides the best achievable resolution for a given target layer or target depth. We consider two options. The first measure, here defined for discrete models, is

$$D_k = \sum_m (a_{km} - \delta_{km})^2, \quad (24)$$

with $\delta_{km} = 1$ for $k = m$ and zero otherwise. This measure approaches zero, when for perfect resolution $a_{km} \rightarrow \delta_{km}$. The second measure is an averaging length

$$\Delta_k = \sum_m a_{km}^2 J_{km}, \quad (25)$$

again in the formulation for discrete models. This second measure is the key element of the Backus & Gilbert (B&G) theory, in which Δ_k indicates the width or *spread* of the depth range, over which the model is averaged (cf. for example Schmucker & Weidelt, 1975; Section 6.1 or Parker, 1996; Section 4.02). In eq. (25) it is defined as a dimensionless number for a spread in units of d' . The factor J_{km} involves the squared distance $|m - k|$ between the m -th layer and the target layer in order to bring the resolution coefficients a_{km} as closely as possible to those for a perfect resolution.

We start with the problem to find the minimum of D_k and return for a moment to the singular value decomposition. We note that in $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}}\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{V}}\underline{\underline{V}}^T$ a connection is established between resolution and the eigenvectors $\underline{v}_j$. Utilizing their orthogonality, we expand the rows of $\underline{\underline{A}}$ in terms of the components of $\underline{v}_j$ and seek expansion coefficients β_{kj} in $a_{km} = \sum_{j=1}^p \beta_{kj} v_{mj}$ which minimize D_k . Setting the derivatives of D_k with respect to β_{kj} for $j = \hat{j}$ to zero gives

$$\frac{\partial D_k}{\partial \beta_{k\hat{j}}} = 2 \sum_m \left\{ \sum_j \beta_{kj} v_{mj} - \delta_{km} \right\} v_{m\hat{j}} = 0,$$

which with $\sum_m v_{mj} v_{m\hat{j}} = \delta_{j\hat{j}}$ reduces to $2(\beta_{k\hat{j}} - v_{k\hat{j}}) = 0$ or $\beta_{k\hat{j}} = v_{k\hat{j}}$. The resulting coefficients $a_{km} = \sum_m v_{kj} v_{mj}$ are readily identified as the elements of the matrix product $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}\underline{\underline{V}}^T$ in the k -th row and m -th column. This shows that any pseudo-inverse leads to a solution of minimum D_k and in this sense to models of maximum resolution, regardless of other minimizing criteria. The least squares solution of eq. (19) has to be exempted, since it implies $D_k = 0$.

For reasons which will become transparent soon, we turn to an alternative way to minimize D_k by substituting the resolution coefficients a_{km} in eq. (24) according to eq. (16).

Proceeding as before, now with derivatives towards the solution coefficients h_{kn} at $n = \hat{n}$, we obtain

$$\frac{\partial D_k}{\partial h_{k\hat{n}}} = 2 \sum_m (\sum_n (h_{kn} g_{nm} - \delta_{km}) \cdot g_{\hat{n}m}) = 0 ,$$

for $\hat{n} = 1, 2, \dots, 2N$. After division by two and after changing the sequence of summations the resulting minimum condition for D_k is

$$\sum_n h_{kn} \sum_m g_{nm} g_{\hat{n}m} - g_{\hat{n}k} = 0 . \quad (26)$$

We identify the sum over m readily as the element of the matrix product $\underline{G} \underline{G}^T$, as it appears in eq. (20), for the n -th row and $\hat{n}$ -th column. Rewriting this equation in the form $\underline{H} \underline{G} \underline{G}^T = \underline{G}^T$, the explicit expression for the k -th row reproduces eq. (26) in

$$\sum_n h_{kn} \sum_m g_{nm} g_{\hat{n}m} = g_{\hat{n}k} .$$

This verifies the conclusion from above for the special case of an un-regularized minimum norm solution which fully explains the data.

The B&G theory is based on the same preposition that a model exists which can reproduce the data without misfit residual. Substituting then in eq. (25) the coefficients a_{km} again with the aid of eq. (16), the minimum of the spread is found by differentiation of Δ_k towards h_{kn} for

$$n = \hat{n}, \text{ leading to } \frac{\partial \Delta_k}{\partial h_{k\hat{n}}} = 2 \sum_m \sum_n h_{kn} g_{nm} g_{\hat{n}m} J_{km} = 0 \text{ or}$$

$$\sum_n h_{kn} \sum_m g_{nm} g_{\hat{n}m} J_{km} = 0 \quad (27)$$

for $\hat{n} = 1, 2, \dots, 2N$. We note that except for the added factor J_{km} and zero right-and-sides, the minimum condition of the spread corresponds to the minimum condition for D_k in eq. (26).

In order to obtain a system of inhomogeneous equations, B&G add the condition $\sum_m a_{km} = 1$ similar to the constraint applied to numerical filters. Thus when the model is uniform with x_m equal to some constant x_c , the averaged model parameter $\bar{x}_k = x_c \sum_m a_{km}$ is correctly x_c .

We regard now the model $x(z') = \ln\{\rho(z')/\rho_0\}$ to be a continuous function of depth z' , thereby following the B&G theory in its original formulation. But since we continue with discrete data, eq. (17) remains valid, now yielding averages $\bar{x}_k$ of $x(z')$ for a specified target depth z'_k . With $d' \rightarrow dz'$, $g_{nm} \rightarrow G_n(z') dz'$ and $a_{km} \rightarrow A_k(z') dz'$ we replace eq. (7) in real notations by

$$y_n = \int_0^\infty G_n(z') x(z') dz' , \quad (28)$$

without allowance for a misfit residual. Furthermore

$$\bar{x}_k = \int_0^\infty A_k(z') dz' \quad \text{and} \quad A_k(z') = \sum_n h_{kn} G_n(z') \quad (29)$$

take the place of eqs (15) and (16), with $\int_0^\infty A_k(z') dz' = 1$ as condition for the now continuous resolution function $A_k(z')$. The definition of the spread is changed in correspondence to eq. (25) to

$$\Delta_k = \int_0^\infty \{A_k(z')\}^2 J_k(z') dz' \quad (30)$$

and the minimum condition of eq. (27) for the spread to

$$\sum_n h_{kn} \int_0^\infty G_n(z') G_{\hat{n}}(z') J_k(z') dz' = 0. \quad (31)$$

It is not intended to conduct an iterative process, in which the data kernel $G_n(z')$ is adapted iteratively to a sequence of model approximations. Therefore we shall use here exclusively the model-independent approximation

$$G_n^{(0)} = 2\alpha_n \exp(2\alpha_n z') \quad (32)$$

as it follows readily from eq. (6), here with its real part for $n \leq N$ and its imaginary part for $n > N$, noting that the data kernel as well as the resolution functions are now dimensioned quantities. Evaluation of the condition for $A_k(z')$ with this approximation gives with the aid of eq. (29)

$$\int_0^\infty A_k(z') dz' = \sum_n h_{kn} \int_0^\infty G_n^{(0)} dz' = \sum_n h_{kn} = 1 \quad (33)$$

after changing the sequence of integration and summation. In the case of layered models the sum $\sum_m g_{nm}$ over the data kernels is always unity, as shown in Appendix B, whether or not they are approximated, leading in

$$\sum_m a_{km} = \sum_n h_{kn} \sum_m g_{nm} = \sum_n h_{kn} = 1 \quad (34)$$

to the same result. Differentiation of these conditions with respect to h_{kn} for $n = \hat{n}$ gives unity and thus the term to be added to the minimum conditions in eqs (27) and (31) is solely a Lagrange multiplier λ_k . Thus altogether we have $2N+1$ linear equations for the same number of unknowns, $2N$ solution coefficients h_{kn} and one Lagrange multiplier. These equations are

$$\sum_n h_{kn} b_{n\hat{n}} + \lambda_k = 0 \quad \text{for } \hat{n} = 1, 2, \dots, 2N \quad \text{and} \quad \sum_n h_{kn} = 1 \quad (35)$$

with

$$b_{n\hat{n}} = d' \sum_m g_{nm} g_{\hat{n}m} J_{km} \quad \text{or} \quad b_{n\hat{n}} = \int_0^\infty G_n(z') G_{\hat{n}}(z') J_k(z') dz'.$$

In the case of a discrete model the layer thickness d' has been added as a factor to obtain in either case a dimensioned spread. In the case of a continuous model the integral can be solved analytically with the model-independent approximation $G_n^{(0)}$ from eq. (32), while for discrete models we can use either the approximation $g_{nm}^{(0)}$ of eq. (6) or the exact data kernel for a preconceived model.

It remains to decide upon the factors J_{km} and $J_k(z')$. The B&G theory recommends to use the quadratic form $J_k(z') = c \cdot (z' - z'_k)^2$, whereas a suitable value for the constant c is obtained as follows: Suppose we have a delta-shaped resolution function, which is zero outside a small depth range of width $\Delta z'$ and inside this range $1/\Delta z'$ to meet the condition for $A_k(z')$. It is then reasonable to require that Δ_k equals $\Delta z'$ which yields $c = 12$. Translated to the discrete case the requirement is that the dimensioned Δ_k should be equal to the layer thickness d' , which leads to $J_{km} = 1 + 12 \cdot (m - k)^2$.

The system of linear equations can be solved with standard methods and obviously the solution has to be repeated for each chosen target layer or target depth, even though the factors J_{km} and $J_k(z')$ are the only quantities, which vary. Numerical stability should be of no concern. EM responses which are suitable for a 1D interpretation cover rarely more than one or two decades in frequency, with ten estimates per decade at the most. Once the $2N$ solution coefficients h_{kn} and the Lagrange multiplier have been found, an averaged model parameter could be derived according to eq. (17). But unless exact data kernels for a preconceived model have been used to determine the coefficients $b_{n\hat{n}}$ in eq. (35), such models are of limited value unless they would provide a starting model for a here not intended iterative process. Much more relevant are the model variances as provided by eq. (18). There is no need to calculate the spread Δ_k from its respective definition because, as shown in Appendix D, it is identical with the Lagrange multiplier except for the sign.

Turning now to the resolution, we have to distinguish between continuous and discrete models. In the second case resolution coefficients are readily determined according to eq. (16). For continuous models we subdivide the model space into M depths segments of equal width $\Delta z'$, which is small enough to approximate the resolution function sufficiently well, while M should be large enough to allow a fairly complete display of this function, which tends to zero with increasing downward distance from the target depth. For each depth segment we define now a mean value of the data kernel

$$\bar{G}_{nm} = \frac{1}{\Delta z'} \int_{z'_m - \Delta z'/2}^{z'_m + \Delta z'/2} G_n(z') dz'$$

with z'_m again as the depth of the centre of the m -th depth segment, and the integration can be carried analytically with the approximated data kernel of eq. (32), Then a corresponding mean value of the resolution function follows from eq. (29) as

$$\bar{A}_{km} = \sum_n h_{kn} \bar{G}_{nm}, \quad (36)$$

which is the equivalent of a_{km}/d' for layered models.

5.2 Models with the smallest possible variance

The determination of models of minimum variance $\Delta\bar{x}_k^2$ is a quite simple matter. Assuming that all data have the same error s_0 , the differentiation of the relevant eq. (18) with respect to h_{kn} for $n = \hat{n}$ gives

$$2s_0^2 h_{k\hat{n}} + \lambda_k = 0 \quad \text{for } \hat{n} = 1, 2, \dots, 2N, \quad (37)$$

which implies that the solution coefficients are the same for all $\hat{n}$ and, in view of eqs (33) and (34), we obtain $h_{kn} = 1/2N$. This leads in a straightforward manner to the minimum value of the model variance

$$\Delta\bar{x}_k^2 = s_0^2 / 2N, \quad (38)$$

the same for all target layers or target depths, which reflects in $\Delta\bar{x}_k = s_0 / \sqrt{2N}$ the propagation law of errors. The determination of the not so easily found spread Δ_k is dealt with separately in Appendix D. It is readily seen that eq. (38) remains valid for a data set with non-zero variable errors Δy_n , when we insert for s_0 their harmonic mean $2N / \sum_n \Delta y_n^{-1}$.

5.3 Trade-off models between resolution and accuracy

Model resolution and model accuracy are conflicting criteria, when data errors are taken into account, i. e. when a well resolved model cannot be very exact at the same time, and vice versa. In fact models for minimum spread Δ_k are models with the greatest variance $\Delta\bar{x}_k^2$, and again vice versa. The B&G theory employs therefore a dimensionless trade-off parameter w in $[0,1]$ and seeks now the minimum of a linear combination of spread and variance, with $w=1$ for minimum spread and $w=0$ for minimum variance. Combining then eqs (35) and (37), the $2N+1$ linear equations to be solved for $w > 0$ are

$$w \sum_n h_{kn} b_{n\hat{n}} + (1-w) s_0^2 h_{k\hat{n}} + \lambda_k = 0 \quad \text{for } \hat{n} = 1, 2, \dots, 2N \quad \text{and} \quad \sum_n h_{kn} = 1. \quad (39)$$

We can proceed as in Subsection 5.1 to determine the model variance and the resolution coefficients, while Δ_k follows now from a combination of the Lagrange multiplier and the model variance, as shown again in Appendix D.

A visual display of this balanced interpretation is provided by so-called trade-off curves, which for a selected target layer or target depth show $\Delta\bar{x}_k$ in dependence of Δ_k , with w as curve parameter decreasing from unity to zero. These curves start at $w=1$ for the best possible resolution, associated with maximum and unacceptable modelling errors, and all curves merge at $w=0$ into the same minimum model error according to eq. (38), associated with a maximum and equally unacceptable spread. Very instructive are displays of trade-off curves for a sequence of target depths to visualize the decrease of resolution with increasing depth (cf. Fig. 6). They demonstrate also that a small sacrifice in resolution reduces modelling errors dramatically. Otherwise no fixed rules exist how to select an optimal trade-off parameter. A possible choice will be presented in connection with Fig. 4.

6 Demonstrations and comments to the figures

6.1 1D model interpretations with the six harmonics of daily variations

The various methods to derive models and to consider their resolution will be applied now to sets of empirical and hypothetical EM responses. We shall start with those for the six harmonics of daily variations. These are C-responses, obtained with the gradient method for the observatory Fuerstenfeldbruck in Southern Germany (cf. the contribution “Ein Kontinent erwacht” in this volume). They are converted into data y_n according to eq. (8). The scaling resistivity is set to $\rho_0 = 70\Omega\text{m}$, and thereby conductivity-weighted (z') and true depths (z) will not be too different within the first few hundreds kilometres below the Earth's surface. Penetration depths $z^* = \text{Re}(C)$ reach from 332 km for the sixth harmonic ($T=4$ hrs) to 660 km for the first harmonic ($T=24$ hrs), thus setting the frame for constructing models. For completeness the following table includes also apparent resistivities ρ_a and ρ^* as well as phases φ . With $\varphi > \pi/4$ throughout the formula $\rho^* = 2\omega\mu_0 \text{Im}(C)^2 = 2\rho_a \cdot \cos^2\varphi$ applies. The decline of ρ^* from close to $100\Omega\text{m}$ for the sixth harmonic to about $4\Omega\text{m}$ for the first harmonic indicates the range of model resistivities which to expect. Numbers below the tabular entries are errors at the 95% confidence level.

Period	C-response	App. Resistivity ρ_a & ρ^*		Phase φ	Logarithmic response
24 hrs	660 – 151i km (17)	41.9 Ωm (2.2)	4.2 Ωm (0.9)	77.1 degr (1.4)	$y_1 = -0.513 + 1.121i$ (0.052)
12 hrs	546 – 251i (13)	66.0 (2.9)	23.0 (2.4)	65.3 (1.2)	$y_2 = -0.058 + 0.709i$ (0.043)
8 hrs	463 – 244i (16)	75.1 (4.6)	32.6 (4.3)	62.2 (1.8)	$y_3 = +0.070 + 0.601i$ (0.061)
6 hrs	393 – 244i (26)	78.2 (8.8)	43.5 (9.3)	58.2 (3.2)	$y_4 = +0.111 + 0.460i$ (0.112)
4.8 hrs	386 – 257i (53)	98.3 (22.5)	60.4 (24.9)	56.3 (6.6)	$y_5 = +0.339 + 0.396i$ (0.229)
4 hrs	332 – 276i (62)	102.2 (29.4)	83.5 (37.5)	50.3 (8.2)	$y_6 = +0.378 + 0.184i$ (0.287)

The monotonic increase of penetration depths with increasing period as well as the smooth change of ρ^* with period suggests that the data are consistent with 1D models. **Figs 1** and **2** present four equivalent models of different design, including their errors. The models to the left are sparsely subdivided and the models to the right finely subdivided, with the objectives

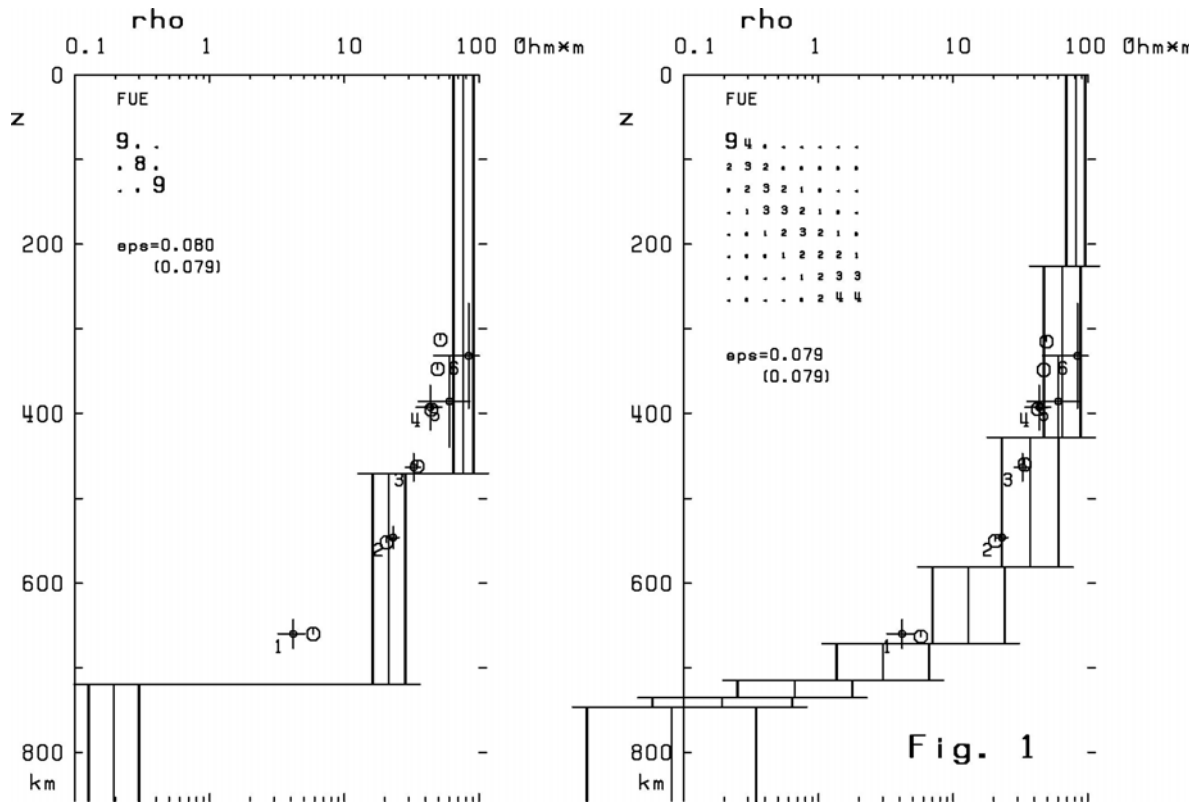


Fig. 1

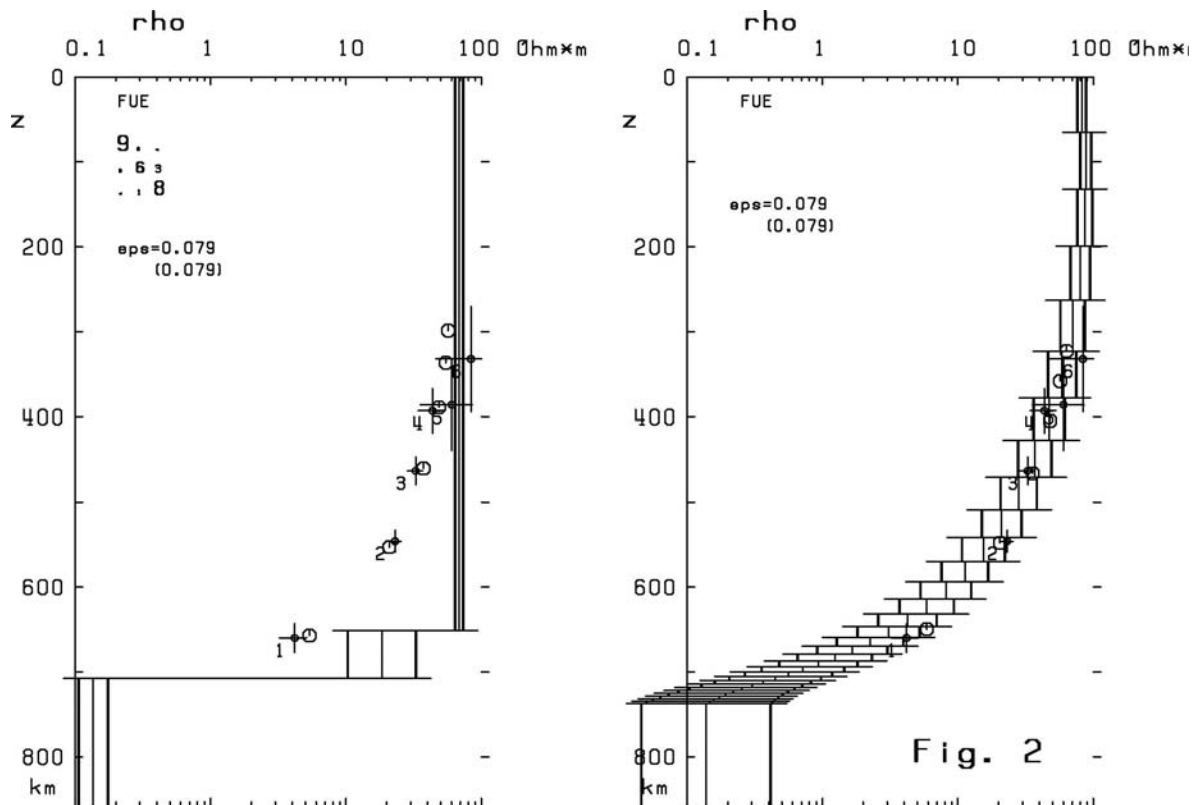


Fig. 2

as outlined in Subsection 4.6 and 4.7. It has been found that in the first case three layers are sufficient to account for the empirical estimates. An increase to more layers would not improve the model fit, while the best fitting 2-layer model has substantially greater misfit residuals, recalling that these are least squares models directed towards the best fitting model.

In Fig.1 layer boundaries are in accordance with eq. (2), i. e. the ratio $d_m / \sqrt{\rho_m}$ is kept constant, in Fig.2 they have been optimized with layer weights according to eq. (3), without reducing however the misfit residuals to any significant extent, as it will be seen. Both 3-layer models show step-wise reductions of resistivity from 90 Ω m at the top to 0.1-0.2 Ω m below 700 km depth, where the underlying uniform substratum begins, but in the model with variable layer weights the decline occurs in a narrow depth range between 650 and 700 km. In either case very moderate regularisation is required to ensure convergence of the iterative process, and the regularisation parameter α has been adjusted to limit layer resistivities to three orders of magnitude.

The models on the right are regularized minimum norm models with up to 32 layers. They provide the expected smoothed image of the 3-layer models, moving also the steep ascent downward to a fairly narrow depth range beneath a rather structure-less upper mantel. Furthermore, the increase from eight to 32 layers does not reveal any additional structural details except for a marginally significant intermediate maximum of ρ beneath the top layer.

Small full circles with error bars in the displays are the six empirical responses in a ρ^*-z^* presentation, and the large open circles without error bars are the ρ^*-z^* values for the model at the same frequency, thus visualizing in one single illustration the degree of fit between empirical and model responses together with the model itself. Numbers below to the left indicate the harmonics and thus frequencies in cycles per day (cpd). The arrays of numbers in the upper left corner represent resolution matrices $\underline{A}$. As a visual aid coefficients $a_{km} \geq 0.9$ are shown as bold-faced large numbers **9**. With decreasing size of the coefficients numbers get thinner and smaller until they become very small and faint zeroes for $a_{km} < 0.1$. These arrays verify that the sparsely subdivided models are indeed well resolved. Top layer and substratum show an almost perfect resolution, while for the second layer between 60 and 80 % of the shown model resistivity come from the true resistivity of this layer itself. In the 8-layer model also the top layer and to some extent the substratum appear as well resolved, while for the layers in-between 70-80% of the displayed model resistivities arise from true resistivities in the target layer and the two layers next to it, leaving 20-30% for contributions from a greater distance. Since it would be impossible to present in the same way the resolution matrix of a 32-layer model, it will be shown separately in Figs 5 and 6, even though for two target depths only.

The two numbers below the resolution matrices are the rms misfit residual ε_{mod} and, in parenthesis, the rms data error ε_{dat} :

$$\varepsilon_{\text{mod}} = \sqrt{\sum_n |\delta y_n|^2 / 2N} \quad \text{and} \quad \varepsilon_{\text{dat}} = \sqrt{\sum_n \Delta y_n^2 / 2N} \quad (40)$$

or $\varepsilon_{\text{dat}} = s_0$, when weighted data have been interpreted as it is done here. With $\Delta y = 2 \cdot \Delta C / |C| = \Delta \rho_a / \rho_a$ an rms data error of 0.079 implies that the responses have been determined with accuracies of about 8% for ρ_a and 4% for $|C|$, while an rms misfit residual of the same size means that model responses account for 92% of ρ_a and for 96% of $|C|$. The intentional exact agreement of ε_{mod} and ε_{dat} has been achieved by adjusting the regularisation parameter α accordingly. A better model fit could have been easily obtained by less

regularisation, leading to a more structured model, but then with a model misfit below the level of data errors.

We conclude that all four models explain the data equally well, and it is not possible to say, which one conforms better to reality. They may be regarded as uniquely determined models within their specified frame of construction. There will exist, for example, no other 8-layer or 32-layer regularized minimum norm model, in terms of logarithmic resistivity changes from layer to layer, which could produce also equality of ε_{mod} and ε_{dat} , and with $M \rightarrow \infty$ an equally unique continuous minimum gradient model in terms of $|\sqrt{\rho/\rho_0} \rho^{-1} d\rho/dz|^2$ would evolve.

6.2 Resolution curves for 1D models obtained from hypothetical EM responses

We shall investigate now the resolving power of EM responses quite generally, that is in terms of the data kernels for the frequencies involved and without specifying any particular data set or model. Depending on whether we assume the hypothetical models to be continuous or discrete, either mean values $\bar{A}_{km}$ of the resolution functions $A_k(z')$ or ratios a_{km}/d' are plotted versus depth $z' = z'_m$ which is the depth of the centre of the m -th depth segment, to which these resolution measures belong. All segments have the same thickness $\Delta z'$ and, when discrete models are considered, they extend uniformly downward to $M d z' = 1920$ km depth. Unless stated otherwise all calculations are carried out with model-independent approximate data kernels $G_n^{(0)}(z')$ and $g_{nm}^{(0)}$ according to eqs (32) and (6), while $\Delta z'$ is chosen to produce a sufficiently smooth appearance of the resulting resolution curves to approximate $A_k(z')$. They are shown for two exemplary target depths z'_k . For reasons which will become transparent soon, we shall use as target depths 270 km for the upper part of the hypothetical models and 570 km for their lower part. Areas below the resolution curves are unity or at least close to unity.

We start with considering the resolution, which can be achieved with the six harmonics of daily variations. **Fig. 3** on the left shows the resolution coefficients for a discrete minimum norm model *without* regularisation, i. e. eqs (26) have been solved towards solution coefficients h_{kn} which when inserted into eq. (16) yield the displayed ratios a_{km}/d' for $d' = 20$ km. They are compared on the right with mean values $\bar{A}_{km}$ for a continuous minimum spread model, deriving this time the solution coefficients from eqs (35) and subsequently the mean values from eq. (36). Arrows mark the respective target depth and the number below in parenthesis gives the spread in kilometres as derived from eq. (D3). In both cases we assume error-free data.

As it may have been expected, the minimum norm model has the best resolution, but on the expense of prominent negative side lobes. Since a severely under-determined system of linear equations has been solved, with $N = 12$ data against $M = 1920/20 = 96$ unknowns, the resulting presumably strongly oscillating model would be unrealistic anyhow. The minimum spread model has a substantially lower resolution at target depth, but no negative side lobes appear, even though there exist small oscillations near to the surface and at great downward distances from the target depth. But the resulting B&G model would be quite realistic and sufficiently stable against data errors, as it will be demonstrated in the next illustration. It should be noted that Fig. 3 shows the highest resolution which can be achieved with six

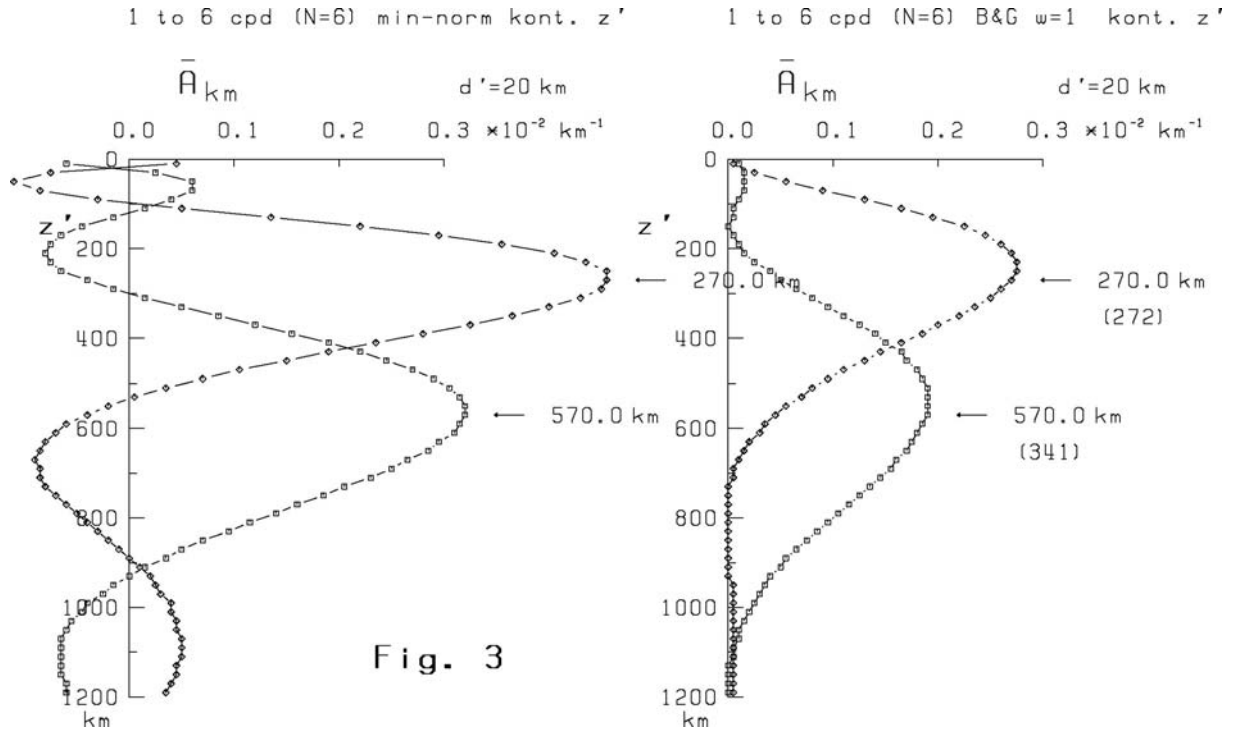


Fig. 3

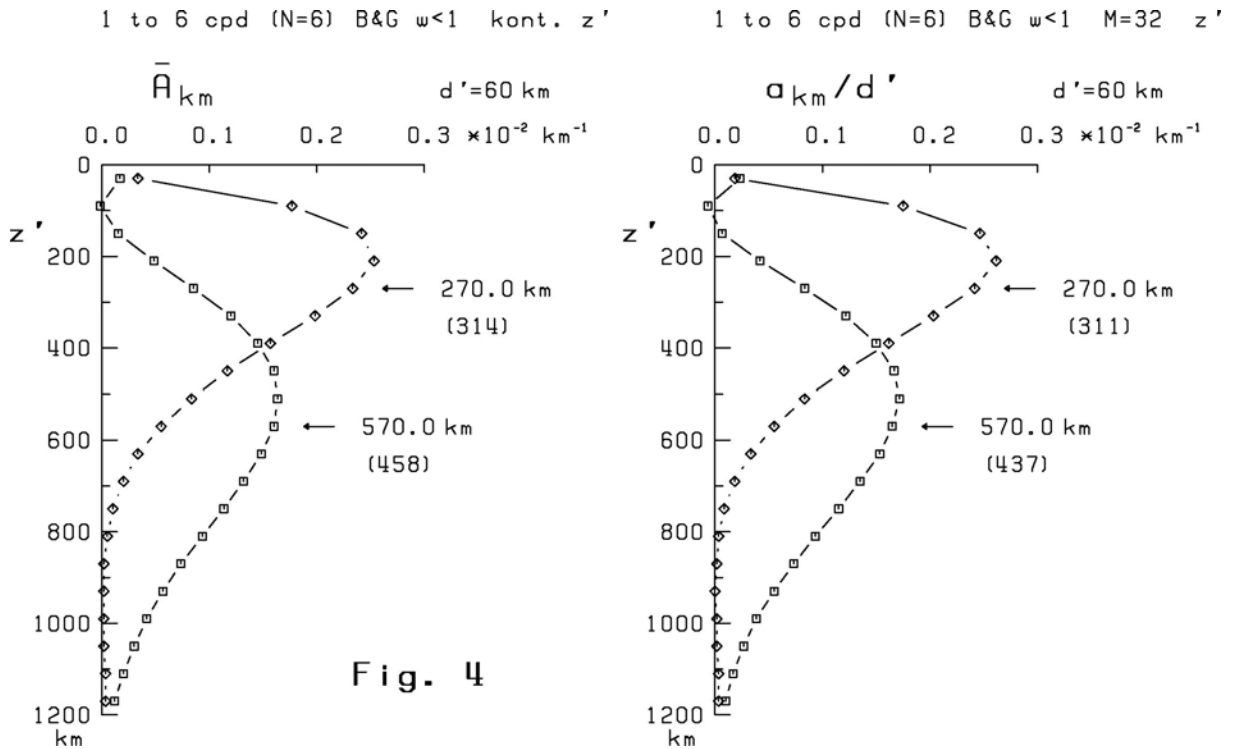


Fig. 4

responses from 1 cpd to 6 cpd, either in terms of minimum spread in the Backus-Gilbert theory or in terms of minimum D_k as defined in to eq. (24). For the upper part of the resulting hypothetical model we obtain a spread of 272 km and for its lower part a spread of 341 km, indicating that even under these most favourable conditions no small-scale structures can be resolved within the Earth's mantle.

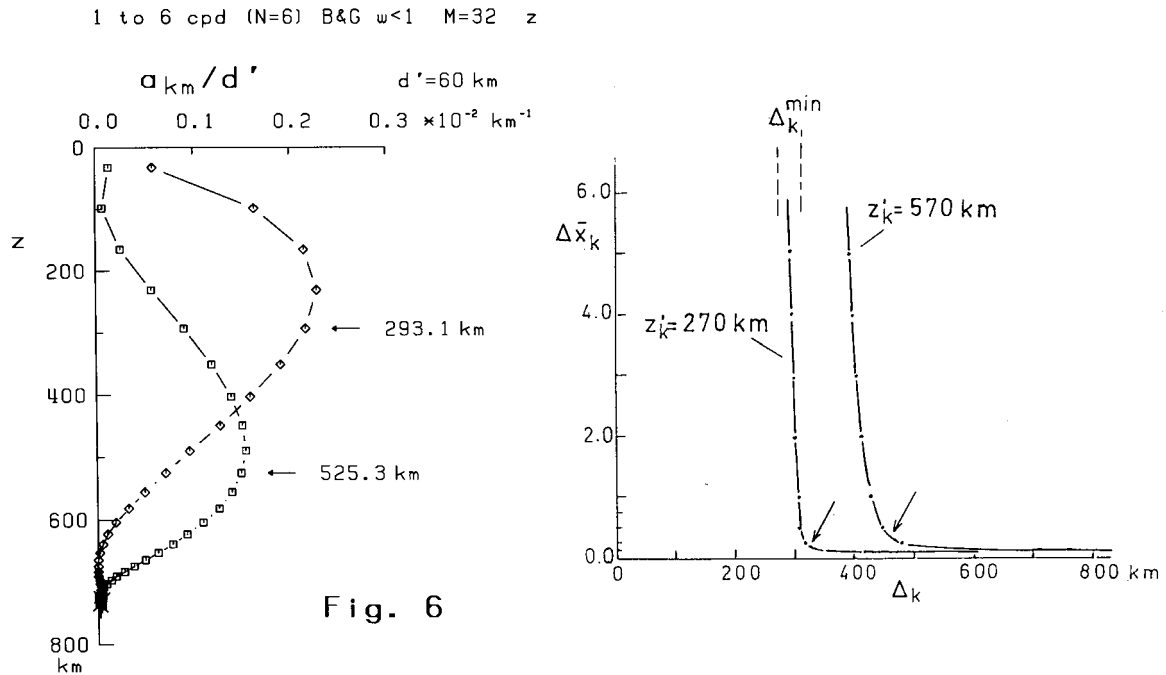
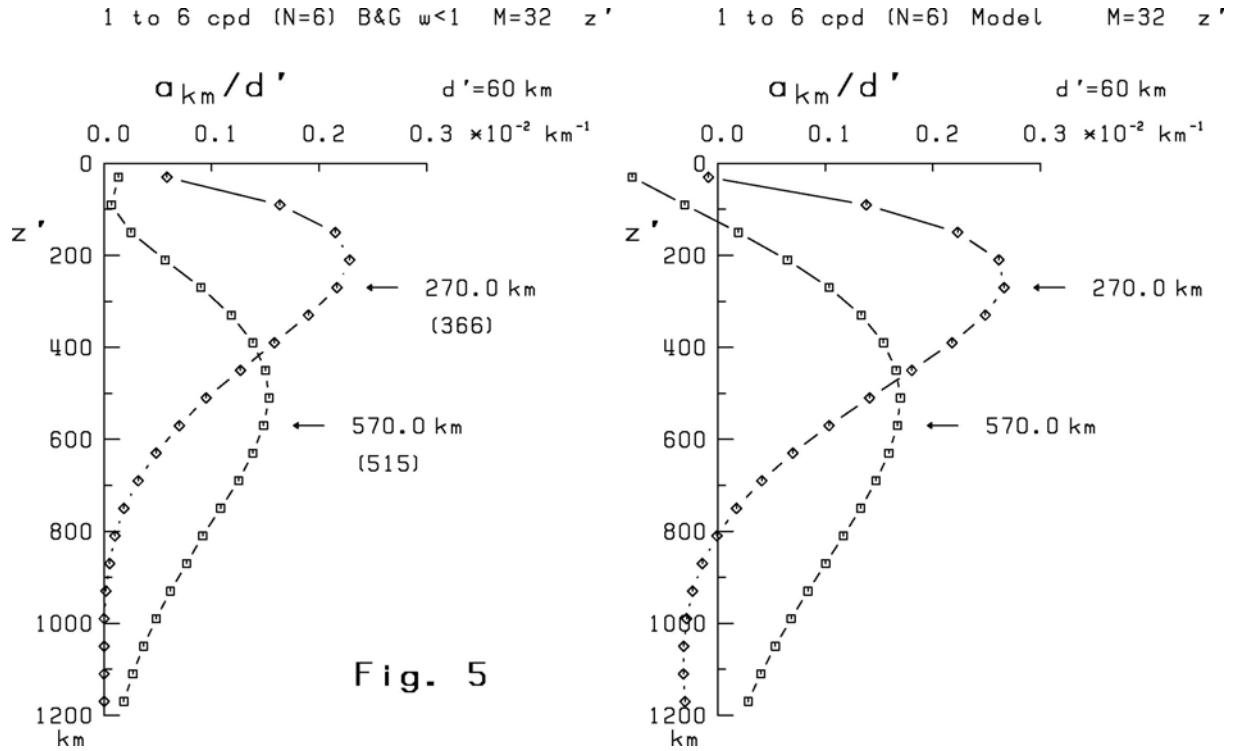
Fig. 4 repeats the B&G resolution curve in Fig. 3 on the right, but now with the allowance of errors. Hence, they represent the resolution of trade-off models according to Subsection 5.3, i.e. eqs (39) have been solved, while Δ_k has been derived from Eq. (D2). The critical choice

of the trade-off parameter w has been as follows. With $\Delta z' = 60$ km and $M = 32$ the sequence of depth segments corresponds to the sequence of layers in the 32-layer model of Fig. 2 which has the same layer thickness $d' = 60$ km. In this way the two target depths are the centres of the fifth and tenth layer of this model, respectively. Then w is chosen to reproduce *exactly* the model errors $\Delta \bar{x}_k$ in these layers. The complete trade-off curves follow in Fig. 7. Resolution curves on the left refer as before to a continuous model, while those on the right to a discrete 32-layer model. It is comforting to see that this change has no marked effect, neither on the appearance of resolution curves or on their spread. Furthermore, the inclusion of data errors of 4% for $|C|$ or 8% for ρ_a has no dramatic effect either, with moderate increases of Δ_k from 272 to 314 km and from 341 to 458 km, respectively.

The left display in **Fig. 5** repeats Fig. 4 on the right, but now with the *exact* data kernels for the 32-layer model of Fig. 2. It is again reassuring to note that also this modification does not lead to any significant changes in resolution and spread, demonstrating that studies of this kind with model-independent data kernels are quite adequate, without need for preconceived models. But under special circumstances this conclusion may have to be re-considered as shown towards the end of this subsection. The presentation on the right contains the resolution coefficients a_{km} for $k = 5$ and $k = 10$ as targets in the 32-layer model of Fig. 2. Since this is a minimum norm model, even though now *with* regularisation, it is not surprising to observe negative values towards the surface and towards greater downward distances from the target depth, even though they are not as conspicuous and regular as in Fig. 3 on the left. Otherwise the two pairs of resolution curves in Fig. 5 agree quite well, which means that regularized minimum norm and B&G trade-off models have quite comparable resolutions, provided that the choices of the parameter α and w are appropriate and compatible with each other.

So far resolution curves have been shown versus a conductivity-weighted depth z' . In order to obtain a more comprehensible display, the resolution curve on the left of Fig. 5 is shown again in **Fig. 6**, but now as a function of true depth. The transfer from z' to z depths has been carried out with the resistivities of the 32-layer model. Hence, the spacing of coefficients is slightly increased within the first layers, where ρ_m exceeds ρ_0 , while the resolution curve becomes more and more compressed towards greater depth and declining layer resistivities until they end at about 750 km. Hence, EM responses for daily variations cease to yield information about mantle resistivities beyond this depth, exceeding the penetration depth z^* of the first harmonic by nearly 100 km.

For completeness Fig. 6 shows on the right trade-off curves of model errors $\Delta \bar{x}_k$ versus spread Δ_k , assuming again a continuous model. Arrows mark those points, where the model errors $\Delta \bar{x}_k$ match those of the 32-layer model at the same target depth and we note that the chosen form of regularisation for this model has produced an optimal compromise between model resolution and accuracy. Very impressive is the steep decline of model errors, when Δ_k is moved slightly away from its minimum, while for $w \rightarrow 0$ both curves merge into the same ultimate model error, here $0.023 = 0.079/\sqrt{12}$ according to eq. (38) with $s_0 = 0.079$ as data error.



We conclude by considering various possibilities to improve the resolution power of 1D sounding. Increasing the number of response estimates with a closer spacing in frequency improves accuracy, but not resolution, which means that we have to expand the frequency range beyond the decade of daily variations. To this end we add hypothetical responses for two more decades, again with six estimates per decade, extending from 10 to 60 cpd for substorm variations and from 0.1 to 0.6 for smoothed storm-time variations. This gives 18 responses for periods ranging from 24 minutes to 10 days. The resulting resolution curves are

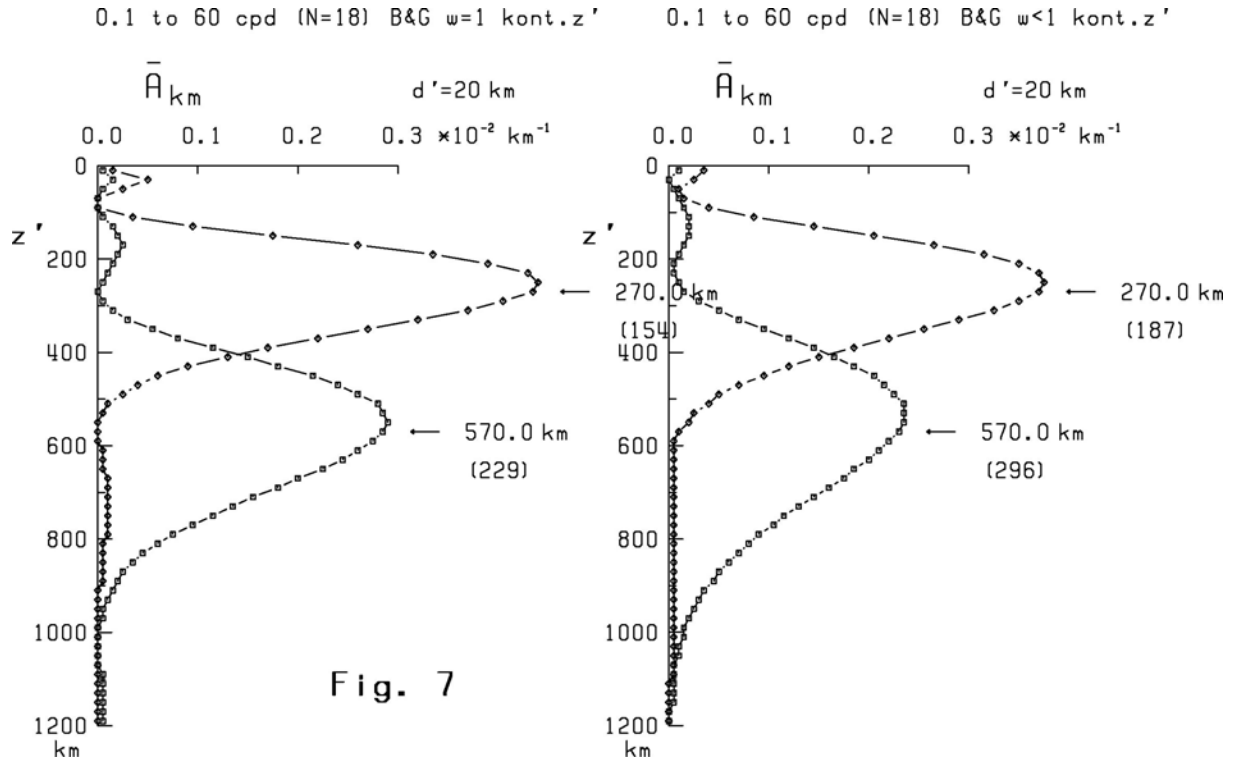
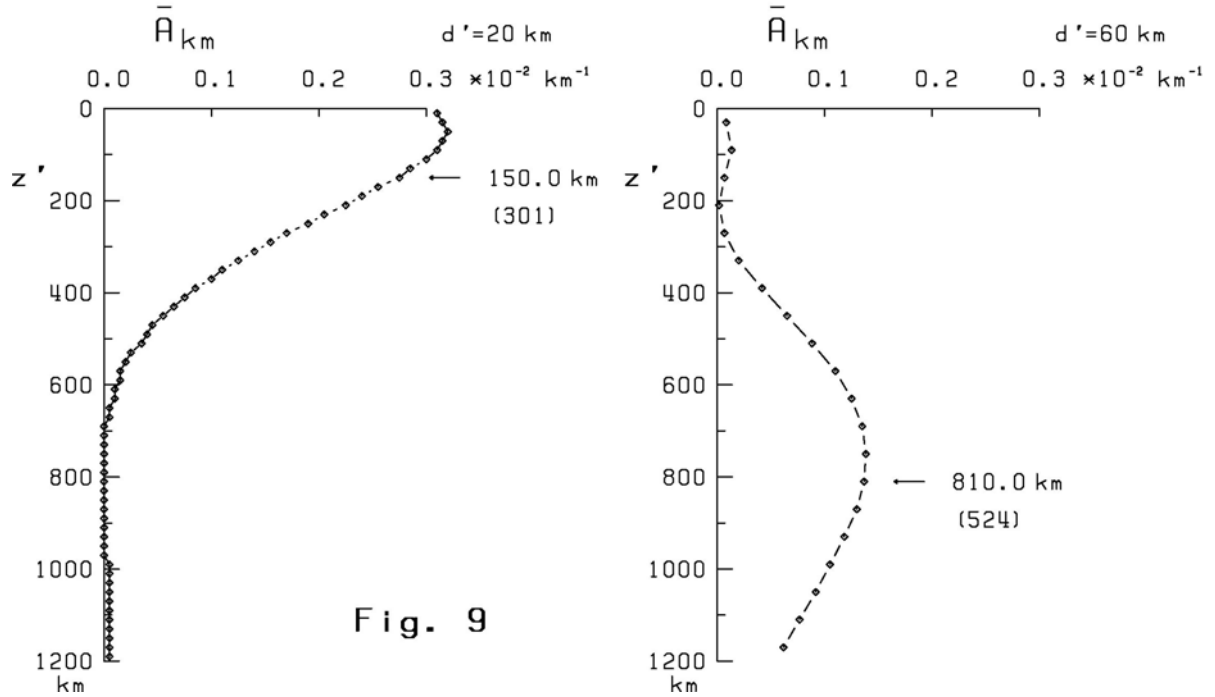
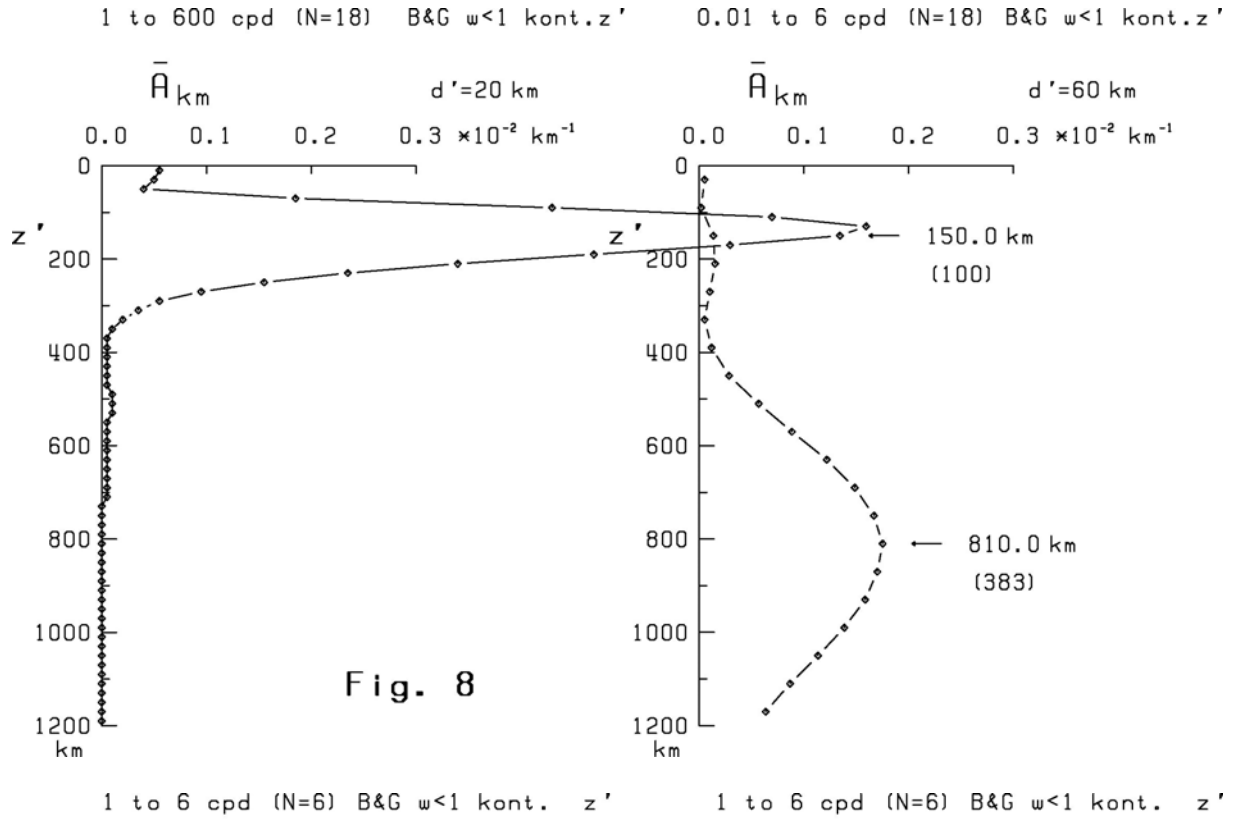


Fig. 7

shown in **Fig. 7**. The curve to the left is for exact data and the curve to the right for error-bearing data. We assume thereby that all data have the above stated errors of daily variations, and we adjust the trade-off parameter again to yield at target depth the same model errors as the 32-layer model. Continuous models are assumed with model-independent approximated data kernels as for the left display in Fig. 4. This enlargement of the data basis improves the resolution indeed substantially and averaging depths are now small enough that structural details become visible, when their extent in depth is at least comparable with the spreads of 187 and 296 km, respectively.

We address finally in the same way two specific questions, whether EM soundings could detect a frequently postulated asthenospheric conductor and also a proposed mid-mantle conductor at about 800 km depth. Therefore we test now their resolution at z' target depths of 150 km and 810 km, and by changing the scaling resistivity ρ_0 from $70\Omega\text{m}$ to $1\Omega\text{m}$ for the mid-mantle, we can expect that from, say, 700 km downwards z' correspond to true depth except for a certain off-set due to the more resistive uppermost mantle. We proceed once more from 18 responses over three decades and assume for them that they have the same errors as daily variations. Noting that the first target depth corresponds to the third layer of the 32-layer model and the second to its fourteenth layer, the trade-off parameter are adjusted again to yield the modelling errors of these layers.

For the study of the asthenosphere we add six responses from 100 to 600 cpd for slow pulsations to those of substorms and daily variations. For the mid-mantle conductor we add six responses for the long-periodic Dst continuum from 0.01 to 0.06 cpd to those for smoothed storm-time and daily variations. Thus periods extend from 144 seconds to one day and from 4 hours to 100 days, respectively. As **Fig. 8** shows, we have achieved now a nearly delta-shaped response for the upper mantle, even though the averaging depth still measures 100 km. Furthermore, the mantle below 750 km has come within the reach of EM soundings, with an acceptable spread of less than 400 km. The overall conclusion is that both conducting zones, if they exist, could be detected, even though in case of the asthenosphere a possible



screening by a surface or crustal conductor has not been taken into account yet. It would require further studies with an exact data kernel for preconceived models.

Fig. 9 complements Fig. 8 by demonstrating the loss of resolution, when responses are restricted again to the six harmonics of daily variations. We note that the two target depths are then outside their z^* -depth range from 330 km to 660 km. Therefore any modelling result for the asthenosphere would represent an average over the entire crust and upper mantle, while for the mid-mantle target depth the spread has increased to more than 500 km.

References

- Berdichevsky, M.N. & V.I.Dmitriev, 2002. Magnetotellurics in the context of the theory of ill-posed problems. *Investigations in Geophysics No.11*. Soc. Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, 215 pp.
- Bibby, H.M., T.G. Caldwell & C. Brown, 2005. Determinable and non-determinable parameter of galvanic distortion in magnetotellurics. *Geophys. J. Int.*, **163**, 915-930.
- Constable, S.C., R.L. Parker & C.G. Constable, 1987. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, **52**, 289-300.
- Eckhardt, D., 1968. Theory and interpretation of the electromagnetic impedance of the Earth. *J. Geophys. Res.*, **73**, 5317-5326.
- Haak, V., 1978. Interpretations-Verfahren für die Magnetotellurik unter besonderer Berücksichtigung lateral variierender elektrischer Leitfähigkeiten im Erdinnern und eines räumlich inhomogenen induzierenden Magnetfeld. *Bayerische Akad. Wissenschaften, Math-nat. Klasse, Abhandl. Neue Folge, Heft 158*.
- Kress, R., 1991. Numerical analysis. Springer-Verlag, New York, 326 pp.
- Lahti, L., T. Korja, P. Kaikkonen, K. Vaittinen & BEAR Working Group, 2005. Decomposition analysis of the BEAR magnetotelluric data: implications for the upper mantle conductivity in the Fennoscandian Shield. *Geophys. J. Int.*, **163**, 900-914.
- Larsen, J.C., 1975. Low frequency (0.1-6.0 cpd) electromagnetic study of deep mantle electrical conductivity beneath the Hawaiian Islands. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **3**, 17-46.
- Parker, R.L., 1994. Geophysical inverse theory. *Princeton University Press*, Princeton, NJ., 386 pp.
- Parker, R.L. & J.R. Booker, 1996. Optimal one-dimensional inversion and bounding of magnetotelluric apparent resistivity and phase measurements. *Phys. Earth Plan. Int.*, **98**, 269-282.
- Schmucker, U., 1974. Erdmagnetische Tiefensondierung mit langperiodischen Variationen. *Kolloquium Erdmagnetische Tiefensondierung Grafrath*, 313-342.
- Schmucker, U., 2001. Zur Analyse erdmagnetischer und erdelektrischer Daten- neue Fassung älterer Programme. *Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung Ludwigstein*, 220-251.

Schmucker, U. & P. Weidelt, 1975. Electromagnetic induction in the Earth. Lecture Notes Aarhus (unpublished manuscript),

Weidelt, P., 1972. The inverse problem of geomagnetic induction. *Z. f. Geophys.*, **38**, 257-289.

Weidelt, P., 1986. Discrete frequency inequalities for magnetotelluric impedances of one-dimensional conductors. *Z. f. Geophys.*, **59**, 171-176.

Whittall, K.P. & D.W. Oldenburg, 1992. Inversion of magnetotelluric data for a one-dimensional conductivity. *Geophys. Monogr. Series No. 5*. Soc. Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, 114 pp.

Appendix A. The Psi-algorithm

We assume induction in a layered plane model of M layers by a quasi-uniform TE field and proceed from the solution of the 1D diffusion equation $d^2 E_x / dz^2 = i\omega\mu_0 / \rho \cdot E_x$ for the electric field E_x at depth z within the m -th layer. With $K_m = \sqrt{i\omega_n\mu_0 / \rho_m}$ for angular frequency ω_n and z_m as depth to the top of this layer

$$E_x(z) = A_m \exp\{-K_m(z - z_m)\} + B_m \exp\{+K_m(z - z_m)\}.$$

With $B_y = -\frac{dE_x}{dz} / i\omega$ as magnetic field, a thus defined C-response $C = E_x / i\omega B_y$ yields

$$C_m = \frac{1}{K_m} \frac{1 + U_m}{1 - U_m} \quad \text{with } U_m = B_m / A_m$$

for the top $z = z_m$ of the m -th layer and

$$C_m^+ = \frac{1}{K_m} \frac{1 + U_m^+}{1 - U_m^+} \quad \text{with } U_m^+ = U_m \exp\{2K_m d_m\}.$$

for the bottom $z = z_{m+1} = z_m + d_m$. Introducing $\Psi = 2 \ln(KC)$ as logarithmic response, we obtain for $z = z_m$

$$\Psi_m = 2 \ln\{K_m C_m\} = 4 \tanh^{-1}\{U_m\}$$

with a corresponding expression for the bottom. According to eq. (2) we replace now $K_m d_m$ by $\alpha_n d'$ for an evenly subdivided model in z' depth, with d' as constant layer thickness; $\alpha_n = \sqrt{i\omega_n\mu_0 / \rho_0}$, where ρ_0 denotes the scaling resistivity. Then the thus defined γ -ratio of the logarithmic responses at the top and bottom in terms of U_m^+ is

$$\gamma_m = \frac{\Psi_m}{\Psi_m^+} = \frac{\tanh^{-1}\{U_m^+ \cdot \exp\{-2\alpha_n d'\}\}}{\tanh^{-1}\{U_m^+\}}. \quad (\text{A1})$$

The absolute value $|U_m^+|$ never exceeds unity and remains near to zero, provided the changes of resistivity from layer to layer are moderate with, say, $|\ln(\rho_{m+1}/\rho_m)| \leq 2.3$. Then to second order in $|U_m^+|$ the γ -ratio can be approximated by

$$\gamma_m = \exp\{-2\alpha_n d'\} \quad (\text{A2})$$

for all layers. Continuity of the C-response across layer boundaries implies $C_m^+ = C_{m+1}$ or in terms of the logarithmic responses $\Psi_m^+ = \Psi_{m+1} + \ln(K_m/K_{m+1})$, which in combination with eq. (A2) gives

$$\Psi_m = \gamma_m \Psi_m^+ = \gamma_m \{\Psi_{m+1} + x_{m+1} - x_m\}, \quad (\text{A3})$$

with $x = \ln(\rho/\rho_0)$ from eq. (9).

The Psi-algorithm starts with $\Psi_M = 0$ on the surface of the underlying uniform half-space at depth $z = z_M$, with $B_M = 0$ and thereby also $U_M = 0$. Then from eq. (A3)

$$\Psi_{M-1} = \gamma_{M-1} \cdot (x_M - x_{M-1}), \quad \Psi_{M-2} = \gamma_{M-2} \gamma_{M-1} x_M + \gamma_{M-2} (1 - \gamma_{M-1}) x_{M-1} - \gamma_{M-2} x_{M-2}, \quad \dots, \dots,$$

$$\Psi_1 = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-1} x_M + \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-2} (1 - \gamma_{M-1}) x_{M-1} + \dots + \gamma_1 (1 - \gamma_2) x_2 - \gamma_1 x_1.$$

We connect now the surface value Ψ_1 to the response y_n as defined in eq. (8). With $C_1 = C(\omega_n)$ as surface value of the C-response, $K_1 = \sqrt{i\omega_n \mu_0 / \rho_1}$ and α_n from above we obtain $\Psi_1 = 2 \ln\{K_1 C_1\} = 2 \ln\{\alpha_n C(\omega_n)\} - x_1 = y_n^{\text{mod}} - x_1$ with $y_n^{\text{mod}} = \Psi_1 + x_1$ denoting the response of the model. Adding then x_1 to Ψ_1 changes the last term from $-\gamma_1 x_1$ to $(1 - \gamma_1) x_1$ and the forward problem to find the response for a given model takes the form of the quasi-linear functional of eq. (5) :

$$y_n^{\text{mod}} = \sum_{m=1}^M g_{nm} x_m \quad \text{with} \quad g_{nm} = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-1} (1 - \gamma_m) \quad (\text{A4})$$

as data kernel, setting $\gamma_0 = 1$ and $\gamma_M = 0$. When the use of the approximated γ -ratio from eq. (A2) can be justified for all layers, we obtain the model-independent approximation

$$g_{nm}^{(0)} = \exp\{-2\alpha_n (m-1)d'\} - \exp\{-2\alpha_n m d'\} = \exp\{-2\alpha_n z'_m\} \cdot \sinh(\alpha_n d'), \quad (\text{A5})$$

with $z'_m = (m-1/2)d'$ as depth of the centre of the m -th layer, for starting the iterative process for 1D modelling, as outlined in Section 2.

When the model parameter x_m is replaced by $u_m = x_m - x_{m-1}$ according to eq. (10) to express the change of resistivities from layer to layer, with $x_0 = 0$, eq. (A3) changes into

$$\Psi_m = \gamma_m (\Psi_{m+1} + u_{m+1}) \quad (\text{A6})$$

and the Psi-algorithm in terms of u_m into

$$\Psi_{M-1} = \gamma_{M-1} \cdot u_M, \quad \Psi_{M-2} = \gamma_{M-2} \gamma_{M-1} u_M + \gamma_{M-2} u_{M-1}, \quad \dots, \quad$$

$$\Psi_1 = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-1} u_M + \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-2} u_{M-1} + \dots + \gamma_1 \gamma_2 u_3 + \gamma_1 u_2.$$

With $u_1 = x_1$ the new quasi-linear functional for the forward problem follows as

$$y_n^{\text{mod}} = \Psi_1 + u_1 = \sum_{m=1}^M \hat{g}_{nm} u_m \quad \text{with} \quad \hat{g}_{nm} = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-1} \quad (\text{A7})$$

as data kernel, setting again $\gamma_0 = 1$. Their model-independent approximation is

$$\hat{g}_{nm} = \exp\{-2\alpha_n(m-1)d'\} = \exp\{-2\alpha_n(z'_m - d'/2)\} \quad (\text{A8})$$

in the same notations as in eq. (A5).

Appendix B. Invariance of solutions against the choice of the scaling resistivity ρ_0

We test whether the solution $y_n^{\text{mod}} = \sum_m g_{nm} x_m$ of the forward problem depends on the chosen scaling resistivity ρ_0 . A change to a new value ρ'_0 means that the constant $c = \ln\{\rho_0 / \rho'_0\}$ is added to the data and to the model parameter, i.e. y_n^{mod} is changed to $y_n'^{\text{mod}} = y_n^{\text{mod}} + c$ and x_m to $x'_m = x_m + c$. The data kernel remains the same, provided that the ratio $d_m / \sqrt{\rho_m}$ in eq. (2) is kept constant by replacing d' by $d'' = d' \sqrt{\rho'_0 / \rho_0}$. Then as seen from the condition

$$y_n'^{\text{mod}} = \sum_m g_{nm} (x_m + c) = y_n^{\text{mod}} + c,$$

invariance against the choice of ρ_0 implies that $\sum_m g_{nm}$ equals unity. Eq. (A4) shows in

$$\sum_m g_{nm} = 1 - \gamma_1 + \gamma_1(1 - \gamma_2) + \dots + \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-2}(1 - \gamma_{M-1}) + \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-1} = 1 \quad (\text{B1})$$

that this is the case. Invariance should apply then to the solution of the inverse problem as well, which has the following consequence: Under the stated condition for the data kernel also

the solution coefficients h_{kn} remain the same. Then invariance of the solution $\bar{x}_k = \sum_n h_{kn} y_n$ requires that $\bar{x}'_k = \sum_n h_{kn} (y_n + c) = \bar{x}_k + c$ which implies that $\sum_n h_{kn} = 1$ and thereby that

$$\sum_m a_{km} = \sum_m \sum_n h_{kn} g_{nm} = \sum_n h_{kn} \sum_m g_{nm} = \sum_n h_{kn} = 1, \quad (\text{B2})$$

which is readily identified as the added condition of eq. (34) in the Backus & Gilbert theory.

Replacing the model parameter x_m by $u_m = x_m - x_{m-1}$, with $x_0 = 0$ and thus $u_1 = x_1$, the forward problem to be solved becomes $y_n^{\text{mod}} = \sum_m \hat{g}_{nm} u_m$. The change from ρ_0 to ρ'_0 changes only u_1 to $u'_1 = u_1 + c$, while $u'_m = u_m$ for $m = 2, 3, \dots$ remain the same. We presume that d' has been properly changed to d'' to have unchanged data kernels. Invariance against the choice of ρ_0 requires in

$$y_n'^{\text{mod}} = \hat{g}_{n1} (u_1 + c) + \sum_{m=2}^M \hat{g}_{nm} u_m = \sum_{m=1}^M \hat{g}_{nm} u_m + \hat{g}_{n1} \cdot c = y_n^{\text{mod}} + c$$

that $\hat{g}_{n1}$ equals unity, which is the case as evident from eq. (A7), while invariance of the inverse solution $\bar{u}_k = \sum_n \hat{h}_{kn} y_n$ leads in

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 &= \bar{u}_1 + c = \sum_n \hat{h}_{1n} (y_n + c) \quad \text{and} \quad \bar{u}'_k = \bar{u}_k = \sum_n \hat{h}_{kn} (y_n + c) \quad \text{for } k = 2, 3, \dots \\ \sum_n \hat{h}_{1n} &= 1 \quad \text{and} \quad \sum_n \hat{h}_{kn} = 0 \quad \text{for } k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

in analogy to eq. (B1). Then with $b_{\hat{n}n} = \sum_{k=1}^M \hat{g}_{\hat{n}k} \hat{h}_{kn}$ as element of matrix $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{H}}$

$$\sum_n b_{\hat{n}n} = \sum_{k=1}^M \hat{g}_{\hat{n}k} \sum_n \hat{h}_{kn} = \hat{g}_{\hat{n}1} = 1 \quad (\text{B4})$$

in analogy to eq. (B2). Furthermore it is readily verified that this equation applies also, when the model parameter is x_m , and the same turns out to be approximately correct for eq. (B2) in conjunction with u_m as model parameter.

We conclude firstly that the choice of ρ_0 has no influence upon the modelling results, and secondly that the elements of the resolution and information density matrix in given rows act like numerical filters upon model or data at the respective target depth or frequency, with the sum of filter weights being equal to unity.

Appendix C. Differentiations with respect to the regularisation parameter α

In order to simplify notations lower case letters are vectors and upper case letters matrices. Furthermore, the bar above the vector $\bar{x}$ of the averaged model is omitted. With

$P = G^T G + \alpha I_M$ the pseudo-inverse of eq. (21) leads with eq. (14) to $x = P^{-1} G^T y$ and $x^T = y^T G P^{-1}$, with $(P^{-1})^T = P^{-1}$. Differentiation of P^{-1} with respect to α yields

$$\frac{dP^{-1}}{d\alpha} = -P^{-1} \frac{dP}{d\alpha} P^{-1} = -P^{-1} I_M P^{-1}$$

(cf. Parker, 1994; eq. 30 in Section 3.02). Then

$$\frac{\partial x^T x}{\partial \alpha} = -y^T G P^{-1} P^{-1} x - x^T P^{-1} P^{-1} G^T y = -2 \cdot x^T P^{-1} x .$$

The squared misfit residual norm to be differentiated next is

$$\delta y^T y = (y - Gx)^T (y - Gx) = y^T y - x^T G^T y - y^T Gx + x^T G^T Gx .$$

Rewriting eq. (21) in the form $(G^T G + \alpha I_M)x = G^T y$ yields $G^T Gx = G^T y - \alpha x$ and thereby

$$\delta y^T \delta y = y^T y - y^T Gx - \alpha \cdot x^T x \quad (C1)$$

which represents a convenient formula to derive this squared norm. Differentiation with respect to α yields

$$\frac{\partial (\delta y^T \delta y)}{\partial \alpha} = y^T G P^{-1} P^{-1} G^T y - x^T x + \alpha \cdot (y^T G P^{-1} P^{-1} x + x^T P^{-1} P^{-1} G^T y) = x^T x - x^T x + 2\alpha \cdot x^T P^{-1} x$$

The final results in full notations are

$$\frac{\partial \bar{x}^T \bar{x}}{\partial \alpha} = -2 \cdot \bar{x}^T (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} + \alpha I_M)^{-1} \bar{x} \quad \text{and} \quad \frac{\partial y^T y}{\partial \alpha} = +2\alpha \cdot \bar{x}^T (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} + \alpha I_M)^{-1} \bar{x} . \quad (C2)$$

Appendix D. The determination of spread Δ_k in the Backus & Gilbert theory

Insertion of a_{km} from eq. (16) and of $A_k(z')$ from eq. (29) into the definitions for the spread in eq. (25), multiplied with d' for a dimensioned quantity, and eq. (30), respectively, gives

$$\Delta_k = d' \sum_m \sum_{\hat{n}} h_{k\hat{n}} \sum_n h_{kn} g_{\hat{n}m} g_{nm} J_{km} \quad \text{and} \quad \Delta_k = \int_0^\infty \sum_{\hat{n}} h_{k\hat{n}} \sum_n h_{kn} G_{\hat{n}}(z') G_n(z') J_k(z') dz' .$$

After changing the sequence of summations or the sequence of integration and summations, these expressions are reduced to

$$\Delta_k = \sum_{\hat{n}} h_{k\hat{n}} \sum_n h_{kn} b_{n\hat{n}} \quad (D1)$$

with $b_{n\hat{n}}$ as defined in eq. (35) for discrete and continuous models. Excluding the case $w = 0$, eq. (39) yields

$$\sum_n h_{kn} b_{n\hat{n}} = -\frac{1}{w} [\lambda_k + (1-w) s_0^2 h_{k\hat{n}}]$$

and together with eq. (D1) the relation

$$\Delta_k = -\frac{1}{w} \{ \lambda_k \sum_{\hat{n}} h_{k\hat{n}} + (1-w) s_0^2 \sum_{\hat{n}} h_{k\hat{n}}^2 \}.$$

With $\sum_n h_{kn} = 1$ according to eqs (33) and (34) and with $s_0^2 \sum_n h_{kn}^2 = \Delta \bar{x}_k^2$ from eq. (18) we obtain for the spread of trade-off models

$$\Delta_k = -\frac{\lambda_k}{w} - \frac{1-w}{w} \Delta \bar{x}_k^2, \quad (D2)$$

and thus for the spread of minimum spread models with $w=1$

$$\Delta_k = -\lambda_k. \quad (D3)$$

Insertion of $h_{kn} = 1/2N$ from to eq. (37) for $w=0$ yields finally the spread of minimum variance models in

$$\Delta_k = \frac{1}{4N^2} \sum_{\hat{n}} \sum_n b_{n\hat{n}}. \quad (D4)$$

Electromagnetic time constants of the Earth's mantle

Jens Stadelmann & Peter Weidelt

Institut für Geophysik und Extraterrestrische Physik
Technische Universität Braunschweig

1. Introduction and Summary

By electromagnetic induction in the mantle, the geomagnetic secular variation (SV) is distorted on its passage from the Core-Mantle Boundary (CMB) to the surface of the Earth: It gets delayed, broadened and skewed. An investigation of the impact of mantle conductivity on the backpropagation of the observed SV to the CMB is of interest for instance for an inference of the tangential fluid flow in the core close to the CMB from a reliable knowledge of the radial magnetic field component and its time variation at the CMB [e.g., Benton & Whaler (1983), Ballani et al. (2002)]. There have been also some indications that the diffusion of the SV through the mantle can give some relevant constraints on the poorly known Lower Mantle conductivity [e.g., McDonald (1957), Backus (1983), Holme (1998)].

For the diffusion of the SV, all reasonable models of mantle conductivity qualify the mantle as a *weak* conductor, since all relevant time constants of mantle diffusion (see Sect. 3) as free-decay time of current systems, delay, smoothing and skewing time of an impulse propagating from the CMB upwards, are at most of the order 100 -200 days (see Tables 2 and 3) and therefore are small compared with the time scale of SV (decades of years).

We express in Sect. 3.3 delay, smoothing and skewing times in terms of integrals over the mantle conductivity and show in Sect. 3.4 that simple relations exist between these times and the times of free decay of mantle currents. – Although formally two sets of time constants for radial and tangential magnetic components exist, the boundary conditions at the CMB attribute a geophysical significance as delay time only to the former.

2. Basic equations

We assume spherical coordinates (r, ϑ, φ) with the CMB at $r = c$ and the surface of the Earth at $r = a$. Let $\sigma = \sigma(r)$ be the conductivity distribution with $\sigma(r) = \infty$ for $r < c$ and

$\sigma(r) = 0$ for $r > a$. Neglecting displacement currents and using at first a harmonic time dependence $\sim \exp(i\omega t)$, the basic differential and constitutive laws are

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (2.1)$$

and

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

where $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ and $\mathbf{J}$ are, respectively, the vectors of the magnetic field, the magnetic flux density, the electric field and the electric current density.

Since $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ and $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, the solenoidal vectors $\mathbf{B}$ and $\mathbf{J}$ admit a Mie decomposition into a poloidal and toroidal part. For $\mathbf{B}$ this decomposition is

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} P_B) + \nabla \times (\mathbf{r} T_B). \quad (2.3)$$

Because of

$$B_r = -r \nabla_s^2 P_B, \quad \mu_0 J_r = -r \nabla_s^2 T_B, \quad (2.4)$$

these components depend on one scalar only. Here ∇_s^2 is the tangential part of the Laplace operator, which does not involve differentiation in r -direction. The knowledge of B_r and J_r therefore allows a separate determination of P_B and T_B . Generally, lateral non-uniformities inside the mantle couple the scalars P_B and T_B . However, under the present assumption that the conductivity depends on r only, these modes are not getting mixed inside the layered mantle and therefore satisfy uncoupled differential equations

$$\nabla^2 P_B = i\omega \mu_0 \sigma(r) P_B, \quad \nabla^2 T_B - \frac{\sigma'(r)}{r\sigma(r)} \partial_r(r T_B) = i\omega \mu_0 \sigma(r) T_B. \quad (2.5)$$

The continuity of the tangential components of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ at layer boundaries requires the continuity of

$$\partial_r P_B, \quad P_B, \quad T_B \quad \text{and} \quad \sigma^{-1} \partial_r(r T_B). \quad (2.6)$$

Since $J_r(r) = 0$ in $r \geq a$, the condition $J_r(a) = 0$ implies according to (2.4) that $T_B(a) = 0$. Therefore the toroidal part of $\mathbf{B}$ vanishes at $r = a$ and the observed surface magnetic field is purely poloidal.

Now we have to discuss the boundary conditions for P_B at $r = c$ and for $r \rightarrow \infty$. On the surface $r = c$ of the perfectly conducting core the radial component B_r of the currents induced in the mantle will vanish. Therefore at the CMB B_r is presented by the pure SV source field B_r^{SV} , created by the fluid motion in the core. With (2.4) this gives rise to the boundary condition

$$-c \nabla_s^2 P_B(r = c) = B_r^{SV}, \quad (2.7)$$

where the source B_r^{SV} is assumed to be given. Since $\mathbf{B}$ has to vanish for $r \rightarrow \infty$, we have at infinity the boundary condition

$$P_B(r) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

In the case of a layered mantle it is not necessary to exclude current leakage from the core into the mantle, because this poloidal current flow gives rise to a toroidal magnetic field only, which cannot be seen at the surface of the Earth. This is different for a mantle with lateral non-uniformities, where the non-uniformity can partially convert the toroidal magnetic source field into a poloidal mode, which then is observable at the surface of the Earth.

The well-known general solution of the left equation of (2.5) in spherical coordinates is

$$P_B(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{\ell}(r) S_{\ell}(\vartheta, \varphi), \quad (2.9)$$

where $S_{\ell}(\vartheta, \varphi)$ is a spherical harmonic of degree ℓ and $f_{\ell}(r)$ is a solution of the ordinary differential equation

$$f_{\ell}''(r) = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + i\omega\mu_0\sigma \right] f_{\ell}(r). \quad (2.10)$$

An additional term $\ell = 0$ in (2.9) would depend on r only and therefore does not contribute when forming $\mathbf{B}$ according to (2.3).

In the following we are considering ratios of corresponding spectral field components at $r = a$ and $r = c$. Let

$$P_{B\ell}(r, \vartheta, \varphi) := \frac{1}{r} f_{\ell}(r) S_{\ell}(\vartheta, \varphi).$$

a spectral component of P_B of degree ℓ . Then (2.3) yields

$$B_{\ell r}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f_{\ell}(r) S_{\ell}(\vartheta, \varphi), \quad (2.11)$$

$$B_{\ell \vartheta}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} f'_{\ell}(r) \partial_{\vartheta} S_{\ell}(\vartheta, \varphi), \quad (2.12)$$

$$B_{\ell \varphi}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r \sin \vartheta} f'_{\ell}(r) \partial_{\varphi} S_{\ell}(\vartheta, \varphi), \quad (2.13)$$

where $f(r)$ is a solution of (2.10) vanishing for $r \rightarrow \infty$. Then the transfer functions $\Gamma_{\ell}^R(\omega)$ and $\Gamma_{\ell}^T(\omega)$ for the radial and tangential magnetic components are defined as

$$\Gamma_{\ell}^R(\omega) := \frac{B_{\ell r}(a, \vartheta, \varphi)}{B_{\ell r}(c, \vartheta, \varphi)} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{f_{\ell}(a, \omega)}{f_{\ell}(c, \omega)}, \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{\ell}^T(\omega) := \frac{B_{\ell \vartheta}(a, \vartheta, \varphi)}{B_{\ell \vartheta}(c, \vartheta, \varphi)} = \frac{B_{\ell \varphi}(a, \vartheta, \varphi)}{B_{\ell \varphi}(c, \vartheta, \varphi)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{f'_{\ell}(a, \omega)}{f'_{\ell}(c, \omega)}. \quad (2.15)$$

In the ‘low-induction’ case, defined by $\omega\mu_0\sigma(r)r^2 \ll \ell(\ell+1)$ in $c < r < a$, the appropriate solution of (2.10) is $f_{\ell}(r) \sim r^{-\ell}$ and therefore in this limit

$$\Gamma_{\ell}^R = \Gamma_{\ell}^T = (c/a)^{\ell+2}. \quad (2.16)$$

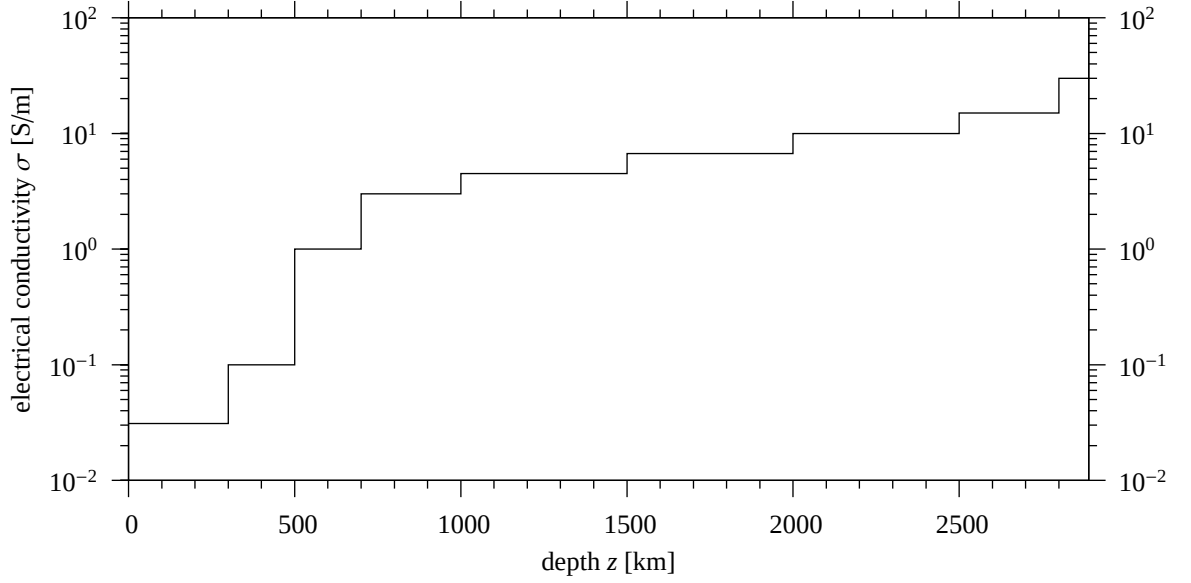


Figure 1: Model of the electrical conductivity in the layered mantle.

Now we shall express the radial and tangential components at $r = c$ and $r = a$ in terms of the SV source field and $\Gamma^{R,T}(\omega)$. The source enters via (2.7). The expansion of the given B_r^{SV} into spherical harmonics is

$$B_r(c, \vartheta, \varphi, \omega) = B_r^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega) = \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell}^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega). \quad (2.17)$$

For a single degree ℓ we obtain

$$\begin{aligned} B_{\ell r}(c, \vartheta, \varphi, \omega) &= S_{\ell}^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega), & B_{\ell \vartheta}(c, \vartheta, \varphi, \omega) &= -\frac{1}{\ell+1} \cdot \frac{\Gamma_{\ell}^R(\omega)}{\Gamma_{\ell}^T(\omega)} \cdot \partial_{\vartheta} S_{\ell}^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega), \\ B_{\ell r}(a, \vartheta, \varphi, \omega) &= \Gamma_{\ell}^R(\omega) S_{\ell}^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega), & B_{\ell \vartheta}(a, \vartheta, \varphi, \omega) &= -\frac{1}{\ell+1} \cdot \Gamma_{\ell}^R(\omega) \cdot \partial_{\vartheta} S_{\ell}^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega). \end{aligned} \quad (2.18)$$

A typical conductivity model, for which we like to compute the transfer functions $\Gamma_{\ell}^R(\omega)$ and $\Gamma_{\ell}^T(\omega)$ is the 9-layer model shown in Fig. 1.

3. Time constants of mantle diffusion

3.1. General ideas

In this section it is investigated, how a geomagnetic signal, diffusing from the CMB upwards, is distorted by the conductivity of the mantle. The action of the mantle as a low-pass filter for the SV has been investigated in great depth and detail by Backus (1983).

The present more elementary approach resumes Backus' concept of delay and smoothing times, adds the skewness time quantifying asymmetry and links all time constants to the free-decay times. Moreover, attention is drawn to the existence of two sets of time constants both for the radial and tangential magnetic component. Due to the boundary condition (2.7) at the perfectly conducting core, however, only the radial time-constants describe the delayed arrival of an impulse originating from the CMB.

Let $B_\ell(r, t)$ and $B_\ell(r, \omega)$ be generic magnetic field components in the time and frequency domain and let $\Gamma_\ell(\omega)$ the generic version of the transfer functions (2.14) and (2.15). Then we have in the frequency domain

$$B_\ell(a, \omega) = \Gamma_\ell(\omega) B_\ell(c, \omega) \quad (3.19)$$

and therefore in the time domain

$$B_\ell(a, t) = \int_{-\infty}^{t^+} B_\ell(c, t') \gamma_\ell(t - t') dt' \quad (3.20)$$

where the convolution kernel $\gamma_\ell(t)$ is the Fourier transform of $\Gamma_\ell(\omega)$,

$$\gamma_\ell(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_\ell(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.21)$$

In (3.20) we have already made use of fact that $\gamma_\ell(t)$ is a causal function satisfying $\gamma_\ell(t) = 0$ for $t < 0$. Formally this follows from the fact that $\Gamma_\ell(\omega)$ is analytic outside the positive imaginary axis. On this semiaxis are lying at $\omega = i\lambda_{\ell j}$, $\lambda_{\ell j} > 0$, an infinite number of poles, briefly examined in Sect. 3.4. [The poles of $\Gamma_\ell^R(\omega)$ define the decay constants of freely decaying mantle-current systems of degree ℓ .] For $t < 0$ the contour in (3.21) can be closed by a large semicircle in the lower ω -halfplane, which does not contribute to the integral. From the analyticity of $\Gamma_\ell(\omega)$ in the semicircle then follows the causality of $\gamma_\ell(t)$.

For the conductivity model of Fig. 1 the convolution kernels $\gamma_\ell^R(t)$ and $\gamma_\ell^T(t)$ are shown in Fig. 2 for the first three degrees.

From the inversion of (3.21),

$$\Gamma_\ell(\omega) = \int_0^\infty \gamma_\ell(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.22)$$

follows with (2.16), i.e. with $\Gamma_\ell^R(0) = \Gamma_\ell^T(0) = (c/a)^{\ell+2}$, that

$$\int_0^\infty \gamma_\ell^R(t) dt = \int_0^\infty \gamma_\ell^T(t) dt = (c/a)^{\ell+2}. \quad (3.23)$$

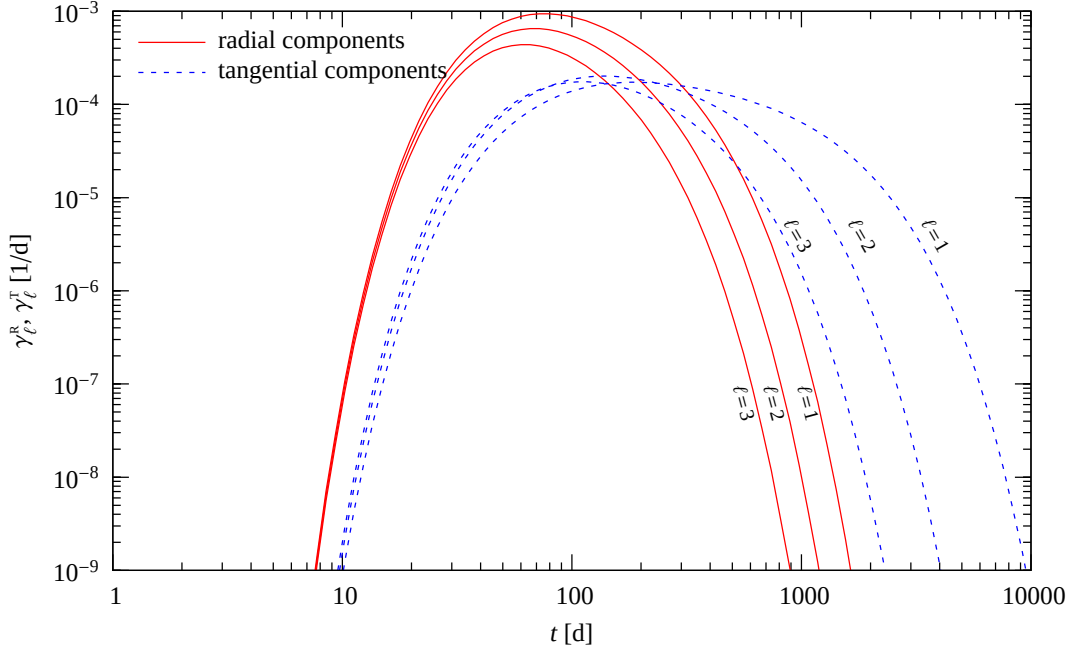


Figure 2: Convolution kernels $\gamma_\ell^R(t)$ and $\gamma_\ell^T(t)$ for the first three degrees derived from the conductivity model of Fig. 1. The logarithmic scales mask the relation (3.23).

Physically, $\gamma_\ell^R(t)$ is the delayed, broadened and skewed surface response to a $\delta(t)$ -impulse in the magnetic radial component at the CMB. The stronger delayed and smoothed response $\gamma_\ell^T(t)$ has no obvious physical meaning. However, its important role in the propagation of the tangential components from $r = c$ to the surface $r = a$ via the convolution integral (3.20) is elucidated in Sect. 3.2.

Delay, broadening and skewness of the ‘probability density distribution’ $\gamma(t)/\Gamma_\ell(0)$ can be expressed, respectively, by the time constants τ_ℓ , σ_ℓ and ϱ_ℓ , which are derived from the first three moments of $\gamma(t)/\Gamma_\ell(0)$. Let $m_{\ell k}$ and $\mu_{\ell k}$ be the k -th moments about $t = 0$ and about the mean, i.e.

$$\Gamma_\ell(0) m_{\ell k} := \int_0^\infty \gamma_\ell(t) t^k dt = \left. \frac{d^k \Gamma_\ell(\omega)}{d(-i\omega)^k} \right|_{\omega=0}, \quad \Gamma_\ell(0) \mu_{\ell k} := \int_0^\infty \gamma_\ell(t) (t - \tau_\ell)^k dt \quad (3.24)$$

with $\tau_\ell := m_{\ell 1}$. The connection between $m_{\ell k}$ and $\mu_{\ell k}$ is

$$m_{\ell 1} = \tau_\ell, \quad m_{\ell 2} = \mu_{\ell 2} + \tau_\ell^2, \quad m_{\ell 3} = \mu_{\ell 3} + 3\mu_{\ell 2}\tau_\ell + \tau_\ell^3. \quad (3.25)$$

With the further definitions

$$\sigma_\ell^2 := \mu_{\ell 2}, \quad \varrho_\ell^3 := \mu_{\ell 3} \quad (3.26)$$

the time constants are reversely given by

$$\tau_\ell = m_{\ell 1}, \quad \sigma_\ell^2 = m_{\ell 2} - m_{\ell 1}^2, \quad \varrho_\ell^3 = m_{\ell 3} - 3m_{\ell 2}m_{\ell 1} + 2m_{\ell 1}^3, \quad (3.27)$$

The skewness ϱ_ℓ^3 can have both signs, where a positive skewness denotes a long tail of $\gamma_\ell(t)$ in direction of increasing t . An inspection of Fig. 2 shows that this case has to be expected. According to (3.24) a low-frequency approximation of $\Gamma_\ell(\omega)$ with an approximation error of $O(\omega^4)$ is

$$\begin{aligned} \Gamma_\ell(\omega) &\simeq \Gamma_\ell(0) [1 + (-i\omega) m_{\ell 1} + (-i\omega)^2 m_{\ell 2}/2 + (-i\omega)^3 m_{\ell 3}/6] \\ &= \Gamma_\ell(0) [1 + (-i\omega)\tau_\ell + (-i\omega)^2 (\mu_{\ell 2} + \tau_\ell^2)/2 + (-i\omega)^3 (\mu_{\ell 3} + 3\mu_{\ell 2}\tau_\ell + \tau_\ell^3)/6]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

This low-frequency approximation applies, if the characteristic time constant T_{SV} of the secular variation (i.e. $\omega = 1/T_{SV}$) is much larger than the time constants τ_ℓ , σ_ℓ and ϱ_ℓ , which are properties of the mantle and therefore depend on conductivity only. Table 2 gives for the model of Fig. 1 mantle time constants less than 1000 days, whereas T_{SV} will be at least decades of years. In this case the B_r -signal at $r = a$ will be essentially a replica of the signal at the CMB, reduced by the geometric factor $\Gamma_\ell(0)$ and delayed by τ_ℓ . The two higher order terms in (3.28) introduce some broadening and skewing.

The first three moments fix only the given terms in the power series (3.28) and leave $\gamma_\ell(t)$ non-unique. We shall briefly consider only two different choices:

- **Skewed Gaussian distribution**

$$\Gamma_\ell(\omega) \simeq \Gamma_\ell(0) \exp[(-i\omega)\tau_\ell + (-i\omega)^2 \mu_{\ell 2}/2 + (-i\omega)^3 \mu_{\ell 3}/6] \quad (3.29)$$

$$= \Gamma_\ell(0) \exp[(-i\omega)\tau_\ell + (-i\omega)^2 \sigma_\ell^2/2 + (-i\omega)^3 \varrho_\ell^3/6], \quad (3.30)$$

If also fourth moments are included, the first neglected term in the exponent of (3.29) would be of the more complicated form $(-i\omega)^4(\mu_4 - 3\mu_2^2)/24$ (Backus 1983, p. 719; Fisz 1976, p. 139), where the expression $\mu_4 - 3\mu_2^2$ is the *excess* or *kurtosis*, vanishing for a Gaussian distribution. Moreover, the first neglected term would lead to a divergent integral when $\Gamma_\ell(\omega)$ is integrated over all frequencies to obtain an approximation for $\gamma_\ell(t)$. The approximate convolution kernel derived from the three constants is, using (3.21),

$$\gamma_\ell(t) \simeq \frac{\Gamma_\ell(0)}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\omega^2 \sigma_\ell^2/2) \cos[\omega(t - \tau_\ell) + \omega^3 \varrho_\ell^3/6] d\omega, \quad (3.31)$$

$-\infty < t < +\infty$. This integral cannot be evaluated in closed form. However, for $\varrho_\ell = 0$ we obtain the symmetric Gaussian distribution,

$$\gamma_\ell(t) \simeq \frac{\Gamma_\ell(0)}{\sqrt{2\pi}\sigma_\ell} \exp\left[-\frac{(t - \tau_\ell)^2}{2\sigma_\ell^2}\right], \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3.32)$$

$\Gamma_\ell(\omega)$ has singularities (infinities) in both ω -halfplanes. Therefore $\gamma_\ell(t)$ is non-causal. This is avoided in the next example.

- **Gamma distribution**

The transfer function

$$\Gamma_\ell(\omega) \simeq \frac{\Gamma_\ell(0)}{(1 + i\omega/\beta_\ell)^{\alpha_\ell}}, \quad \alpha_\ell \geq 1, \quad \beta_\ell > 0, \quad (3.33)$$

which is analytic in the lower ω -halfplane, leads to a causal convolution function. $\Gamma_\ell(\omega)$ disposes only of the two parameters α_ℓ and β_ℓ and reproduces the first three terms of (3.28) by choosing

$$\alpha_\ell = (\tau_\ell/\sigma_\ell)^2, \quad \beta_\ell = \tau_\ell/\sigma_\ell^2.$$

Since $\sigma_\ell \leq \tau_\ell$ [see (3.67)], we have in fact $\alpha_\ell \geq 1$. The skewness is already fixed, $\varrho_\ell^3 = 2\alpha_\ell/\beta_\ell^3 = 2\sigma_\ell^4/\tau_\ell$. The convolution function resulting from (3.33) is the Gamma distribution

$$\gamma_\ell(t) \simeq \frac{\Gamma_\ell(0) (\beta_\ell t)^{\alpha_\ell}}{\Gamma(\alpha_\ell) t} \exp(-\beta_\ell t), \quad t \geq 0. \quad (3.34)$$

An example comparing the different approximations is given in Fig. 3.– Other possible causal two-parameter distributions are the lognormal and the Weibull distribution.

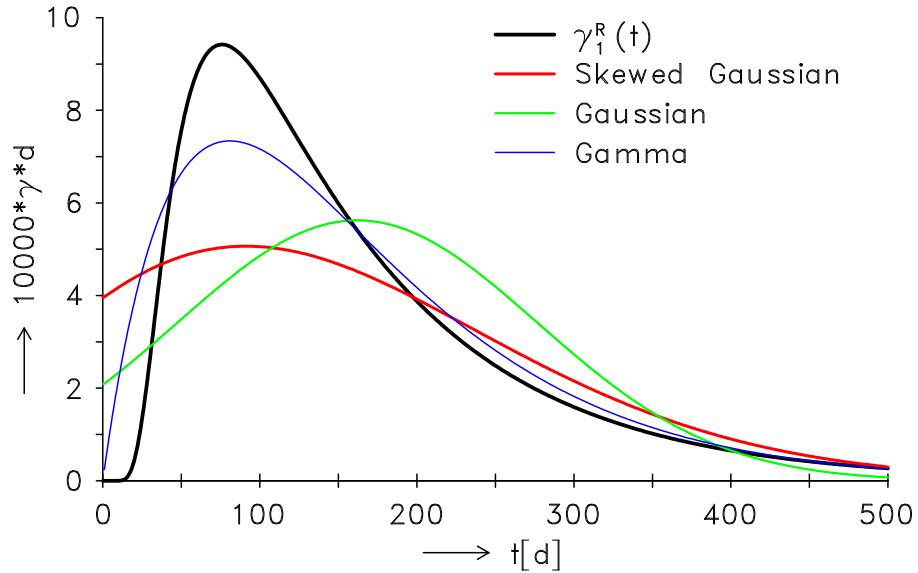


Figure 3: The convolution function $\gamma_1^R(t)$ from Fig. 2 and its approximations by the skewed Gaussian distribution (3.31), the Gaussian distribution (3.32) and the Gamma distribution (3.34). The non-causal Gaussian distributions have long tails for $t < 0$ and therefore the amplitudes in $t > 0$ are diminished.

3.2. Diffusion pattern of radial and tangential magnetic components

The geophysical significance of radial and tangential time constants will now be illustrated by transforming (2.18) into the time domain. We use again the conductivity distribution of Fig. 1 and assume as source at the CMB

$$S_\ell^{SV}(\vartheta, \varphi, \omega) = \frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-ix} \sin x}{x(1 - x^2/\pi^2)} \cdot P_\ell(\cos \vartheta), \quad x := \omega T/2,$$

corresponding in the time domain to

$$S_\ell^{SV}(\vartheta, \varphi, t) = \begin{cases} \sin^2(\pi t/T) \cdot P_\ell(\cos \vartheta), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad (3.35)$$

which is a soft B_r -impulse of duration T with maximum value 1 at $t = T/2$.

Presented are results for $T = 200$ d and $\ell = 1$. Fig. 4 shows the time variation of the radial (red/thick) and tangential (blue/thin) component at the CMB (bottom) and at the surface of the Earth (top). In the center are displayed – in reverse time – the convolution kernels $\gamma_\ell^{R,T}(t)$, which link the fields at $r = c$ and $r = a$ via the convolution integral (3.20). The presentation is fully linear and therefore is not easily reconciled with the double-logarithmic plot in Fig. 2 containing the same information. [The convolution is performed by shifting the central panel to the left (say). For a fixed position of this panel, coinciding ordinates of the central and bottom panel are multiplied and integrated. The result is assigned in the top panel to that time, which is the (constant) sum of coinciding times in the central and bottom panel, e.g. $t = 500$ d in Fig. 4.] The components are shown at those colatitudes, which report at the surface the greatest positive values, i.e. for $B_{\ell r}$ at $\vartheta = 0$ and for $B_{\ell \vartheta}$ at $\vartheta = 90^\circ$.

Whereas at the CMB the radial component shows the unipolar variation (3.35), the predominantly induced tangential component is bipolar: Broadly speaking, the ascending branch of $B_{\ell r}$ induces $B_{\ell \vartheta} > 0$ and $B_{\ell \vartheta} < 0$ is induced by the descending branch. Since $B_{\ell \vartheta}$ depends on the slope of $B_{\ell r}$, the maximum of $B_{\ell \vartheta}$ occurs earlier than the maximum of $B_{\ell r}$. The difference increases with increasing duration T . Very different convolution kernels $\gamma_\ell^R(t)$ and $\gamma_\ell^T(t)$ are required, such that after convolution both components – which at $r = a$ are derived from a scalar potential – agree in time and differ only by a space-dependent factor (top panel). In particular the long tail of $\gamma_\ell^T(t)$ achieves that the negative values of $B_{\ell \vartheta}(c)$ are always outweighed by the positive values. – For $T \rightarrow 0$ the maxima of $B_{\ell r}$ and $B_{\ell \vartheta}$ occur simultaneously: at the CMB at $t \simeq 0$ and at the surface at the maximum of $\gamma_\ell^R(t)$, i.e. at $t = 76$ d. With longer pulse duration increases the lead of the tangential component w.r.t the radial component from $\simeq 30$ d for $T = 200$ d to $\simeq 300$ d for $T = 2000$ d and $\simeq 700$ d for $T = 20000$ d.

The B_r -impulse at $r = c$ creates a magnetic field at $r = a$, where both components attain their maxima simultaneously. The time lag between these maxima and the maximum of the B_r impulse is the relevant delay time of the impulse. Fig. 4 shows that the maximum of the tangential component at the CMB occurs prior to the maximum of the radial impulse, which leads to a longer delay time for this component. These delay times $\tau_{\ell<}^R$ and $\tau_{\ell<}^T$ (with $\ell = 1$) are given in Table 1. They are lower bounds of the low-frequency delay times τ_ℓ^R and τ_ℓ^T introduced in Sect. 3.1. This low-frequency limit requires $\tau_\ell^{R,T} \ll T$.

T[d]	$\tau_{1<}^R$ [d]	$\tau_{1<}^T$ [d]
0	76	76
20	76	79
50	78	85
100	83	98
200	99	130
500	129	207
1000	148	307
2000	157	462
5000	161	699
10000	162	805
∞	162	857

Table 1: Convergence of $\tau_{1<}^{R,T}$ to $\tau_1^{R,T}$ with $\tau_1^{R,T}$ read from Table 2. For $T \rightarrow 0$ both maxima occur at the mode of $\gamma_1^R(t)$.

3.3. Determination of the time constants for given $\sigma(r)$

In this section it is shown how the three mantle time constants τ_ℓ , σ_ℓ and ϱ_ℓ can be determined from a given $\sigma(r)$. Via (3.27) and (3.24) the time constants are connected with the k -th derivative of $\Gamma_\ell(\omega)$ at $\omega = 0$. Since the definitions (2.14) and (2.15) of $\Gamma_\ell^R(\omega)$ and $\Gamma_\ell^T(\omega)$ involve field ratios only, we can select for f_ℓ a convenient normalization. For Γ_ℓ^R we choose $f_\ell(r, \omega) =: f_\ell^R(r, \omega)$ with $f_\ell^R(c, \omega) = 1$, whereas for Γ_ℓ^T we select $f_\ell(r, \omega) =: f_\ell^T(r, \omega)$ with $df_\ell^T(r, \omega)/dr|_{r=c} = -\ell/c$. Taking into account that $f'_\ell(a) = -(\ell/a) f_\ell(a)$, Eqs. (2.14) and (2.15) are transformed into

$$\Gamma_\ell^R(\omega) = (c/a)^2 f_\ell^R(a, \omega), \quad f_\ell^R(c, \omega) = 1, \quad (3.36)$$

$$\Gamma_\ell^T(\omega) = (c/a)^2 f_\ell^T(a, \omega), \quad df_\ell^T(r, \omega)/dr|_{r=c} = -\ell/c. \quad (3.37)$$

The potentials $f_\ell^{R,T}(r, \omega)$ satisfy as solutions of (2.10) the integral equation

$$f_\ell^{R,T}(r, \omega) = \left(\frac{c}{r}\right)^\ell - i\omega \int_c^a \sigma(x) G_\ell^{R,T}(r|x) f_\ell^{R,T}(x, \omega) dx, \quad (3.38)$$

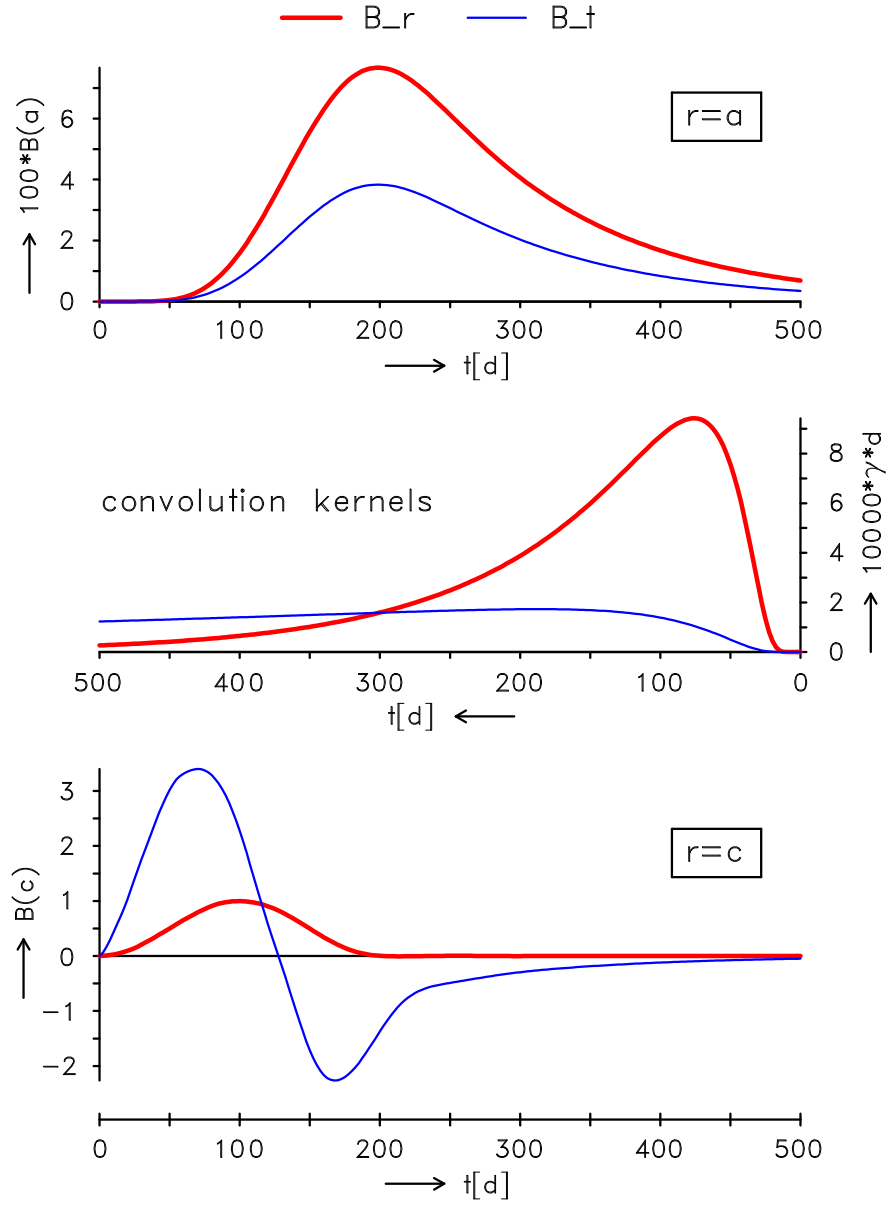


Figure 4: Degree $\ell = 1$, impulse duration $T = 200$ d: Diffusion of radial (red/thick) and tangential (blue/thin) magnetic components from the CMB ($r = c$) to the surface of the Earth ($r = a$). Used is the conductivity model of Fig. 1. See text for details.

where Green's function $G_\ell^{R,T}(r|r_0)$ solves the differential equation

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] G_\ell^{R,T}(r|r_0) = -\mu_0 \delta(r - r_0), \quad (3.39)$$

subject to the boundary conditions

$$G_\ell^R(c|r_0) = G_\ell^R(r|c) = 0, \quad dG_\ell^T(r|r_0)/dr|_{r=c} = dG_\ell^T(r|r_0)/dr|_{r_0=c} = 0. \quad (3.40)$$

These conditions grant the satisfaction of the boundary conditions for $f_\ell^{R,T}(r)$ at $r = c$, see Eqs. (3.36) and (3.37). Therefore

$$G_\ell^{R,T}(r|r_0) = \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^\ell \cdot G_\ell^{R,T}(r_<|r_<) =: \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^\ell \cdot g_\ell^{R,T}(r_<), \quad (3.41)$$

where $r_< := \min(r, r_0)$, $r_> := \max(r, r_0)$ and

$$g_\ell^R(r) = \frac{\mu_0 c}{2\ell+1} \cdot \left[\frac{r}{c} - \left(\frac{c}{r} \right)^{2\ell} \right], \quad g_\ell^T(r) = \frac{\mu_0 c}{2\ell+1} \cdot \left[\frac{r}{c} + \frac{\ell+1}{\ell} \left(\frac{c}{r} \right)^{2\ell} \right]. \quad (3.42)$$

For brevity we omit from now on the superscripts R, T , but keep in mind that – due to the different forms of g_ℓ in (3.42) – different expressions hold for the diffusion of the radial and tangential magnetic component.

The potential $f_\ell(r, \omega)$ is an analytical function of ω in the circle $|\omega| < \lambda_{\ell 1}$, where $i\lambda_{\ell 1}$ is the pole of $\Gamma_\ell(\omega)$ with smallest modulus (see Sect. 3.4). Therefore, there exists in a small neighbourhood of $\omega = 0$ the power series

$$f_\ell(r, \omega) = \left(\frac{c}{a} \right)^\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \psi_{\ell k}(r), \quad (3.43)$$

with

$$\psi_{\ell k}(r) := \left(\frac{a}{c} \right)^\ell \cdot \frac{d^k f_\ell(r, \omega)}{d(-i\omega)^k} \Big|_{\omega=0}. \quad (3.44)$$

Recalling that $\Gamma_\ell(0) = (c/a)^{\ell+2}$, we deduce from (3.24), (3.36) and (3.37) that $m_{\ell k} = \psi_{\ell k}(a)$. Therefore (3.27) yields

$$\tau_\ell = \psi_{\ell 1}(a), \quad \sigma_\ell^2 = \psi_{\ell 2}(a) - \psi_{\ell 1}^2(a), \quad \varrho_\ell^3 = \psi_{\ell 3}(a) - 3\psi_{\ell 2}(a)\psi_{\ell 1}(a) + 2\psi_{\ell 1}^3(a). \quad (3.45)$$

By inserting (3.43) into the integral equation (3.38) and comparing the coefficients of equal powers of $-i\omega$, we obtain the recursion

$$\psi_{\ell, k+1}(r) = (k+1) \int_c^a \sigma(x) G_\ell(r|x) \psi_{\ell k}(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.46)$$

The recursion starts with $\psi_{\ell 0}(r) = (a/r)^\ell$. The three subsequent terms are

$$\psi_{\ell 1}(r) = \int_c^a dx \sigma(x) G_\ell(r|x) (a/x)^\ell, \quad (3.47)$$

$$\psi_{\ell 2}(r) = 2 \int_c^a dx \sigma(x) G_\ell(r|x) \int_c^a dy \sigma(y) G_\ell(x|y) (a/y)^\ell, \quad (3.48)$$

$$\psi_{\ell 3}(r) = 6 \int_c^a dx \sigma(x) G_\ell(r|x) \int_c^a dy \sigma(y) G_\ell(x|y) \int_c^a dz \sigma(z) G_\ell(y|z) (a/z)^\ell. \quad (3.49)$$

The time constants τ_ℓ , σ_ℓ and ϱ_ℓ are according to (3.45) expressible in terms of $\psi_{\ell k}(a)$, $k = 1, 2, 3$. The evaluation, performed in Appendix A, yields

$$\tau_\ell = \int_c^a dx \sigma(x) G_\ell(x|x), \quad (3.50)$$

$$\sigma_\ell^2 = \int_c^a dx \sigma(x) \int_c^a dy \sigma(y) G_\ell^2(x|y), \quad (3.51)$$

$$\varrho_\ell^3 = 2 \int_c^a dx \sigma(x) \int_c^a dy \sigma(y) \int_c^a dz \sigma(z) G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) G_\ell(z|x). \quad (3.52)$$

In terms of the partial Green's functions $g_\ell(r)$ defined in (3.42) a possible representation is

$$\tau_\ell = \int_c^a dx \sigma(x) g_\ell(x), \quad (3.53)$$

$$\sigma_\ell^2 = 2 \int_c^a dx \sigma(x) g_\ell^2(x) \int_x^a dy \sigma(y) (x/y)^{2\ell}, \quad (3.54)$$

$$\varrho_\ell^3 = 12 \int_c^a dx \sigma(x) g_\ell^2(x) \int_x^a dy \sigma(y) g_\ell(y) \int_y^a dz \sigma(z) (x/z)^{2\ell}. \quad (3.55)$$

Numerical values of the time constants derived from the model Fig. 1 are given in Table 2.

ℓ	τ_ℓ^R [d]	σ_ℓ^R [d]	ϱ_ℓ^R [d]	τ_ℓ^T [d]	σ_ℓ^T [d]	ϱ_ℓ^T [d]
1	162.1	114.7	141.6	857.1	771.5	969.7
2	129.9	85.3	104.1	395.8	320.1	399.6
3	107.5	65.6	79.0	250.4	183.3	226.3
4	91.3	52.0	61.7	181.1	121.3	147.8
5	79.2	42.2	49.4	141.2	87.4	104.9
6	69.8	35.1	40.4	115.4	66.6	78.8
7	62.3	29.7	33.7	97.5	52.9	61.7
8	56.4	25.5	28.5	84.3	43.2	49.8
9	51.4	22.2	24.5	74.2	36.2	41.2
10	47.2	19.5	21.3	66.2	30.8	34.7
11	43.7	17.3	18.7	59.8	26.7	29.7
12	40.6	15.6	16.5	54.4	23.4	25.8
13	38.0	14.1	14.8	50.0	20.7	22.6
14	35.6	12.8	13.3	46.2	18.5	20.1
15	33.6	11.7	12.0	42.9	16.7	17.9

Table 2: Radial and tangential electromagnetic time constants for the conductivity model of Fig. 1

Since $g_\ell^R < g_\ell^T$, we always have $\tau_\ell^R < \tau_\ell^T$, $\sigma_\ell^R < \sigma_\ell^T$ and $\varrho_\ell^R < \varrho_\ell^T$. The striking difference in the weight functions g_ℓ^R and g_ℓ^T is their behaviour close to the CMB. Here, a well-conducting layer will significantly affect the diffusion of tangential components (i.e. τ_ℓ^T), whereas it has negligible influence on the diffusion of B_r (i.e. τ_ℓ^R). The physical reason for this finding is that image currents induced in the close highly conducting core strongly damp the radial magnetic component, whereas the core enhances the induced tangential magnetic components **between** the layer and the CMB (but weakens them above the layer).

Discussion

Table 2 shows that for a reasonable conductivity distribution in the mantle, the time constants for the radial magnetic component do not exceed half a year. A significant impact of mantle conductivity on the diffusion of the SV only exists, if the SV has strong contributions with a time scale comparable with the time constants. If for a degree ℓ the SV does not change much over the width (corresponding to the smoothing time σ_ℓ) of the convolution kernel $\gamma(t)$ used in (3.20) and displayed in Fig. 2, one would observe at $r = a$ only a replica of the the SV at $r = c$, reduced by the factor $(c/a)^{\ell+2}$ and – at most – time-shifted by the small delay time τ_ℓ . Inversely, the observed SV continued to the CMB will have an amplitude increased by the factor $(a/c)^{\ell+2}$ and advanced by τ_ℓ .

3.4. Relationship between τ_ℓ , σ_ℓ , ϱ_ℓ and the free-decay times

The poles of $\Gamma_\ell^{R,T}(\omega)$ are those imaginary frequencies $\omega_{\ell j} = i\lambda_{\ell j}$, $\lambda_{\ell j} > 0$, $j = 1, 2, 3, \dots$, for which (2.10) has eigensolutions with the boundary conditions

$$f_\ell^{R,T}(r, \omega) \rightarrow 0 \quad \text{for } r \rightarrow \infty \quad \text{and} \quad f_\ell^R(c, \omega) = df_\ell^T(r, \omega)/dr|_{r=c} = 0. \quad (3.56)$$

For the conductivity model of Fig. 1 the corresponding times $T_{\ell j} := 1/\lambda_{\ell j}$ are given in Table 3.

j	$T_{\ell j}^R$ [d]				$T_{\ell j}^T$ [d]			
	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$
1	112.09	82.17	62.13	48.24	769.68	316.92	179.14	116.54
2	21.97	20.20	18.42	16.70	49.87	42.38	35.93	30.51
3	8.68	8.38	8.04	7.69	14.28	13.50	12.68	11.83
4	4.64	4.55	4.44	4.32	6.41	6.23	6.04	5.83
5	2.71	2.67	2.63	2.59	3.73	3.67	3.61	3.53
6	1.94	1.92	1.90	1.87	2.32	2.28	2.25	2.21
7	1.42	1.41	1.40	1.39	1.64	1.63	1.61	1.59
8	1.06	1.06	1.05	1.04	1.18	1.18	1.17	1.16
9	0.82	0.81	0.81	0.80	0.92	0.91	0.91	0.90
10	0.67	0.66	0.66	0.66	0.72	0.71	0.71	0.71

Table 3: The first poles $\omega_{\ell j} = i/T_{\ell j}$ of Γ_ℓ^R (at left) and Γ_ℓ^T (at right) for the conductivity model Fig. 1. The times $T_{\ell j}^R$ are also the decay times of freely decaying current systems in the mantle.

The computation of free-decay modes of mantle currents requires the determination of the eigensolutions of (2.10) with the boundary conditions

$$f_\ell(r, \omega) \rightarrow 0 \quad \text{for } r \rightarrow \infty \quad \text{and} \quad f_\ell(c, \omega) = 0. \quad (3.57)$$

These conditions agree with those applied to $f_\ell^R(r, \omega)$. Therefore the times $T_{\ell j}^R$ are also the free-decay times.

For radial quantum numbers $j \gg 1$ and a *smooth* conductivity variation $\sigma(r)$, the eigenvalues follow simple asymptotic rules. Let

$$T_0 := \left[\int_c^a \sqrt{\mu_0 \sigma(r)} dr \right]^2.$$

Then for $j \gg 1$ (cf. Morse & Feshbach 1953, p. 739)

$$T_{\ell j}^R \simeq \frac{T_0}{(j - \frac{1}{2})^2 \pi^2}, \quad T_{\ell j}^T \simeq \frac{T_0}{(j - 1)^2 \pi^2}.$$

In this first order approximation the quantum number ℓ plays no role.

Simple relationships exist between τ_ℓ , σ_ℓ , ϱ_ℓ and the pole positions $i\lambda_{\ell j} = i/T_{\ell j}$,

$$\boxed{\tau_\ell = \sum_{j=1}^{\infty} T_{\ell j}, \quad \sigma_\ell^2 = \sum_{j=1}^{\infty} T_{\ell j}^2, \quad \varrho_\ell^3 = 2 \sum_{j=1}^{\infty} T_{\ell j}^3} \quad (3.58)$$

We shall sketch the proof of (3.58): Let

$$\varphi_{\ell j}(r) := f_\ell(r, i\lambda_{\ell j})$$

be the eigenfunctions defined by (3.56). They satisfy the orthonormalization

$$\int_c^a \sigma(r) \varphi_{\ell j}(r) \varphi_{\ell k}(r) dr = \delta_{jk}, \quad (3.59)$$

where δ_{jk} is the Kronecker symbol, and the integral equation [= homogeneous version of (3.38)]

$$\varphi_{\ell j}(r) = \lambda_{\ell j} \int_c^a \sigma(x) G_\ell(r|x) \varphi_{\ell j}(x) dx \quad (3.60)$$

with Green's function $G_\ell(r|x)$ given in (3.41) and (3.42). Now $G_\ell(r|x)$ is expanded w.r.t. to the variable x in terms of the eigenfunctions $\varphi_{\ell j}(x)$,

$$G_\ell(r|x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(r) \varphi_{\ell j}(x). \quad (3.61)$$

Using (3.59) and (3.60), we obtain as expansion coefficients

$$c_j(r) = \int_c^a \sigma(x) G_\ell(r|x) \varphi_{\ell j}(x) dx = \frac{\varphi_{\ell j}(r)}{\lambda_{\ell j}} \quad (3.62)$$

and therefore the bilinear expansion of the kernel is

$$G_\ell(r|x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\ell j}(r) \varphi_{\ell j}(x)}{\lambda_{\ell j}}. \quad (3.63)$$

Mercer's theorem (Courant & Hilbert 1968, p. 117) guarantees that this expansion exists and converges absolutely and uniformly. Let the iterated Green's functions $G_\ell^{(n)}(r|x)$ be defined by

$$G_\ell^{(1)}(r|x) := G_\ell(r|x), \quad G_\ell^{(n+1)}(r|x) := \int_c^a du \sigma(u) G_\ell(r|u) G_\ell^{(n)}(u|x), \quad n \geq 1. \quad (3.64)$$

Then insertion of (3.63) into (3.64) yields on using the orthogonality (3.59), cf. Courant & Hilbert 1968, p. 117,

$$G_\ell^{(n)}(r|x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\ell j}(r) \varphi_{\ell j}(x)}{\lambda_{\ell j}^n}. \quad (3.65)$$

The integral representations (3.50) to (3.52) admit the formulation

$$\tau_\ell = \int_c^a \sigma(x) G_\ell^{(1)}(x|x) dx, \quad \sigma_\ell^2 = \int_c^a \sigma(x) G_\ell^{(2)}(x|x) dx, \quad \varrho_\ell^3 = 2 \int_c^a \sigma(x) G_\ell^{(3)}(x|x) dx. \quad (3.66)$$

Therefore the insertion of (3.65) into (3.66) leads on using (3.59) to (3.58).

From (3.58) follows

$$\tau_\ell^2 - \sigma_\ell^2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} T_{\ell j} T_{\ell k} \geq 0.$$

Hence,

$$\boxed{T_{\ell 1} \leq \sigma_\ell \leq \tau_\ell} \quad (3.67)$$

Equality only holds for a single thin shell of conductance Σ at $r = b$, $c \leq b \leq a$, where only one pole exists and therefore all three times compared in (3.67) agree. From (3.50) to (3.52) follows with $\sigma(r) = \delta(r - b) \cdot \Sigma$ and $G_\ell(b|b) = g_\ell(b)$

$$T_{\ell 1} = \tau_\ell = \sigma_\ell = g_\ell(b) \cdot \Sigma$$

and $\varrho_\ell = \sqrt[3]{2} g_\ell(b) \cdot \Sigma$. The corresponding convolution function is simply

$$\gamma_\ell(t) = \Gamma_\ell(0) \exp(-t/\tau_\ell)/\tau_\ell,$$

i.e. the Gamma distribution (3.34) with $\alpha_\ell = 1$ and $\beta_\ell = 1/\tau_\ell$.

References

Backus, G.E., 1983. Application of mantle filter theory to the magnetic jerk of 1969, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **74**, 713-746.

- Ballani, L., Greiner-Mai, H. & Stromeyer, D., 2002. Determining the magnetic field in the core-mantle boundary zone by non-harmonic downward continuation, *Geophys. J. Int.*, **149**, 374-389.
- Benton, E.R. & Whaler, K.A., 1983. Rapid diffusion of the poloidal geomagnetic field through the weakly conducting mantle: a perturbation solution, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **75**, 77-100.
- Courant, R. & Hilbert, D., 1968. *Methoden der Mathematischen Physik I*, 3rd ed., Springer-Verlag, Heidelberg [etc.].
- Fisz, M., 1976. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, 8th ed., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Holme, R., 1998. Electromagnetic core-mantle coupling – I. Explaining decadal changes in the length of day, *Geophys. J. Int.*, **132**, 167-180.
- McDonald, K.L., 1957. Penetration of the geomagnetic secular variation through a mantle with variable conductivity, *J. Geophys. Res.*, **63**, 117-141.
- Morse, P.M. & Feshbach, H., 1953. *Methods of theoretical physics*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York.

A. Evaluation of the integrals defining the time constants

The time constants τ_ℓ , σ_ℓ and ϱ_ℓ are given by (3.45) and (3.46). In the sequel repeated use is made of the definition (3.41) of Green's function and its symmetry $G_\ell(x|y) = G_\ell(y|x)$.

a) Delay time τ_ℓ :

$$\tau_\ell = \psi_{\ell 1}(a) = \int_c^a dx \sigma(x) G_\ell(a|x) (a/x)^\ell = \int_c^a dx \sigma(x) G_\ell(x|x) = \int_c^a dx \sigma(x) g_\ell(x),$$

which agrees with (3.50) and (3.53).

b) Smoothing time σ_ℓ :

Let

$$\int dV_2 f(x, y) := \int_c^a dx \sigma(x) \int_c^a dy \sigma(y) f(x, y).$$

Moreover let $\Theta(x)$ with $\Theta(x) + \Theta(-x) = 1$ be Heaviside's step function. Then (3.45) yields

$$\sigma_\ell^2 = \psi_{\ell 2}(a) - \tau_\ell^2 = I_1 + I_2$$

with

$$\begin{aligned} I_1 &:= 2 \int dV_2 G_\ell(a|x) G_\ell(x|y) (a/y)^\ell \Theta(x-y) - \tau_\ell^2 \\ &= \int dV_2 G_\ell(x|x) G_\ell(y|y) [2\Theta(x-y) - 1] \\ &= \int dV_2 G_\ell(x|x) G_\ell(y|y) [\Theta(x-y) + \Theta(y-x) - 1] = 0, \\ I_2 &:= 2 \int dV_2 G_\ell(a|x) G_\ell(x|y) (a/y)^\ell \Theta(y-x) = 2 \int dV_2 G_\ell^2(x|y) \Theta(y-x) \\ &= \int dV_2 G_\ell^2(x|y) [\Theta(y-x) + \Theta(x-y)] = \int dV_2 G_\ell^2(x|y). \end{aligned}$$

Therefore

$$\sigma_\ell^2 = I_2 = \int dV_2 G_\ell^2(x|y),$$

which agrees with (3.51), whereas (3.54) follows from the second part of the fourth line. In the third and fifth line the previous factors 2 are replaced by unity because an identical term is added by interchanging the dummy integration variables x and y and exploiting the symmetry in x and y of the remaining integrand.

c) Skewing time ϱ_ℓ :

Let

$$\int dV_3 f(x, y, z) := \int_c^a dx \sigma(x) \int_c^a dy \sigma(y) \int_c^a dz \sigma(z) f(x, y, z).$$

Then (3.45) and (3.47) to (3.49) yield

$$\varrho_\ell^3 = \psi_{\ell 3}(a) - 3\tau_\ell [\psi_{\ell 2}(a) - \tau_\ell^2] - \tau_\ell^3 = \psi_{\ell 3}(a) - 3\tau_\ell \sigma_\ell^2 - \tau_\ell^3 = I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22}$$

with

$$\begin{aligned} I_{11} &:= 6 \int dV_3 G_\ell(a|x) G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) (a/z)^\ell \Theta(x-y) \Theta(y-z) - \tau_\ell^3, \\ I_{12} &:= 6 \int dV_3 G_\ell(a|x) G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) (a/z)^\ell \Theta(x-y) \Theta(z-y) - 3\tau_\ell \sigma_\ell^2, \\ I_{21} &:= 6 \int dV_3 G_\ell(a|x) G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) (a/z)^\ell \Theta(y-x) \Theta(y-z), \\ I_{22} &:= 6 \int dV_3 G_\ell(a|x) G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) (a/z)^\ell \Theta(y-x) \Theta(z-y). \end{aligned}$$

These integrals admit considerable simplifications:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell(y|y) G_\ell(z|z) [6 \Theta(x-y)\Theta(y-z) - 1] \\
&= \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell(y|y) G_\ell(z|z) [1 - 1] = 0, \\
I_{12} &= 6 \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell^2(y|z) [\Theta(x-y)\Theta(z-y) - \Theta(z-y)] \\
&= -6 \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell^2(y|z) \Theta(y-x)\Theta(z-y), \\
I_{21} &= 6 \int dV_3 G_\ell^2(x|y) G_\ell(z|z) \Theta(y-x)\Theta(y-z) \\
&= 6 \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell^2(y|z) \Theta(z-y)\Theta(z-x), \\
I_{22} &= 6 \int dV_3 G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) G_\ell(z|x) \Theta(y-x)\Theta(z-y) \\
&= \int dV_3 G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) G_\ell(z|x).
\end{aligned}$$

In I_{11} and I_{22} Green's functions (and dV_3) are invariant under a permutation of (x, y, z) . This allows us to replace a given ordering of x, y, z , spanning only a pyramid of volume $(a-c)^3/6$, by all six permutations spanning the whole cube $(a-c)^3$. – In I_{12} we have inserted σ_ℓ^2 in its form (3.54) [with (x, y) replaced by (y, z)]. Similarly in I_{21} the triplet (x, y, z) was replaced by (y, z, x) to allow a combination with I_{12} ,

$$\begin{aligned}
I_{21} + I_{12} &= 6 \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell^2(y|z) \Theta(z-y) [\Theta(z-x) - \Theta(y-x)] \\
&= 6 \int dV_3 G_\ell(x|x) G_\ell^2(y|z) \Theta(z-x)\Theta(x-y) \\
&= 6 \int dV_3 G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) G_\ell(z|x) \Theta(z-x)\Theta(x-y) \\
&= \int dV_3 G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) G_\ell(z|x) = I_{22}.
\end{aligned}$$

Therefore

$$\varrho_\ell^3 = I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22} = 2I_{22} = 2 \int dV_3 G_\ell(x|y) G_\ell(y|z) G_\ell(z|x),$$

which agrees with (3.52). Finally (3.55) follows from the first form of I_{22} given above.

METHOD OF HORIZONTAL MAGNETOVARIAIONAL SOUNDING: TECHNIQUES AND APPLICATION IN THE EMTESZ-POMERANIA PROJECT

Varentsov Iv.M.¹ and EMTESZ-Pomerania Working Group²

¹Geoelectromagnetic Research Centre, Institute of Physics of the Earth,
Russian Academy of Sciences; Troitsk, Moscow Region, Russia; e-mail: igemil@mail.transit.ru;

² Listed in (Brasse et al., 2006)

1. Introduction

The horizontal magnetic inter-station operator $\hat{M}$ (horizontal magnetic tensor) describes in the frequency domain the linear relation between the horizontal magnetic field $\mathbf{H}_h$ at two sites, the field site and the base, $\mathbf{H}_h(\mathbf{r}) = \hat{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{H}_h(\mathbf{r}')$. The anomalous operator, $\hat{M}^a = \hat{M} - \hat{I}$, where $\hat{I}$ is a unit tensor, gives the “perturbation” linear relation: $\mathbf{H}_h(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_h(\mathbf{r}') = \hat{M}^a(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{H}_h(\mathbf{r}')$.

There are at least three general reasons to consider the $\hat{M}$ operator as an important part of the transfer function (TF) data set to be estimated and further interpreted in the simultaneous arrays of electromagnetic (EM) soundings. First, it looks free from hazardous galvanic distortions. Second, it can be reliably estimated in a broad period range sufficiently wider at long periods than that for the tipper. Third, it is reliably estimated at sites above centres of conducting anomalies, where tipper's estimates are small in the amplitude and thus unstable.

A long tradition of using this response in EM studies starts from the monographs of Schmucker (1970) and Berdichevsky and Zhdanov (1984). Recent array studies brought a new quality of such estimates (Soyer, Brasse, 2001; Pajunpaa et al., 2002; Varentsov et al., 2003; Varentsov, Sokolova, 2003). However, the effective use of horizontal magnetic inter-station responses requires the development of techniques for their reliable multi-site estimation in spite of strong cultural noise and source distortions; base-to-base recalculation for the integration of data from several campaigns; rotational invariant analysis; separation of internal part, modelling and, finally, inversion. A progress in these directions was strongly motivated by the newest EM array sounding in Polish-German Pomerania (the EMTESZ-Pomerania Project) for the geoelectrical study of the lithosphere in the Trans European Suture Zone (TESZ).

The EM experiment held in 2001-5 in Polish-German Pomerania (EMTESZ-Pomerania WG, 2004; Brasse et al., 2006; Varentsov et al., 2005; etc.) gave a challenge to analyze horizontal magnetic inter-station responses together with other EM field transfer functions at a dense array located far away from the source inhomogeneities. About a hundred of simultaneous geomagnetic sites was observed there (Fig. 1) during several field campaigns with few repeated field bases and extra observatory references; and huge anomalies in $\hat{M}$ responses (up to 100% in the amplitude) have been traced within the TESZ. These soundings were concentrated along two deep seismic profiles (Guterch et al., 1999) passing the area from SW to NE, namely, P2 (southern) and LT-7 (northern), and along a new profile MT-5 across the Baltic Sea coast (Jozwiak, Neska, 2005).

The simultaneous soundings were performed in groups of 15-20 instruments with field bases at sites P8 (profile P2), G7 (profile LT-7) and P55 (profile MT-5). Observations at each site were held for few (1-6) weeks of proper recordings with 1-2 s sampling. Few sites were recorded with two different instruments for the control of their calibration and operational stability. The nearest geomagnetic observatory in Hel (HLP) was used as an extra stationary base, and two other observatories (BEL and NGK) stayed in reserve. Two of these bases, P8 and HLP, are connected with almost a unit $\hat{M}$ tensor and seem to be located far enough from strong geoelectric anomalies. The base P8 was selected as a final reference for the presentation of the whole data array as the “quietest” in the sense of EM noise.

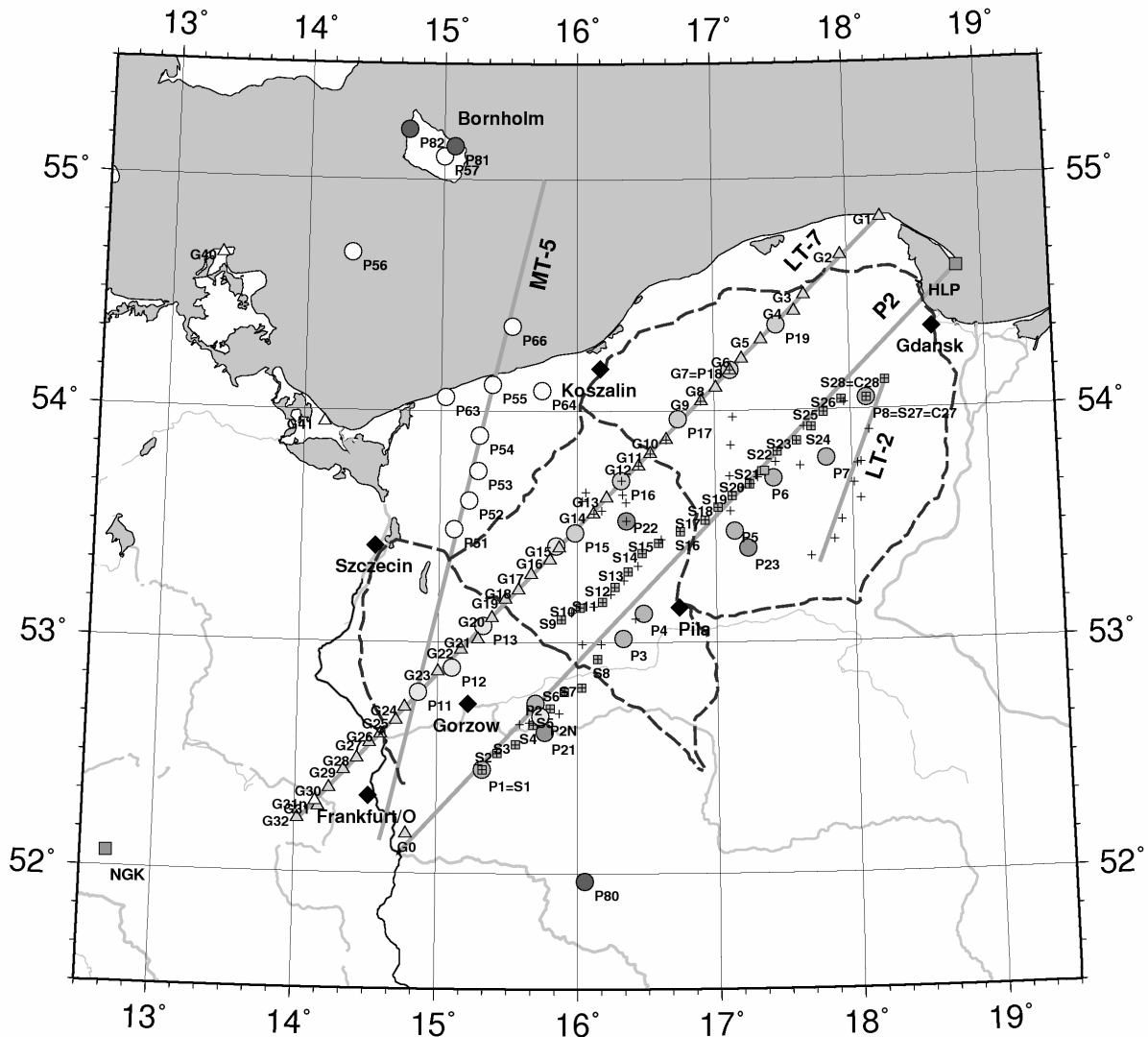


Figure 1. The EMTESZ-Pomerania array of EM soundings (Varentsov et al., 2005): Gxx (triangles) – German, Pyy (circles) – Polish, Szz (squares) – Swedish LMT sites, crosses – Czech, German and Swedish audio-MT sites; NGK and HLP (boxes) – geomagnetic observatories; dashed lines – DC railways.

The paper starts with a brief discussion of the data processing problems for the horizontal magnetic tensor and with a presentation of its primary estimates along Pomeranian profiles P2 and LT-7, then I consider rotational invariants of these data, further discuss the accuracy and temporal stability problems for this operator, and, finally, present first results in the inversion of the horizontal magnetic responses for the synthetic data set and for the Pomeranian data.

2. Estimation of the horizontal magnetic tensor

The estimation of the horizontal magnetic inter-station operator is discussed within our general data processing approach presented in (Varentsov et al., 2003, 2005; Sokolova, Varentsov, 2005). A two-site estimation scheme with a specific MC-sorting was applied within the EMTESZ-Pomerania experiment, giving reliable results in spite of strong EM noise influence (Sokolova, Varentsov, 2005). Several sites with repeated observations (P8, P55 and G7) were used as bases in the initial estimation.

Fig. 2 demonstrates the period dependence of main (diagonal) tensor components at two sufficiently anomalous sites at the LT-7 profile, namely, G10 and G16 (Fig. 1). It is possible to observe at this figure both the final results and the set of intermediate estimates obtained by the stacking of preliminary sorted partial estimates within time windows of different length further subjected to a multi-window robust averaging (Sokolova, Varentsov, 2005). The xx -amplitude at G10 doubles the unit normal level at periods around 1000 s, the same component at G16 raises up to 1.4 at longer periods around 3000 s. These amplitude maxima correspond well to zeros of the related phase components. The stability of all shown responses estimated in different time windows is obviously traced for periods at least within the range of 100-30000 s.

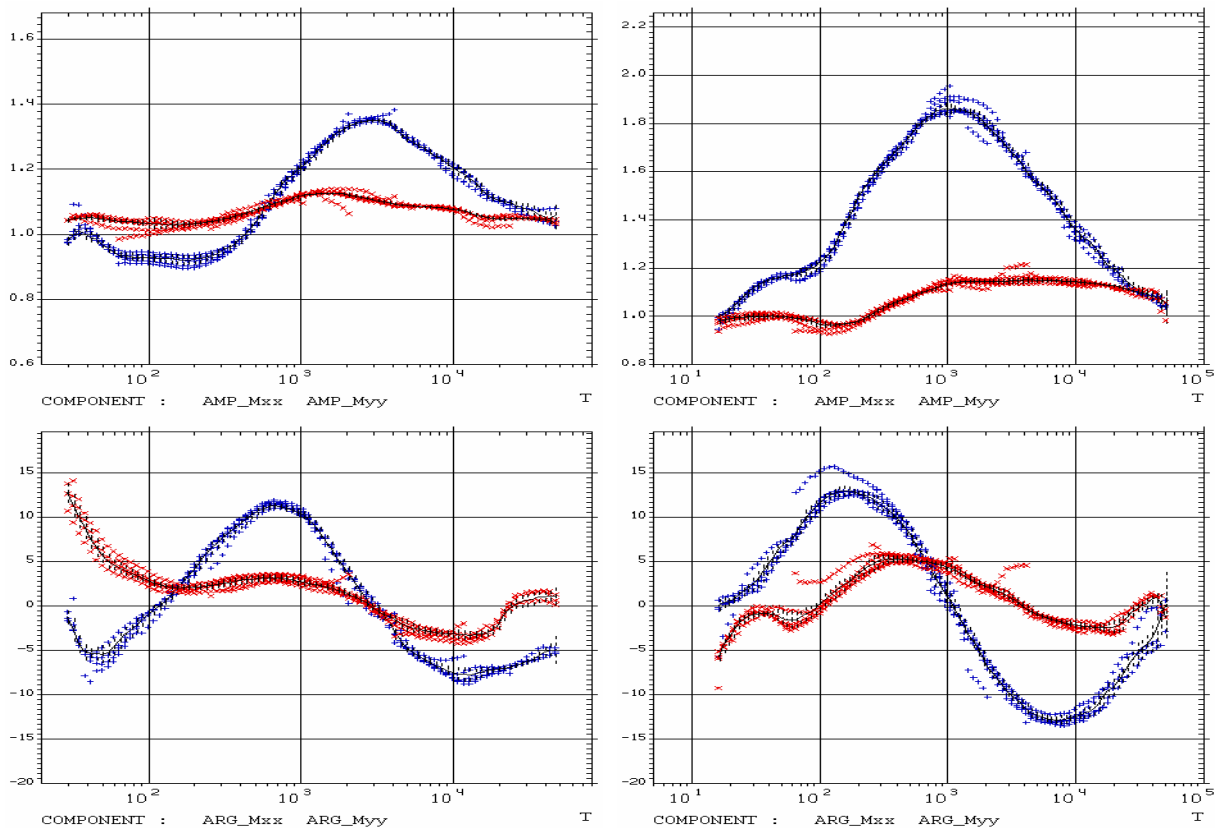


Figure 2. The horizontal magnetic tensor estimates (relative to site P8, amplitudes of main components at top panels and their phases at bottom ones) at sites G16 (left) and G10 (right) at the profile LT-7, which result from the multi-window averaging: “clouds” of crosses outline the whole set of the averaged data, solid lines with bars show final results.

A disturbing problem in the estimation of the horizontal magnetic tensor may be the synchronization of records from different types of instruments, sometimes operating at different sample rates. The analysis of the square determinant phase is the most helpful for its

solution. The hyperbolic approximation of this phase at shortest periods reliably reveals the time lag, which can be further accounted analytically for all the periods. Fig. 3 gives an example of such correction. In fact, the processed data at site S13 (Fig. 1) are initially sampled at 1 s rate, while at P8 they are resampled from 2 s records.

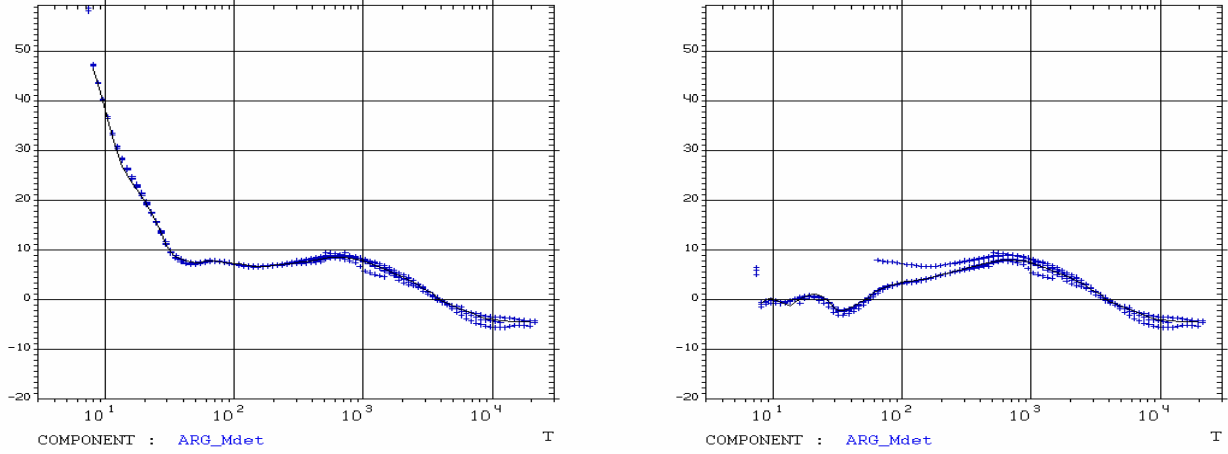


Figure 3. The time lag correction for operator $\hat{M}(S13, P8)$: the initial determinant phase (left) and the phase corrected for a lag of 1 s (right).

Fig. 4 demonstrates pseudo sections of all amplitude and main phase tensor components along the two Pomeranian profiles. The major anomalies are traced in xx - and yx -components. The amplitude anomalies reach 100% level and the phase ones exceed 10 degrees.

3. Rotational invariants of the horizontal magnetic tensor

The simplest rotational invariant of the horizontal magnetic tensor is its square determinate, already considered in the analysis of a synchronization problem. The rotation procedure for this operator to a common coordinate frame generally depends on two clock-wise rotation angles α , β , relative to the observation frames at a field and at a base, correspondingly:

$$\hat{M}(\alpha, \beta) = \hat{R}(\alpha) \hat{M}(0,0) \hat{R}(-\beta), \quad \hat{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

The extension of a classic Swift's formalism, searching an azimuth minimizing the amplitude of the tensor's off-diagonal elements in the course of rotation within a common coordinate system, yields:

$$\begin{aligned} & |M_{xy}(\alpha, \alpha)|^2 + |M_{yx}(\alpha, \alpha)|^2 = \\ & = 2 \left\{ |M_2(0,0)|^2 + |M_1(0,0)|^2 \cos^2 2\alpha + |M_3(0,0)|^2 \sin^2 2\alpha - \right. \\ & \left. - \operatorname{Re}[M_1(0,0)M_3^*(0,0)] \sin 4\alpha \right\} = \min_{\alpha} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} M_1 &= (M_{xy} + M_{yx})/2, \quad M_2 = (M_{xy} - M_{yx})/2, \\ M_3 &= (M_{xx} - M_{yy})/2, \quad M_4 = (M_{xx} + M_{yy})/2. \end{aligned}$$

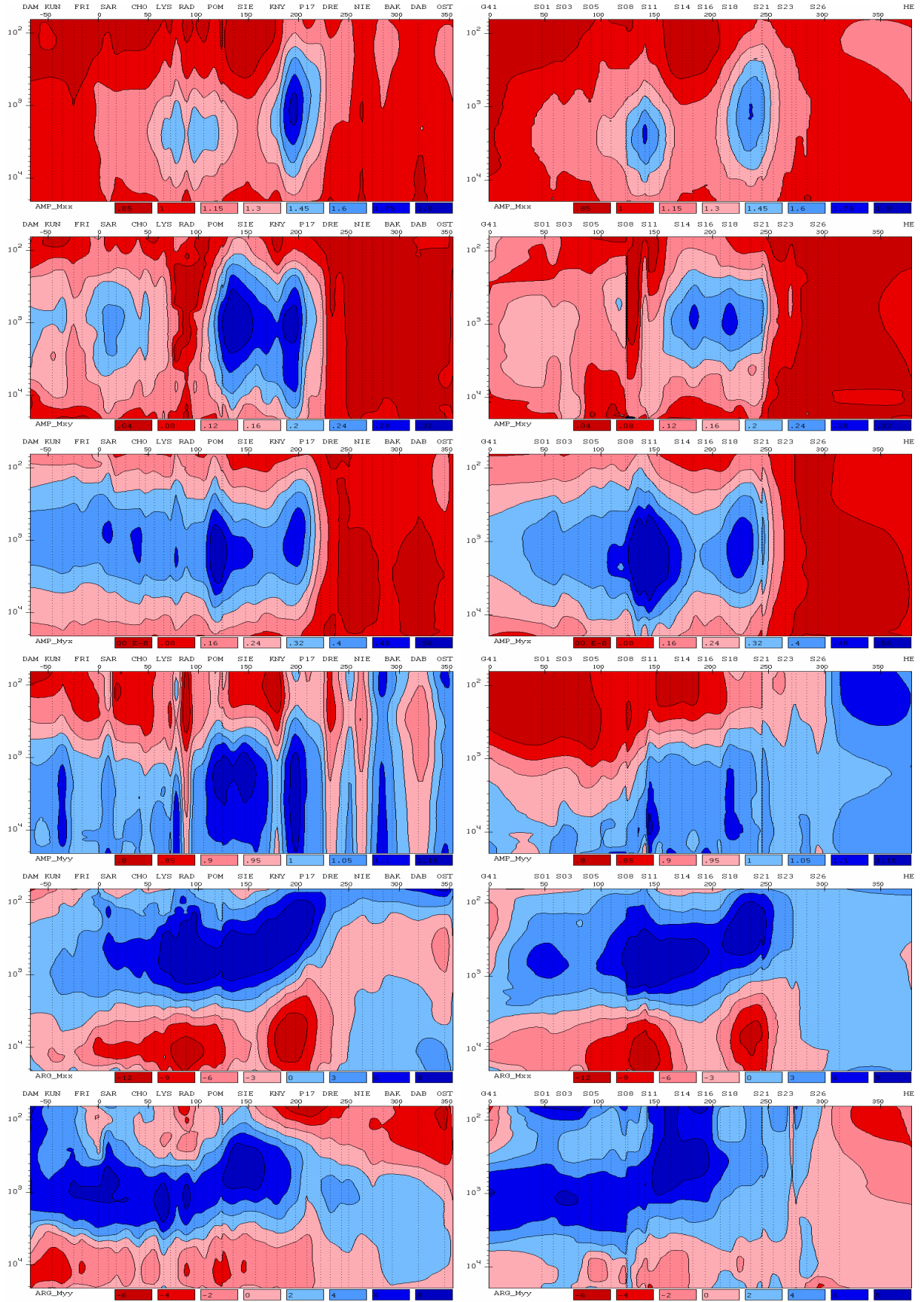


Figure 4. Pseudo sections of the horizontal magnetic tensor components (relative to P8 base) along two profiles, LT-7 (left) and P2 (right); from top to bottom: xx -, xy -, yx - and yy -amplitudes, xx - and yy -phases.

This minimization yields the principle direction azimuths defined by an angle γ_M :

$$\gamma_M = \frac{1}{4} \arctg \frac{2 \operatorname{Re}(M_1 M_3^*)}{|M_3|^2 - |M_1|^2},$$

which is obtained in a sequence with a $\pi/2$ period. It is necessary to compare the amplitudes $|M_{xx}(\gamma_M, \gamma_M)|$ and $|M_{xx}(\gamma_M + \pi/2, \gamma_M + \pi/2)|$ to select proper maximal and minimal azimuths from this sequence. The maximal and minimal amplitudes and phases are naturally obtained with a rotation to correspondent maximal and minimal azimuths. Finally, the horizontal magnetic skew-parameter takes the form: $skew_M = |M_2|/|M_4|$.

Fig. 5 presents at both Pomeranian profiles pseudo sections of different invariants of the total horizontal magnetic operator. The maximal amplitude looks simple, smooth but informative: two prominent (up to 100%) positive deep anomalies appear at the edges of the TESZ with a maximum at 1000-2000 s periods and indicate two strong quasi-2D current systems in the crust; the amplitude decrease is observed at short periods pointing at the resistive sedimentary centre of the TESZ; a high homogeneity of the data is traced at the Precambrian Craton (on the right) and more inhomogeneities are seen at the less consolidated Palaeozoic Platform (on the left). The maximal phase outlines a general subhorizontal stretch of an area with excessive conductivity in the middle of the TESZ with a clear SW deepening. The overall horizontal magnetic skew is quite low but increases in the TESZ centre and at the Palaeozoic Platform.

Similar invariants for the anomalous tensor $\hat{M}^a$ display anomalous properties of the horizontal magnetic tensor and specify "perturbation" vectors or ellipses (Schmucker, 1970; Pajunpaa et al., 2002; Varentsov et al., 2005; Brasse et al., 2006) complementing the induction vectors in the magnetovariational (MV) imaging of geoelectric structures. An obvious interpretation of perturbation ellipses is possible when the geoelectric structure well-around the base site can be considered as 1D. In this case (Varentsov et al., 2005) ellipses are almost zero within areas of quasi-1D structure close to that at the base site, take a circular form above quasi-1D structures different from the structure at the base site, stretch as a bar around 2D structures and keep a general ellipse form in the presence of 3D effects.

Fig. 6 displays long-period extreme amplitude ellipses of the anomalous horizontal magnetic operators over the subsurface conductance map (EMTESZ-Pomerania WG, 2004; Jozwiak, Ernst, 2005). These ellipses at the Craton are almost "zero" indicating its electrical homogeneity at the depth. Such an area is wide enough (of a hundred-km scale) to justify a proper selection of the common base site P8 (Fig. 1).

The horizontal magnetic strike appears to be quite stable around 60°NW with the greatest variance at the edges of profiles. A good agreement is achieved in the EMTESZ-Pomerania experiment between invariant azimuths of the horizontal magnetic tensor and galvanically undistorted principal directions of the impedance phase tensor (Varentsov et al., 2005). This agreement confirms a presence of a deep conducting 2D structure striking at ~60°NW. The deep strike direction differs from ~45°NW strike of principle subsurface sedimentary structures, clearly outlined in the presented conductance map. The view of the horizontal inter-station magnetic response within the whole EMTESZ-Pomerania array (Varentsov et al., 2005) proves its 2D structure in the vicinity of profiles P2 and LT-7.

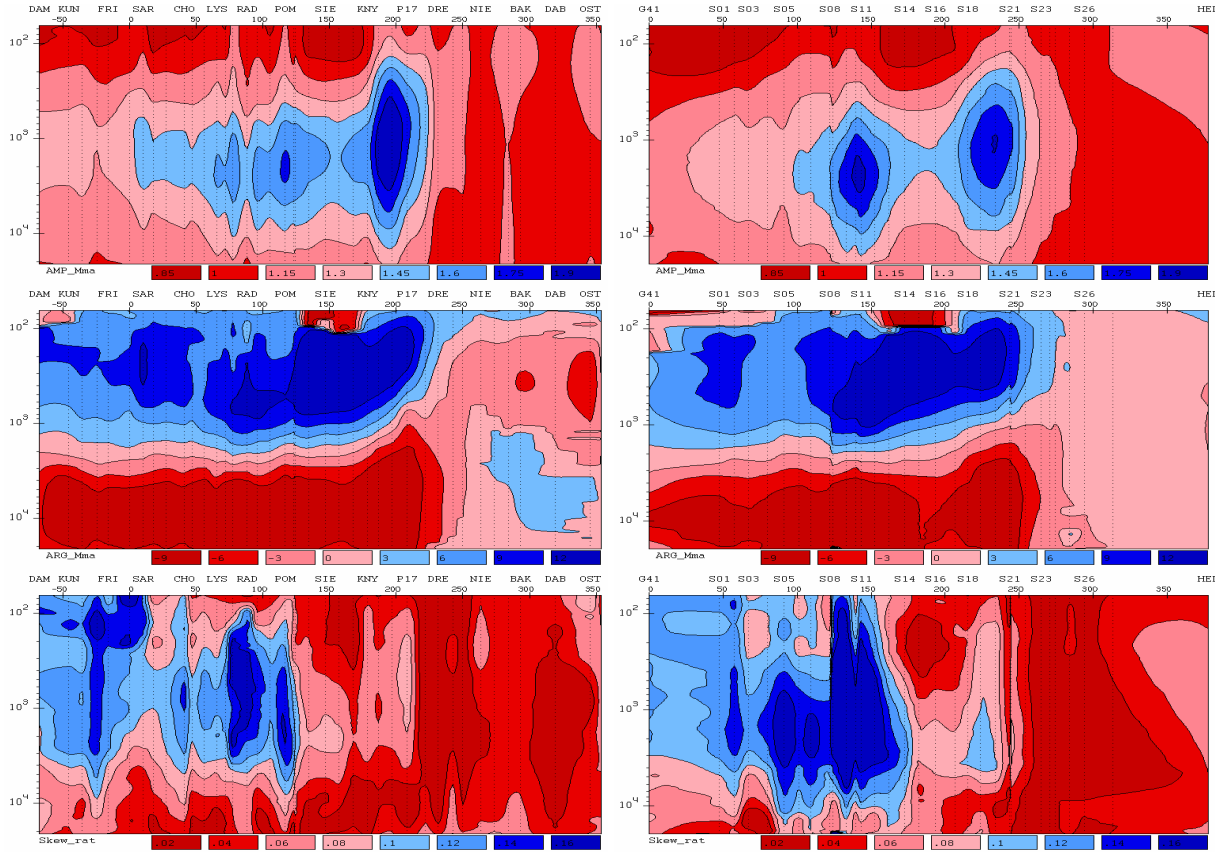


Figure 5. Pseudo sections of rotational invariants for the horizontal magnetic tensor (relative to P8 base site) along two profiles, LT-7 (left) and P2 (right); from top to bottom: maximal amplitude, maximal phase and the $skew_M$ parameter.

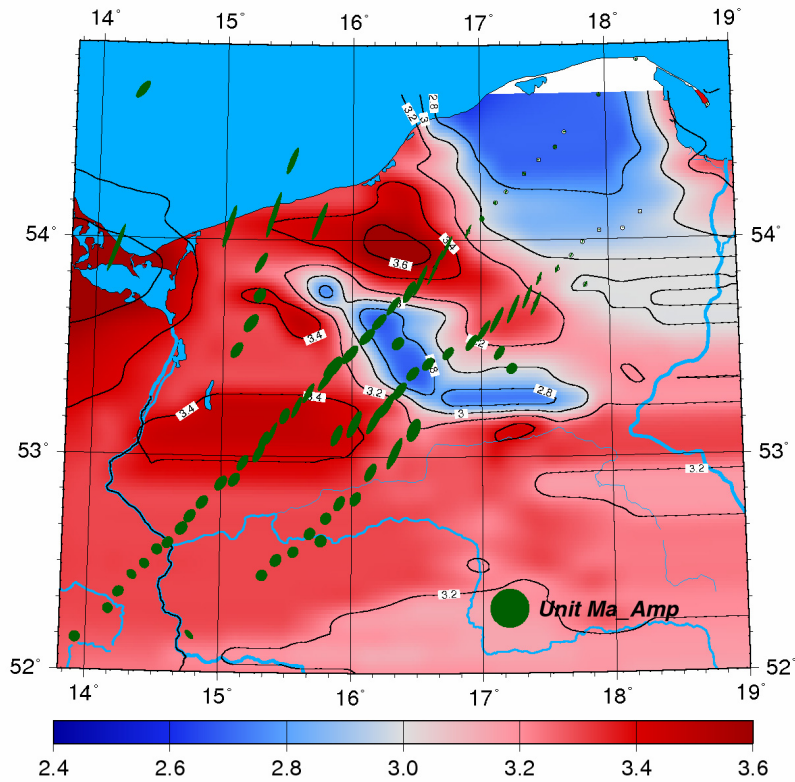


Figure 6. Extreme amplitude ellipses of the anomalous horizontal magnetic operator (relative to P8 base site) over the subsurface conductance map (in a $\log_{10}$ -scale).

4. Accuracy control and temporal stability of the horizontal magnetic tensor

The quality of $\hat{M}$ tensor data is controlled with multiple bases and repeated observations to compare the fit of direct $\hat{M}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ and “transitive” $\hat{M}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b / \mathbf{r}_c) = \hat{M}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_c) \hat{M}(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_b)$ calculations and to justify the temporal stability of responses (Varentsov et al., 2003; Varentsov, Sokolova, 2003). Fig. 7 compares direct and transitive data at two sites at the profile LT-7. The fit at site P15 is excellent and the transitive estimate at site G9 (with a relatively short record simultaneous with P8 for the direct estimate) looks preferable.

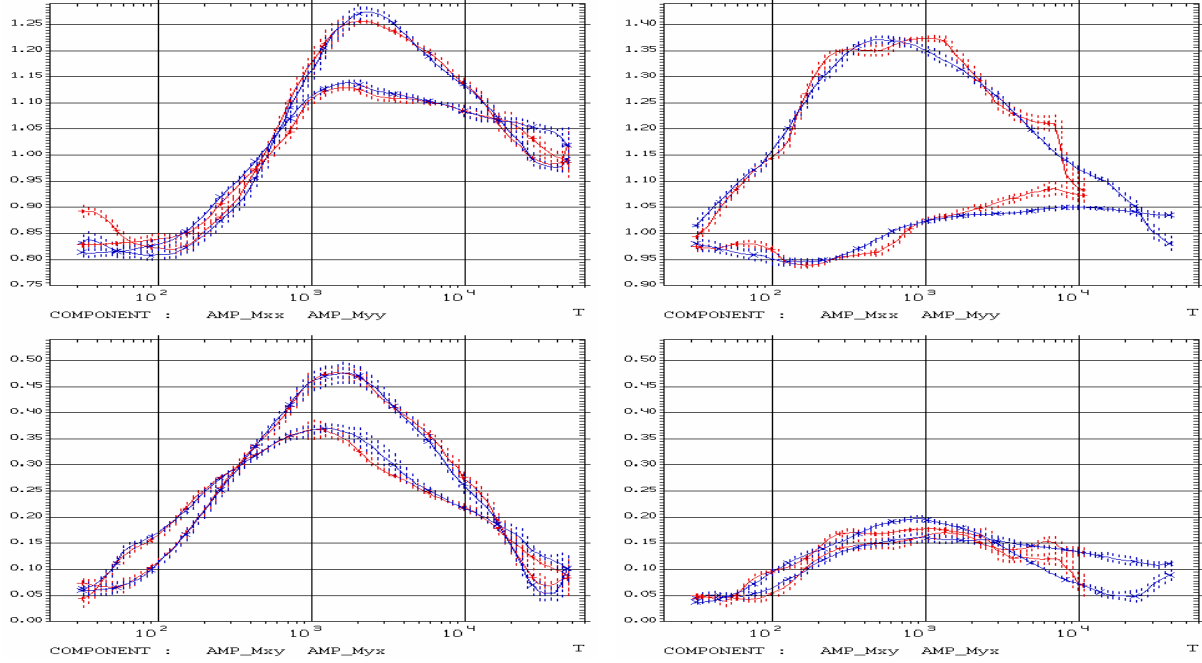


Figure 7. Transitive (via site G7, blue) and direct (red) period-dependent estimates for $\hat{M}(P15, P8)$ and $\hat{M}(G9, P8)$ operators (left and right panels, respectively) at the profile LT-7; xx - and yy -amplitudes at top panels, xy - and yx -amplitudes at bottom ones.

Fig. 10 presents the convergence of the repeated $\hat{M}(BEL, HLP)$ extreme amplitude and maximal azimuth estimates, which link two adjacent geomagnetic observatories. Temporal deviations of maximal and minimal amplitudes lie at a few percent level of the estimation error bars and are much smaller than the amplitude anomaly in the TESZ (Fig. 5). The azimuth response has a prominent stability at periods below 2 hours. The observed stability justifies a reliable recalculation of operators $\hat{M}$ in the process of the reduction of estimates obtained for separate simultaneous clusters to the common base.

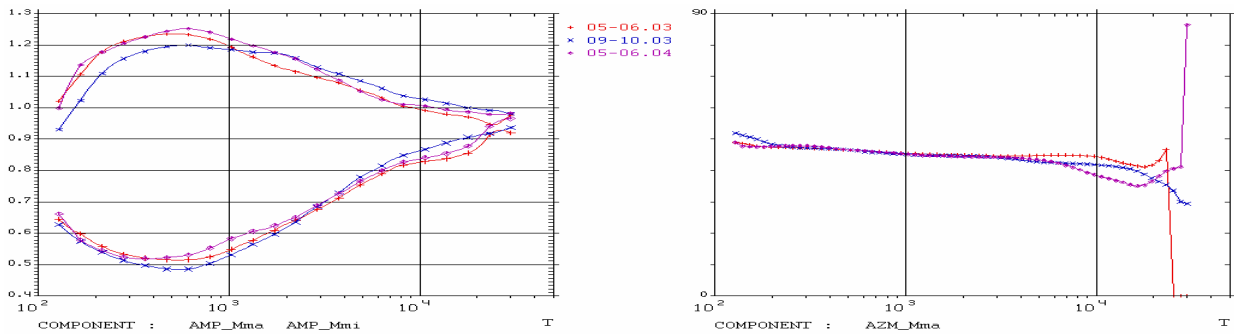


Figure 8. Repeated $\hat{M}(BEL, HLP)$ estimates, maximal and minimal amplitudes (left) and maximal azimuth (right), for observation intervals (months.year) given in the legend.

5. Two-dimensional inversion of the horizontal magnetic responses

The tools to invert horizontal magnetic “profiles” (separately or combined with other responses) in 2D models are ready (Varentsov, 2002, 2005a,b). Inversion of synthetic data sets of the COPROD-2S international project (Varentsov, 1998) gives an example of encouraging resolution extracted both from single horizontal magnetic responses and from multi-component data ensembles with their inclusion (Varentsov, 2005a,b). Fig. 9 compares inversion solutions for the COPROD-2S1 data set in the case of a complicated geoelectric model containing numerous closely located conducting anomalies. The inversion model for the horizontal magnetic data in this figure looks even preferable in the resolution of the deepest targets in comparison with solutions for the impedance and tipper data.

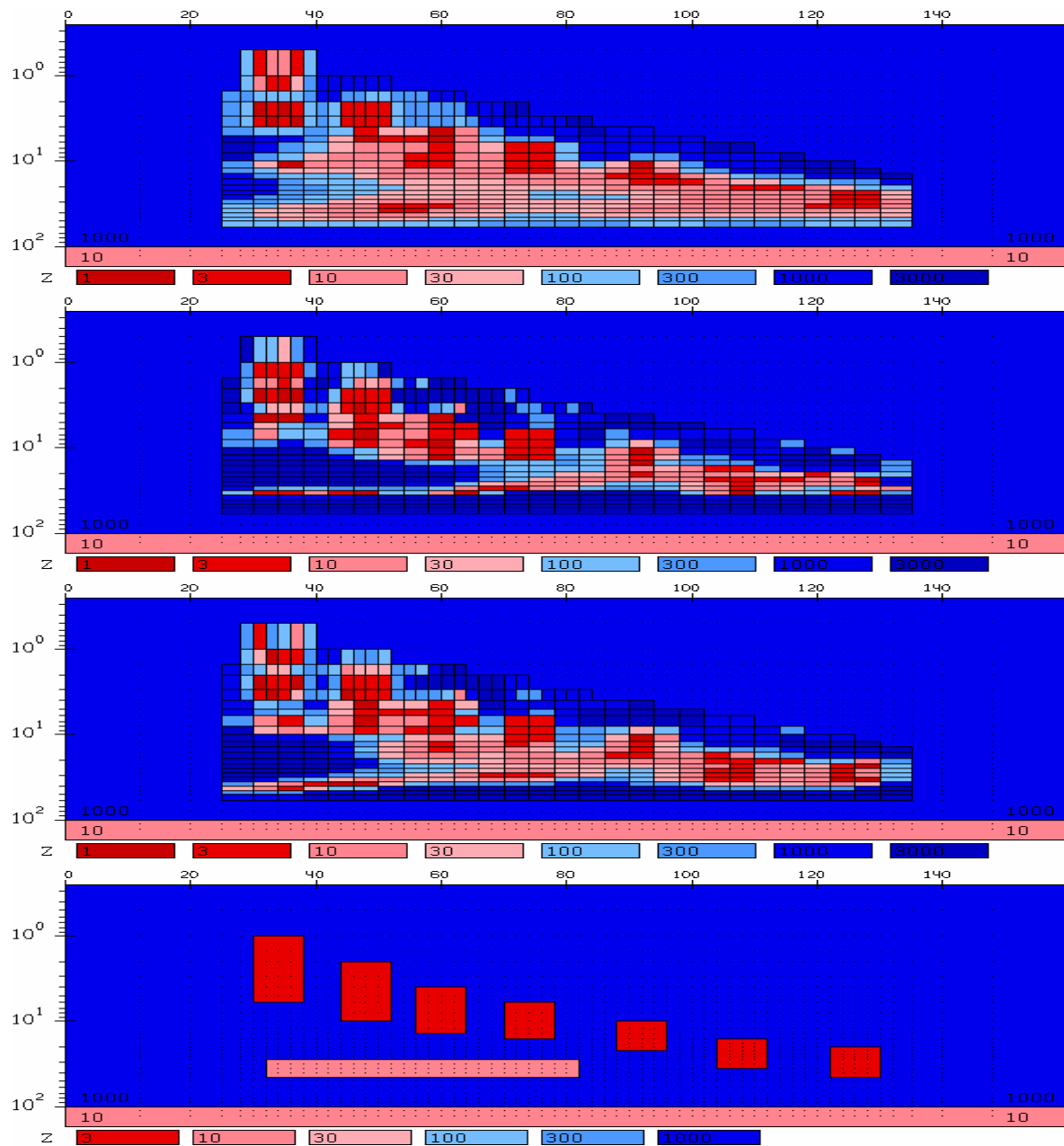


Figure 9. Two-dimensional inversion of the COPROD-2S1 synthetic data set, from top to bottom: for the E-polarization impedance (apparent resistivity and phase), for the tipper (Re,Im), for the horizontal magnetic field (Mod,Phase); the true model is in the bottom.

First results in the inversion of the horizontal magnetic responses in the EMTESZ-Pomerania project are also looking encouraging. The amplitude and phase of M_{xx} data (after 30°NE rotation of the original operators) were inverted in 2D along P2 and LT-7 profiles. The inverted data (Fig. 10) look quite close to maximal amplitude and phase responses in Fig. 5. The anomalous model structure was scanned in 3 windows (sedimentary, crustal and upper mantle), which cover the whole TESZ section and almost the whole observation interval. The parameterization scheme with the correlated cell resistivities was applied within these windows (Varentsov, 2002, 2005a). The resulting parameters were optimized together with the resistivities of the normal geoelectric structure. The robust inversion iterations at the both profiles were terminated at the RMS level of ~ 2.5 with absolute amplitude misfit norms being below 0.05 and absolute phase misfit norms being below 1.6° .

Fig. 10 demonstrates resulting inversion models at both profiles and the data fit pseudo sections. These models, in spite of their preliminary character, have a number of stable common features. The crustal anomalous conductivity is concentrated in the central part of the TESZ in the horizontal interval of about 120 km and the depth range of 10-30 km, which is generally dipping from the edge of the Precambrian Craton towards the Palaeozoic Platform. It has several local extrema with resistivity lower than $1 \Omega \cdot m$. The sedimentary structure exhibits two conducting troughs at the margins of the TESZ with the conductance at the level of 1000 S and a central resistive part. The normal section structures also correlate quite well. The crustal resistivity of the Craton is higher than on the Palaeozoic Platform. The upper mantle structure at the Craton seems to be normal, in the TESZ it even has the increased resistivity, while at the Palaeozoic Platform the resistivity in the depth range of 100-200 km decreases to the level of $25 \Omega \cdot m$, which is quite typical for the “electrical asthenosphere”.

The listed geoelectric features of the TESZ can be resolved in more details and with a greater stability in the inversion of multi-component quasi-2D data ensembles combining the most reliable MT/MV data components and accounting for 3D distortions available (Varentsov et al., 2005). The demonstrated data fit may be improved for the same data at finer grids. The inversion studies in the EMTESZ-Pomerania project are still on the way. Nevertheless, even the presented preliminary inversion results demonstrate quite obviously the rich interpretation resources for the deep model resolution contained in the horizontal magnetic inter-station responses.

6. Conclusions

A number of techniques for the whole range of tasks from the estimation of the horizontal magnetic inter-station responses till their inversion is presented and jointly applied to the data of the EMTESZ-Pomerania array sounding. An important experience is shown in the overcoming of strict EM noise effects in the data processing and in the invariant analysis of the results. Quite accurate and dense quasi-2D horizontal magnetic data sets along two profiles with several bright anomalies of the crustal nature are selected for further interpretation, both separate and joint with other MT/MV responses. First results of the horizontal magnetic data 2D inversion along the EMTESZ-Pomerania profiles look very encouraging.

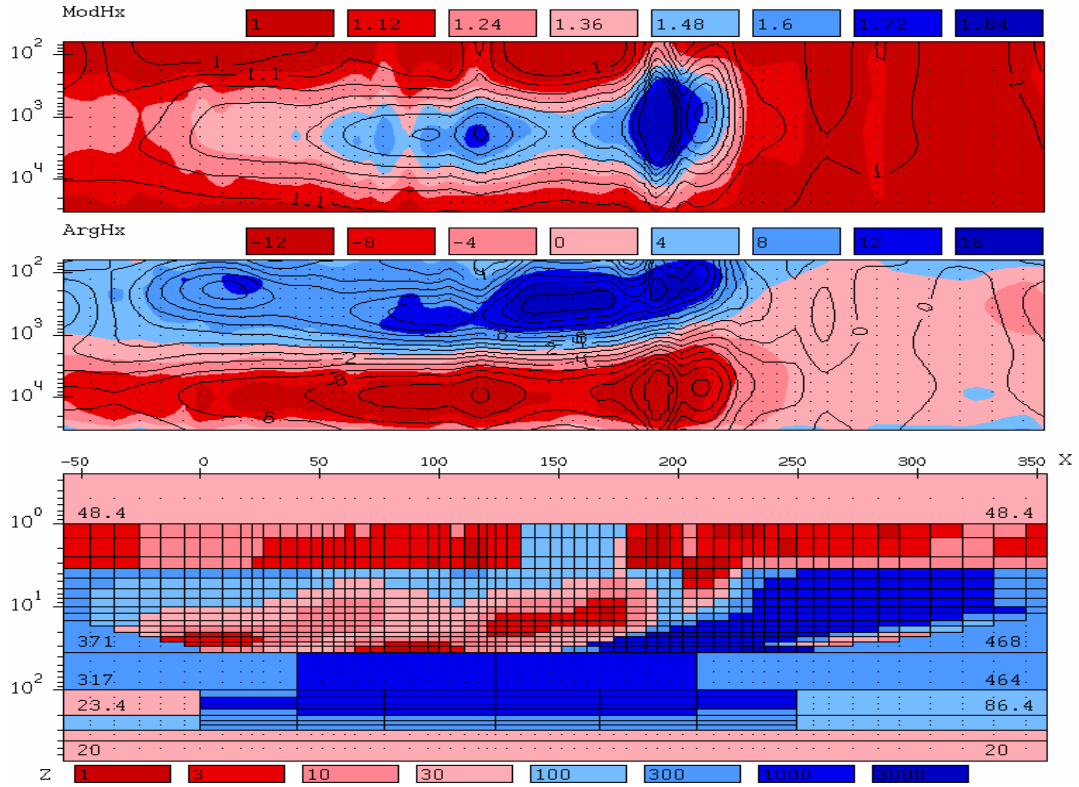


Figure 10a. M_{xx} data inversion at the profile LT-7, from top to bottom: data fit in pseudo sections for the amplitude and phase (the observed data are given in colours, the modelled data overlap them in black contour isolines) and the resulting 2D model (resistivity in $\Omega\cdot\text{m}$, the vertical scale is logarithmic, the horizontal axis origin is at Polish-German border).

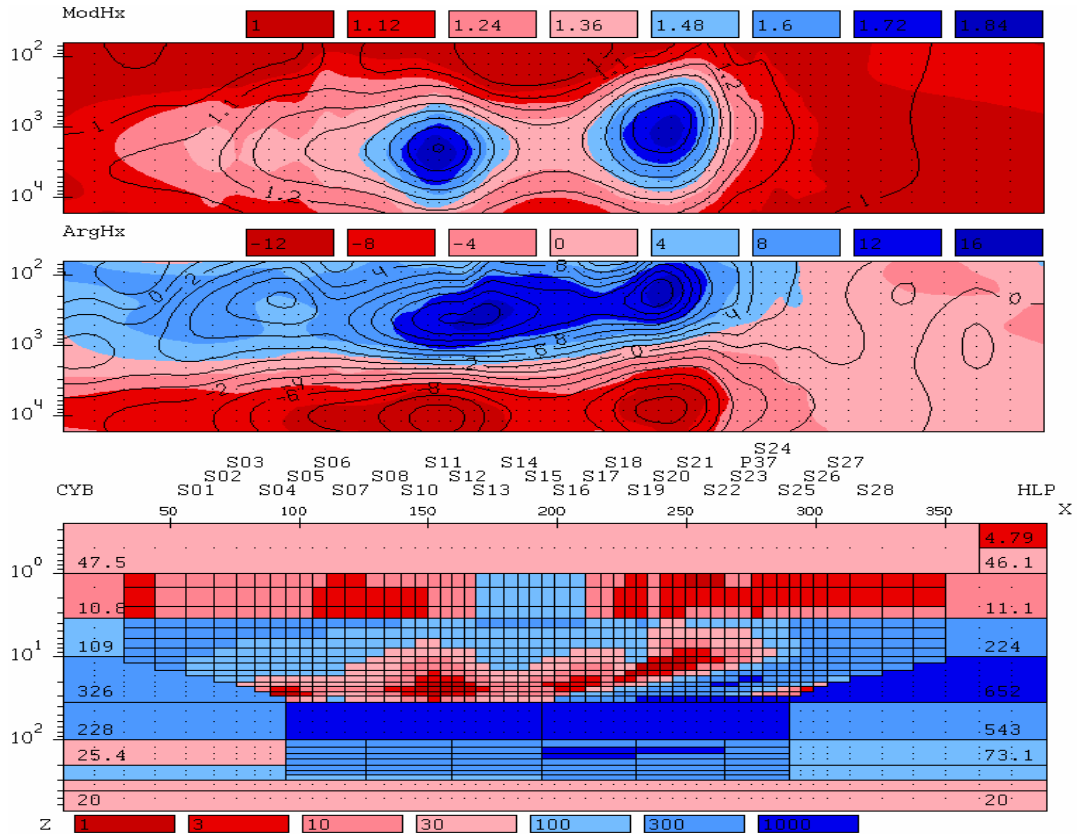


Figure 10b. M_{xx} data inversion at the profile P2, the legend is the same as in Fig. 10a.

Acknowledgements

I would like to thank my colleagues in BEAR and EMTESZ-Pomerania Working Groups for a long-term cooperation in the analysis of geomagnetic inter-station responses, and M. Berdichevsky and U. Schmucker for valuable discussions. This work was supported by DFG-RFBR Grant 03-05-04002 and NATO Collaboration Linkage Grant EST.CLG.980126.

References

- Berdichevsky, M.N., and M.S. Zhdanov, 1984. Advanced theory of deep geomagnetic sounding. Elsevier, Amsterdam - Oxford - New York – Tokyo, 408 p.
- Brasse, H., Cerv, V., Ernst, T., Jozwiak, W., Pedersen, L.B., Varentsov, Iv.M., and EMTESZ-Pomerania WG, 2006. Probing the electrical conductivity structure of the Trans-European Suture Zone. Eos Trans. AGU (Submitted).
- EMTESZ-Pomerania WG, presented by Varentsov, Iv.M., 2004. EMTESZ-Pomerania: an integrated EM sounding of the lithosphere in the Trans-European suture zone (NW Poland and NE Germany). XVII Workshop on EM Induction in the Earth (Abstracts). Hyderabad, India, 133-134.
- Guterch, A. et al., 1999. POLONAISE'97— International seismic experiment in Poland. Tectonophysics, **314**, 101–121.
- Jozwiak, W., and Ernst, T., 2005. Main conductivity anomalies in Poland in relation to geological structure. Study of geological structures containing well-conductive complexes in Poland, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., Warszawa, C-95(386), 5-16.
- Jozwiak, W., and Neska, A., 2005. EM sounding in SW Baltic region: significant induction anomaly indicated by perturbation vectors. Study of geological structures containing well-conductive complexes in Poland, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., Warszawa, C-95(386), 97-106.
- Pajunpaa, K., Lahti, I., and B. Olafsdottir, 2002, Crustal conductivity anomalies in central Sweden and SW Finland: Geophys. J. Int., **150**, 695-705.
- Schmucker, U., 1970. Anomalies of geomagnetic variations in the SW United States. Univ. of California Press, Berkeley.
- Sokolova, E.Yu., Varentsov, Iv.M., and EMTESZ-Pomerania WG, 2005. RRMC technique fights highly coherent EM noise. This book.
- Soyer, W., and H. Brasse, 2001. A magneto-variation study in the central Andes of N Chile and SW Bolivia. Geophys. Res. Let., **28**(15), 3023-3026.
- Varentsov Iv.M., 1998. The COPROD-2S project. WWW page, http://user.transit.ru/~igemi/c_2s_p0.htm.
- Varentsov, Iv.M., 2002. A general approach to the magnetotelluric data inversion in a piecewise-continuous medium. Izvestiya, Phys. Solid Earth, **38**(11), 913-934.
- Varentsov, Iv.M., 2005a, Robust methods of joint inversion of MT/GDS data in the piecewise-continuous media. Elektromagnitnye issledovaniya zemnykh nedr (Ed. Spichak V.V.). Nauchny Mir, Moscow, 54-75 (in Russian).

- Varentsov, Iv.M., 2005b. Arrays of simultaneous EM soundings: methods of construction and analysis. *Electromagnitnye issledovania zemnykh neдр* (Ed. Spichak V.V.), Nauchny Mir, Moscow, 143-156 (in Russian).
- Varentsov, Iv.M., and EMTESZ-Pomerania WG, 2004. The estimation and analysis of horizontal magnetic inter-station transfer functions in the EMTESZ-Pomerania project. XVIII Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth (Abstracts), Hyderabad, India, 153-154.
- Varentsov, Iv.M., Sokolova, E.Yu., and BEAR WG, 2003. Diagnostics and suppression of auroral distortions in the transfer operators of the EM field in the BEAR experiment. *Izvestiya, Phys. Solid Earth*, **39**(4), 283-307.
- Varentsov, Iv.M., Sokolova, E.Yu., Martanus E.R., and EMTESZ-Pomerania WG, 2005. Array view on EM transfer functions in the EMTESZ-Pomerania project. Study of geological structures containing well-conductive complexes in Poland, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., Warszawa, C-95(386), 107-121.
- Varentsov, Iv.M., Sokolova, E.Yu., Martanus, E.R., Nalivayko, K.V., and BEAR WG, 2003. System of EM field transfer operators for the BEAR array of simultaneous soundings: methods and results. *Izvestiya, Phys. Solid Earth*, **39**(2), 118-148.

RRMC TECHNIQUE FIGHTS HIGHLY COHERENT EM NOISE

Sokolova E.Yu.¹, Varentsov Iv.M.¹ and EMTESZ-Pomerania Working Group²

¹Geoelectromagnetic Research Centre, Institute of Physics of the Earth,
Russian Academy of Sciences; Troitsk, Moscow Region, Russia; e-mail: igemi3@mail.transit.ru;

² Listed in (Brasse et al., 2006)

1. Introduction

This paper presents recent advances in the data processing techniques for the magnetotelluric (MT) and magnetovariational (MV) geophysical methods with a special focus on approaches to overcome the distortions from the highly coherent electromagnetic (EM) noise (Junge, 1996) in the observed time series. The effectiveness of these advances is illustrated at the long-period (LMT) data set collected in Polish-German Pomerania within the EMTESZ-Pomerania project (Brasse et al., 2006) and at the broadband data set of simultaneous MT soundings in the industrial area in Central Russia (Yakovlev et al, 2002). In the both cases a strong data contamination takes place with an intensive and widely spread, both spatially and within the period range, industrial EM noise.

The EMTESZ-Pomerania project investigates in the related area the deep conductivity structure of the whole lithosphere across the Trans European Suture Zone (TESZ) using the natural electromagnetic (EM) field of the Earth (EMTESZ-Pomerania WG, Varentsov, 2004). The EM sounding array observed within this project during several field seasons in 2001-2005 years counts more than 100 LMT and 60 audio-MT sites located mainly along the regional seismic profiles P2, LT-7 and LT-2 (Fig. 1). The data acquisition scheme implies the arrangement of the sounding sites into several spatially overlapping simultaneously observed subgroups and the installation of a number of continuously running field stations (G7, P8, P55) to serve as base sites and far remote references together with 3 adjacent observatories (HEL, NGK and BEL). This approach permits to apply effective noise suppressing data processing procedures relied upon simultaneous observations and, finally, to construct a reliably estimated joint set of array-wide inter-station and local transfer functions (TF).

The paper starts from a brief description of the general data processing approach implemented in the PRC-MTMV software system (Varentsov et al., 2003; Varentsov, 2005) primarily applied for the multi-site TF estimation in the EMTESZ-Pomerania EM array sounding. It further presents a new RRMC technique, which is based on the remote reference (RR) scheme and implies the data sorting strategy for partial TF estimates with the account for several criteria exploiting the spatial-frequency homogeneity of the horizontal magnetic field related to the MT signal. This technique was originated in the frames of the EMTESZ-Pomerania project following the goal to construct trustworthy TF data ensemble overcoming the severe correlated cultural noise met at many of array sites, primarily, due to the current leakage from the DC-railway system (Palshin and Smirnov, 2005).

2. Techniques for multi-site TF estimation in simultaneous EM soundings

A number of data processing techniques have been applied in the EMTESZ-Pomerania project to cross-verify the estimates in the presence of strong noise. In this study we will concentrate mainly on the results of the Troitsk team (GEMRC IPE RAS) obtained with a help of PRC_MTMV processing system.

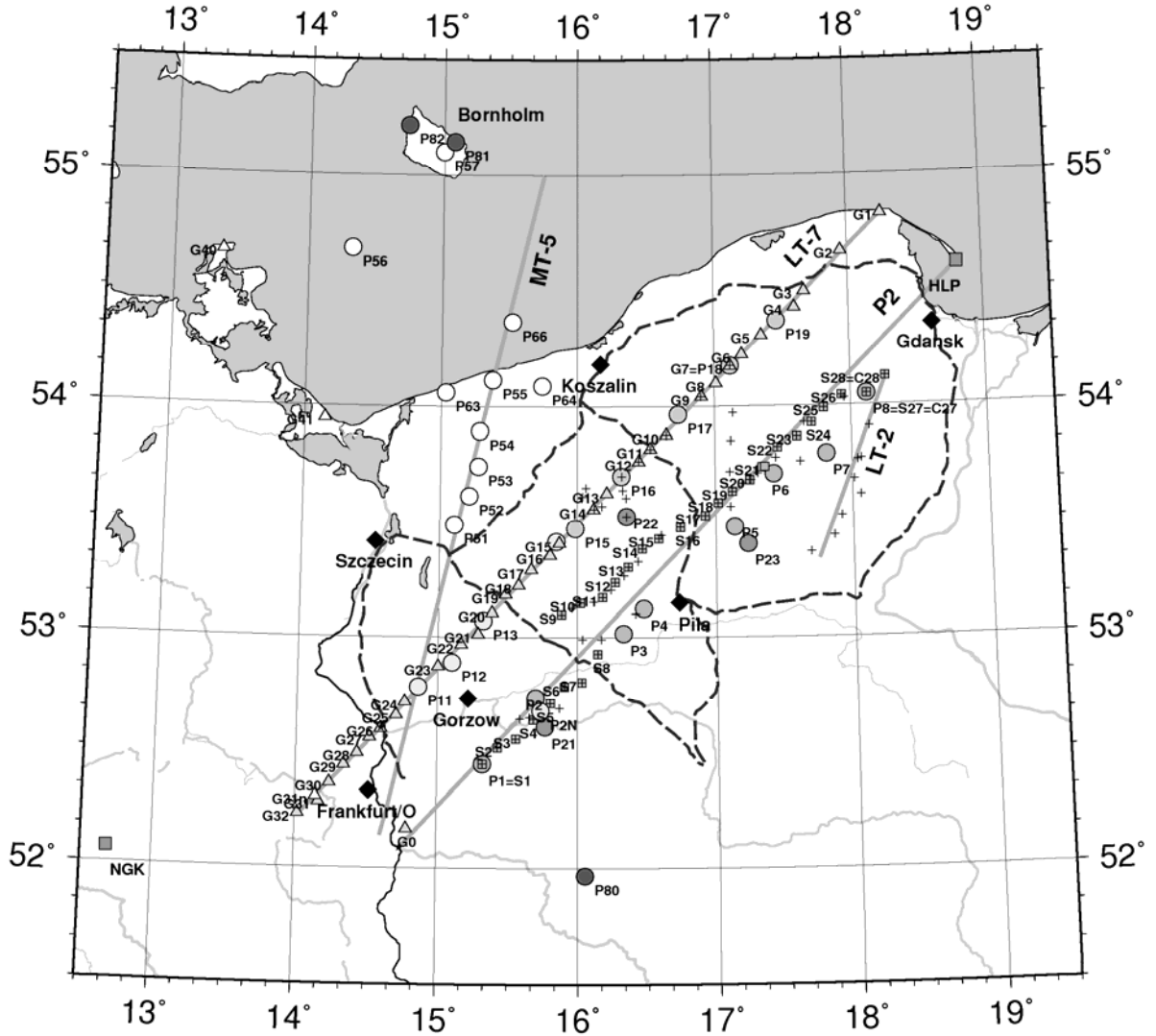


Figure 1. The EMTESZ-Pomerania array of EM soundings (Varentsov et al., 2005): Gxx (triangles) – German, Pyy (circles) – Polish, Szz (squares) - Swedish LMT sites, crosses – Czech, German and Swedish audio-MT sites; NGK and HLP (boxes) – geomagnetic observatories; dashed lines – DC railways.

The following set of transfer operators estimated for simultaneous MT and MV soundings in the frequency domain combines the local operators:

impedance $\mathbf{Z}$,
$$\mathbf{E}_h(r) = \mathbf{Z}(r) \mathbf{H}_h(r),$$

tipper $\mathbf{W}_z$,
$$\mathbf{H}_z(r) = \mathbf{W}_z(r) \mathbf{H}_h(r),$$

and inter-station (simultaneous) operators, connecting the geomagnetic components at the sounding (r) and remote (r_{RR}) sites:

horizontal magnetic tensor $\mathbf{M}$,
$$\mathbf{H}_h(r) = \mathbf{M}(r, r_{RR}) \mathbf{H}_h(r_{RR}),$$

simultaneous (regional) tipper $\mathbf{S}_z$,
$$\mathbf{H}_z(r) = \mathbf{S}_z(r, r_{RR}) \mathbf{H}_h(r_{RR}),$$

here indices $_h$ and $_z$ point to horizontal and vertical EM field components respectively.

The PRC_MTMV system provides the successive application of the following estimation schemes in the construction of the TF ensemble: single site (SS), remote reference (RR) and

multi-remote reference (mRR) (Varentsov et al., 2003; Ernst et al., 2002). The pre-processing techniques, used in the software, include multi-record time domain data conversion into first differences with further peak/jump/linear trend elimination. Then follows the high-resolution spectral analysis (within a FFT procedure) for large overlapping windows from 1 to 256 Ksamples and the calculation of partial (single extent) TF estimates. The further sorting of these partial TF estimates implies global (data rejection for the whole record extent) and local (rejection for a period) selection of the acceptable data according to several coherency-based (input and mutual) criteria. Then the multi-level robust stacking of selected partial TF estimates applies in a bi-coordinate scheme with the multi-extent and multi-period smoothing. The next stacking level implies the averaging of partial estimates obtained for the sequence of time record extents for a fixed time-window length. Then the robust multi-window averaging takes place operating with the results obtained for a set of increasing time-windows. This level gives a specific protection from non-stationary noise events with relatively narrow spectra. The final stacking level is the multi-RR (mRR) estimation for a set of different remote sites.

The PRC_MTMV processing system incorporates the following options of the accuracy control: the fit of single-record estimates, the fulfilment of the dispersion relations (DR) for the local TF responses (Ernst et al., 2002) and the comparison of different transitive estimates for inter-station ones (Varentsov et al., 2003).

The experience in the processing of simultaneous MT/MV array data within the BEAR (Baltic Electromagnetic Array Research) deep sounding project (Varentsov et al., 2003; Varentsov, Sokolova, 2003) has proved the effectiveness of conventional coherency weighting and multi-RR technique applied for the suppression of low coherent industrial noise in the short-period band as well as the source effects in middle and long-period range of TF estimation. However, during the EMTESZ-Pomerania experiment, when strong coherent noise was met in the vicinity of DC-railways, this RR estimator appeared to be ineffective. We got a strong need to equip our processing algorithms with specific tools directly fighting highly coherent noise effects.

3. RRMC scheme - remote reference with magnetic control

The dominant local coherent noise sources, like DC-railways, make EM fields at noisy record extents highly coherent, both locally, turning impedance and tipper partial estimates far away from the plane wave responses (Junge, 1996), and regionally, forcing strict variations in the inter-station TF data. The conventional robust stacking cannot properly handle strongly contaminated sets of partial estimates because the conventional coherency sorting fails to reject the noisiest data. A new sorting strategy to discriminate the most unfavourable record extents can be based on the control of the horizontal magnetic field spatial variability in the area between the sounding site and several selected remotes, which can be relatively low for the MT signal and high enough for local noise sources (Ritter et al., 1998). Such an approach requires for the joint estimation of local $\mathbf{Z}/\mathbf{W}_z$ operators with the horizontal magnetic tensor $\mathbf{M}$ and may be abbreviated as **RRMC** (RR-estimator with “**M**agnetic **C**ontrol”).

Three MC sorting criteria are jointly applied to partial $\mathbf{M}$ -tensor estimates in our current RRMC procedure (Varentsov and Sokolova, 2004; Varentsov, 2005), namely:

the variability criterion: $\mathbf{M}$ -tensor should be close to *a priori* expectations ($\mathbf{M}^0$, unit, as default), implied by the geoelectric structure, i.e. the misfit $\|\mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{RR}) - \mathbf{M}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{RR})\|$ should be small;

the reciprocal criterion: the product of direct and “inverse” estimates of the horizontal magnetic tensor between the sounding and remote sites should be close to unit operator, i.e. the misfit $\|\mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{RR})\mathbf{M}(\mathbf{r}_{RR}, \mathbf{r}) - \mathbf{I}\|$ should be small;

the coherency criterion: the mutual coherency of partial $\mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{RR})$ estimates should be high.

These criteria are applied both locally (at each estimation period) and globally (at a record extent in average for the whole estimation period range). The conventional criteria, limiting the input coherency of local horizontal magnetic fields to exclude strict linear polarization effects (Varentsov et al., 2003), can also be effectively applied in the presence of the coherent noise, while the mutual coherency thresholds for $\mathbf{Z}/\mathbf{W}_z$ are set in this case to quite low values. The partial estimates passing two conventional and three MC sorting criteria enter the multi-level stacking procedure outlined in Sec. 2, which gives the final multi-RRMC response.

The first MC criterion was initially suggested in (Ritter et al., 1998). It can be most effectively implemented with the use of the preliminary estimated “stationary” response $\mathbf{M}^0$. A trivial unit approximation $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$ also works, but needs more efforts in the selection of the related threshold. The reciprocal criterion is better scaled, and it is easier to select the threshold for it. The idea to exploit M-tensor reciprocal properties was also used in (Pek, 2004) for the quality control of the final estimation results, however, in our case it is applied much earlier for the sorting of partial estimates, and thus serves to improve the data quality. The third MC criterion is also important, because the mutual coherence in the RR estimation of the impedance or tipper is dependent on the quality of linear relations between both the local field components and the horizontal magnetic fields in the sounding and remote sites. In the presence of highly coherent noise it is advisable to reject directly partial estimates with a low quality of horizontal magnetic relations, independently of the level of the mutual $\mathbf{Z}/\mathbf{W}_z$ estimation coherency.

Finally, it should be stressed, that the tipper estimates appears to be the most sensitive to the coherent noise influence. Their amplitudes in this case rise up to and even high above the unit level. That is why in the tipper RRMC estimation we suggest also to limit the norm of its partial estimates as a forth MC criterion, just like it was done in (Garcia et al., 1997) for the control of sub polar source distortion effects.

4. Elimination of industrial EM noise effects in the EMTESZ-Pomerania TF data

The “magnetic control” approach in different implementations proved its effectiveness in regions with a high level of industrial noises, in particular, in Italy (Larsen et al., 1996), Scotland (Ritter et al., 1998) and north-eastern Germany (Oettinger et al., 2001). Varentsov and EMTESZ-Pomerania WG (2004) presented the first successful experience in the use of the RRMC scheme in the EMTESZ-Pomerania project. We consider below the project area with highly coherent EM noises in the vicinity of Krzyz–Choszczno segment of the Poznan–Szczecin DC railway, crossed with 2 LMT sounding profiles, LT-7 and P2 (Fig. 2).

The signal/noise separation procedure (Larsen et al., 1996) applied to the EMTESZ-Pomerania data at several sites in the vicinity of the mentioned railway (Palshin and Smirnov, 2005) shows that the coherent noise (CN) in the observed EM field is maximal in the period

range of 20-300 s and for the measurements at the LT-7 profile done in 2004 year, when the magnetic activity level was substantially weaker than for sites at the P2 profile in 2003 year. Correspondingly the distance from this railway to the sites, where the coherent noise prevails over the MT signal, changes from 20-30 km (at LT-7) to 10-15 km (at P2). The CN data have quite comparable spectral intensities in different directions, but they are dominant in the northern electric field, because this component of the MT signal is significantly weaker than the eastern one. Naturally, almost the same regularities are observed in the distributions of TF distortions, caused by DC trains.

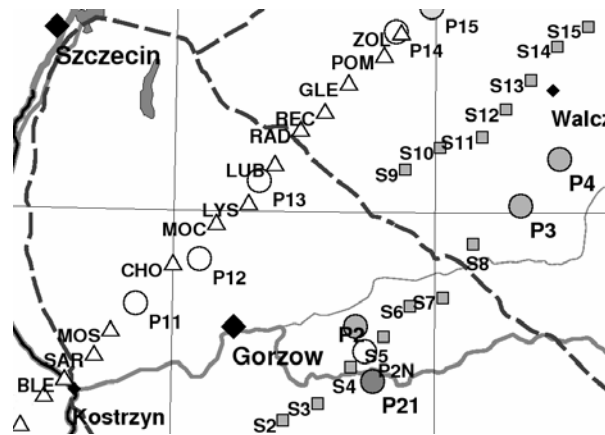


Figure 2. The map of LMT sites crossing the Poznan – Szczecin DC railway (dashed line) at the P2 (2003) and LT-7 (2003-2004) profiles of the EMTESZ-Pomerania experiment.

Fig. 3 presents the results of SS, RR and RRMC estimation of the impedance at the site S07 at the P2 profile, located 8 km apart from the DC railway (Fig. 2). The “northern” impedance Z_{xy} exhibits highest distortions of SS estimates: the phase in the period range of 10-1000 s is strictly shifted to the zero, while the amplitude has a false maximum. The conventional RR estimates for different remotes are shown in different colours at the left panel. They are practically similar to SS responses for 3 closest sites S06, S08, S05 (at distances of 9, 10 and 18 km) and are still disturbed for remote sites S13-S16 (at distances of 60-90 km). Only for remotes P07 and P08 (at distances of 160 and 195 km) noises seem to be suppressed.

The RRMC algorithm effectively eliminates distortions for most of remotes (starting from S05 in 18 km from the railway), rejecting up to 90-95% of partial estimates (Fig. 3, right panels). The following multi-RRMC robust averaging for all the remotes at 18-200 km distances (and even for a part of them at 18-90 km) gives quite acceptable amplitude estimates. But note the obvious difference between the long period RR and RRMC phases even for the most distant remotes P07 and P08. We really need such far remotes and the MC sorting to get reliable phase estimates.

Another important view on the EM noise effects at the sites S05-S10, closest to the railway, is presented for the tipper estimates in Fig. 4. In the left panel real induction arrows, calculated for strongly distorted SS tipper estimates and given in Wiese convention, clearly point to the railway at sites S06-S08 till the period of 512 s. The effectiveness of the mRRMC “cleaning” for these data is shown in the right panel, where the railway becomes almost “invisible”.

The next figure compares pseudo sections of the “cleaned” mRRMC and the distorted SS estimates for real induction vector lengths (Fig. 5a) and Z_{xy} impedance phases (Fig. 5b) along the whole P2 profile. The mRRMC estimator was constructed for a number of remote

sites ranging from 3 to 6 at distances greater than 50 km, including the observatories (BEL, HLP and NGK). The mRRMC data are almost free from strict distortions, clearly seen in the SS pseudo sections as the strongest tipper anomalies at periods around 50-100 s and impedance phases approaching the zero.

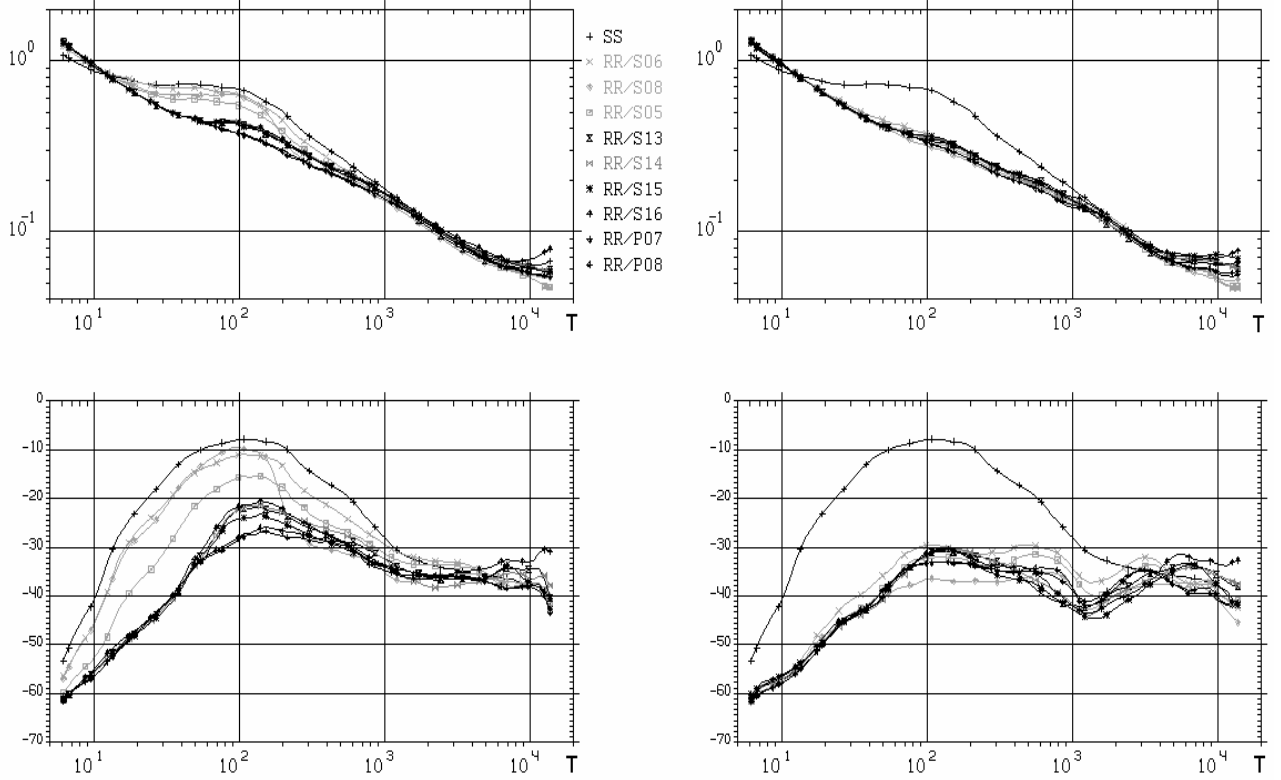


Figure 3. The results of SS, RR (left) and RRMC (right) estimation of Z_{xy} impedance at the site S07 (amplitudes in practical units at top panels, phases in degrees at the bottom ones).

The next figure compares pseudo sections of the “cleaned” mRRMC and the distorted SS estimates for real induction vector lengths (Fig. 5a) and Z_{xy} impedance phases (Fig. 5b) along the whole P2 profile. The mRRMC estimator was constructed for a number of remote sites ranging from 3 to 6 at distances greater than 50 km, including the observatories (BEL, HLP and NGK). The mRRMC data are almost free from strict distortions, clearly seen in the SS pseudo sections as the strongest tipper anomalies at periods around 50-100 s and impedance phases approaching the zero.

The impedance and tipper mRRMC estimation can be further improved with the switch in the “variability” MC criterion from the currently used simplest assumption $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$ to the final robust $\mathbf{M}$ -tensor estimate. Even the conventional two-site $\mathbf{M}$ -tensor estimation scheme (without the use of RR approach, which requires simultaneous records at 3 sites) results in sufficiently “clean” responses. In fact, Fig. 6 presents invariants, namely, principle amplitudes and directions (Varentsov, 2005; Varentsov et al., 2004, 2005) of such $\mathbf{M}$ -tensor estimates at the same sites and periods as for induction arrows in Fig. 4, hardly displaying any influence of the railway.

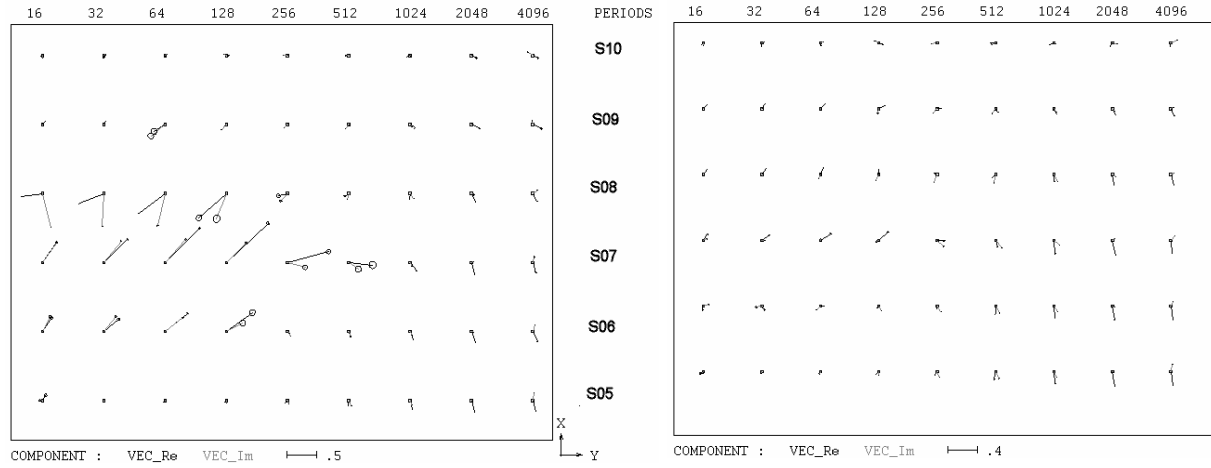


Figure 4. The spatial-period image of induction arrows (Re and Im, Wiese convention) for the SS (left) and mRRMC (right) tipper estimates at 6 sites (S05-S10) along the P2 profile segment; arrows are presented in geographical coordinates with scales indicated below panels; the railway passes between S07 and S08 sites in the NNE direction.

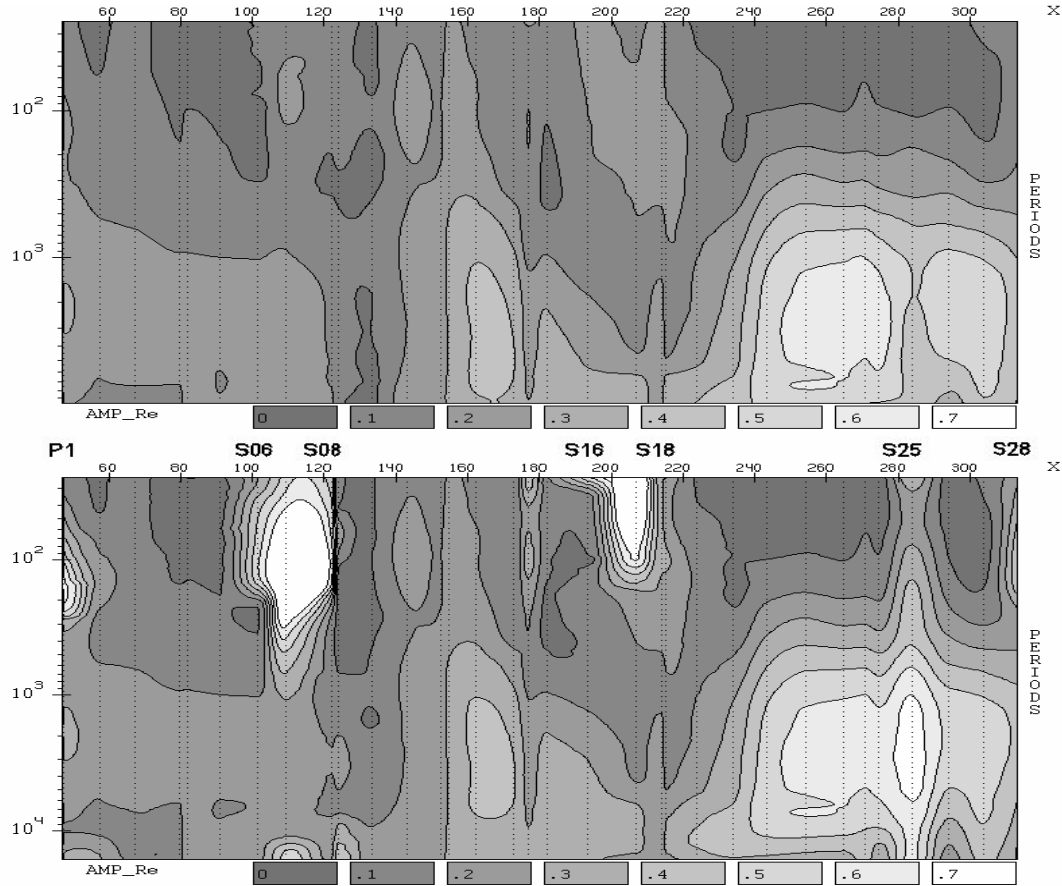


Figure 5a. The pseudo sections of mRRMC (top) and SS (bottom) estimates of real induction arrow lengths along the whole P2 profile; DC-railways cross the profile between sites S06 and S08, S16 and S18; the airport is located at the left end of the profile close to site P1.

The impedance and tipper mRRMC estimation can be further improved with the switch in the “variability” MC criterion from the currently used simplest assumption $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$ to the final robust $\mathbf{M}$ -tensor estimate. Even the conventional two-site $\mathbf{M}$ -tensor estimation scheme (without the use of RR approach, which requires simultaneous records at 3 sites) results in

sufficiently “clean” responses. In fact, Fig. 6 presents invariants, namely, principle amplitudes and directions (Varentsov, 2005; Varentsov et al., 2004, 2005) of such **M**-tensor estimates at the same sites and periods as for induction arrows in Fig. 4, hardly displaying any influence of the railway.

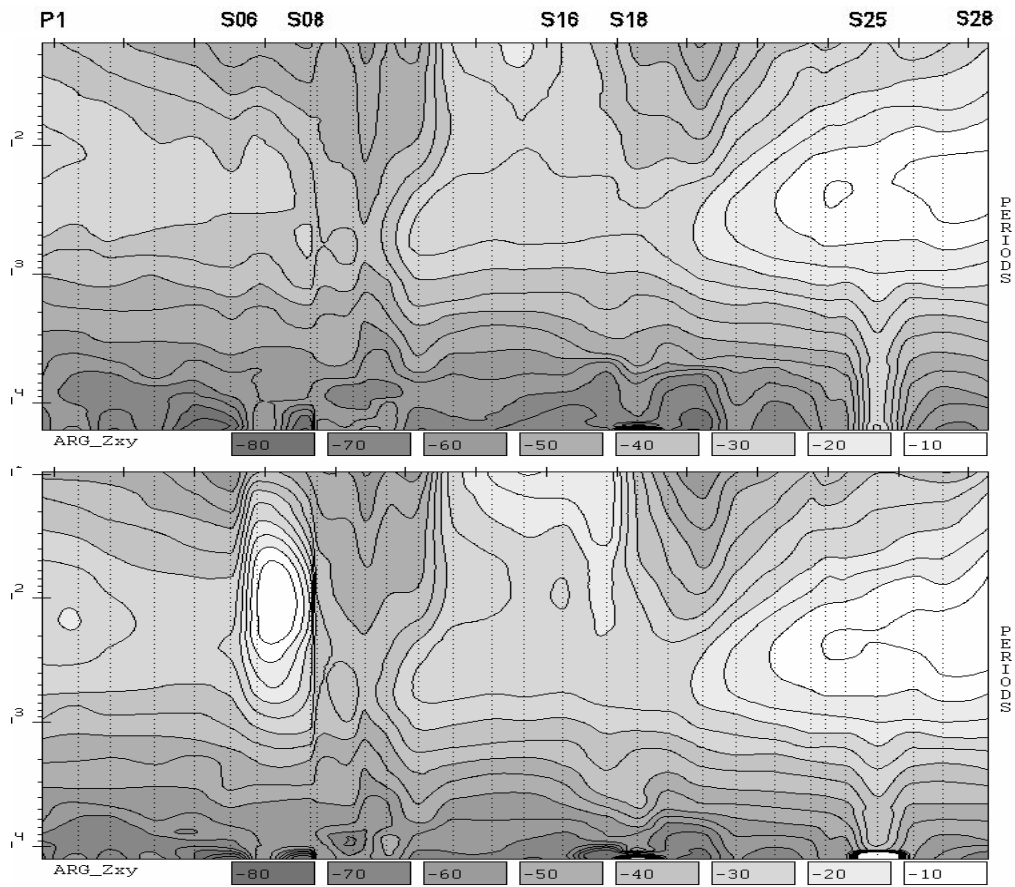


Figure 5b. Pseudo sections of mRRMC (top) and SS (bottom) estimates of Z_{xy} impedance phases along the whole P2 profile, see legend to Fig. 5a.

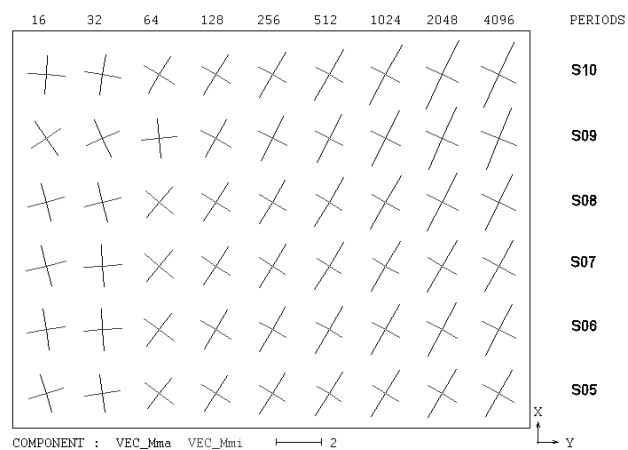


Figure 6. The spatial-period image of minimal and maximal amplitudes and azimuths of the **M**-tensor (given as crosses) at 6 sites (S05-S10) from the same P2 profile extent as in Fig. 4.

The MC sorting criteria are now implemented in the mentioned two-site **M**-tensor estimation procedure and with this enhancement we recently reprocessed data at a number of “critical” Pomeranian sites located close to railways to improve the final horizontal magnetic tensor estimates.

5. Temporal monitoring of partial impedance estimates at “noisy” and “clean” sites

The deeper insight on the specific features of the TF distortions caused by EM noise effects typical in Pomerania may be obtained in the course of the temporal monitoring of partial impedance estimates, using the approach developed by Sokolova (2002), Varentsov and Sokolova (2003). Two 5.5 days long simultaneous data records at very noisy site S07 and almost clean P8 (Fig. 1) were analysed at a sequence of non-overlapping 4.5 hour long extents. Fig. 7 presents Z_{xy} pseudo sections, revealing the temporal variability of partial SS estimates in a broad period range in the comparison with the final mRRMC estimates, placed in 3 left and right side columns on each plot. The moderate temporal variability observed at the site P08, far distant from the DC railway, seems to be controlled by the local signal/noise ratio primarily dependent on the MT source intensity. On the contrary, the pseudo section for the site S07 at the periods up to 500 s represent dominantly the responses of the coherent DC-events, and only in the morning hours, when the MT source intensity (in particular, for magnetospheric pulsations) is maximal (Palshin and Smirnov, 2005), rare extents favourable for the unbiased estimation can be found.

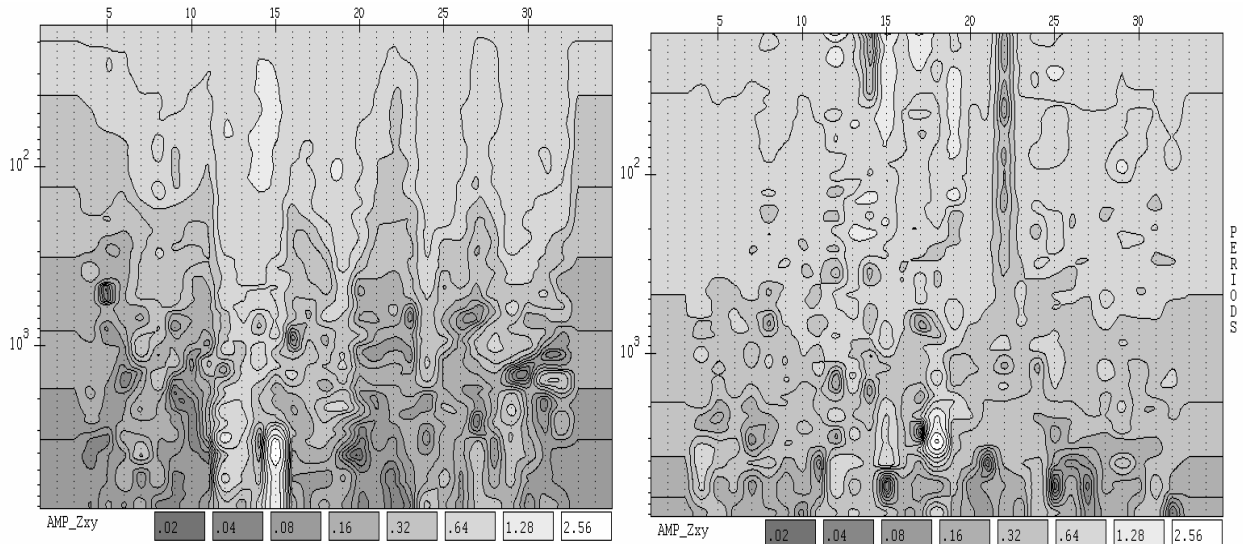


Figure 7. Temporal variability pseudo sections of Z_{xy} amplitude of SS partial estimates at 4.5 hour long non-overlapping record extents at sites S07 (left) and P8 (right); the horizontal axis gives record extent numbers, the vertical axis gives periods (s); three leftmost and rightmost columns at both panels present corresponding final mRRMC responses.

A different view on the temporal monitoring results is given in Fig. 8 in the form of Z_{xy} amplitude histogram at the site S07 and the period of 32 s for the same SS partial estimates as in Fig. 7. Two dominant modes are obviously traced in the histogram with amplitudes about 0.8 and 0.5, respectively. The first, most numerous cluster corresponds to intensive DC noise events (Fig. 3, SS amplitude curves), the second, considerably less numerous, represents extents with sufficient intensity of the MT signal. Amplitudes in this second cluster correspond to the level of the final mRRMC estimate (Fig. 7, side columns in the left panel). In the conditions of a middle range geomagnetic activity in 2003 the number of extents

favourable for MT transfer function estimation counts at least in few percents even at sites 10 km close to DC railways. The RRMC technique effectively focuses the estimation at these extents.

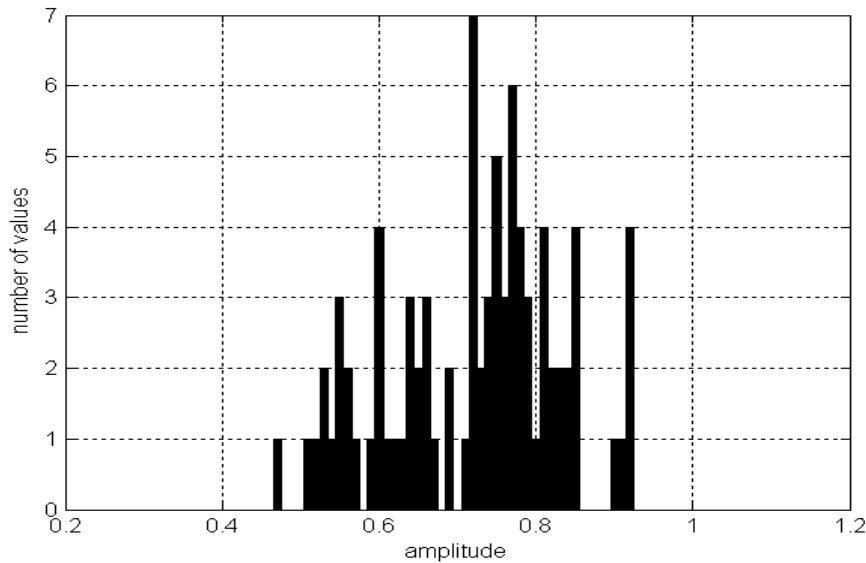


Figure 8. The histogram of Z_{xy} amplitudes at the site S07 and period of 32 s for single site partial estimates already shown in Fig. 7.

However, at few sites from the LT-7 profile, located closer than 20 km to DC railways and observed in 2004 at a lower geomagnetic activity level, the improvement in the mRRMC estimates looks considerable, but not sufficient. Only the final $\mathbf{M}$ -tensor estimates at these sites obtained in the two-site scheme with the MC sorting seems to be completely acceptable.

6. Application of the RRMC technique in the industrial Nizhniy Novgorod area

Finally we demonstrate the effectiveness of the developed RRMC approach in the data processing of the simultaneous broadband MT survey carried out in the urban area of the Nizhniy Novgorod region (Yakovlev et al., 2002). This area is also characterized with a strong and highly coherent EM noise, produced by a number of sources of different nature, including power plants and lines, a dense railway system and a network of pipelines. The considered simultaneous sounding was performed with 3 Phoenix MTU-5 systems during two 20-hour intervals. The most distant remote site was located in the countryside about 100 km from the observation site.

Fig. 9 presents a set of different impedance estimates obtained both with our PRC_MTMV and the standard Phoenix software. We see dramatic distortions in both single-site estimates (amplitude and phase) in the period range of 1-30 s. The conventional RR estimators even for the carefully selected distant remote site cannot overcome these distortions. Only in the frames of the RRMC approach the amplitude estimates preserve the monotonous decrease with a period and both main impedances display the comparable shape in the noisy period range.

7. Conclusions

The new RRMC technique was developed in the course of the EMTESZ-Pomerania data processing work, which provides an effective suppression of the bias effects from the DC-

railways and other dominant industrial noise sources. The essence of this technique is the application of an additional TF sorting strategy, based on the variability of the horizontal magnetic field spatial structure between the sounding and remote sites. The MC-sorting serves as an important resource in the estimation of local and inter-station responses. The multi-RR technique is now better equipped to meet the danger of highly coherent local and regionally distributed noise.

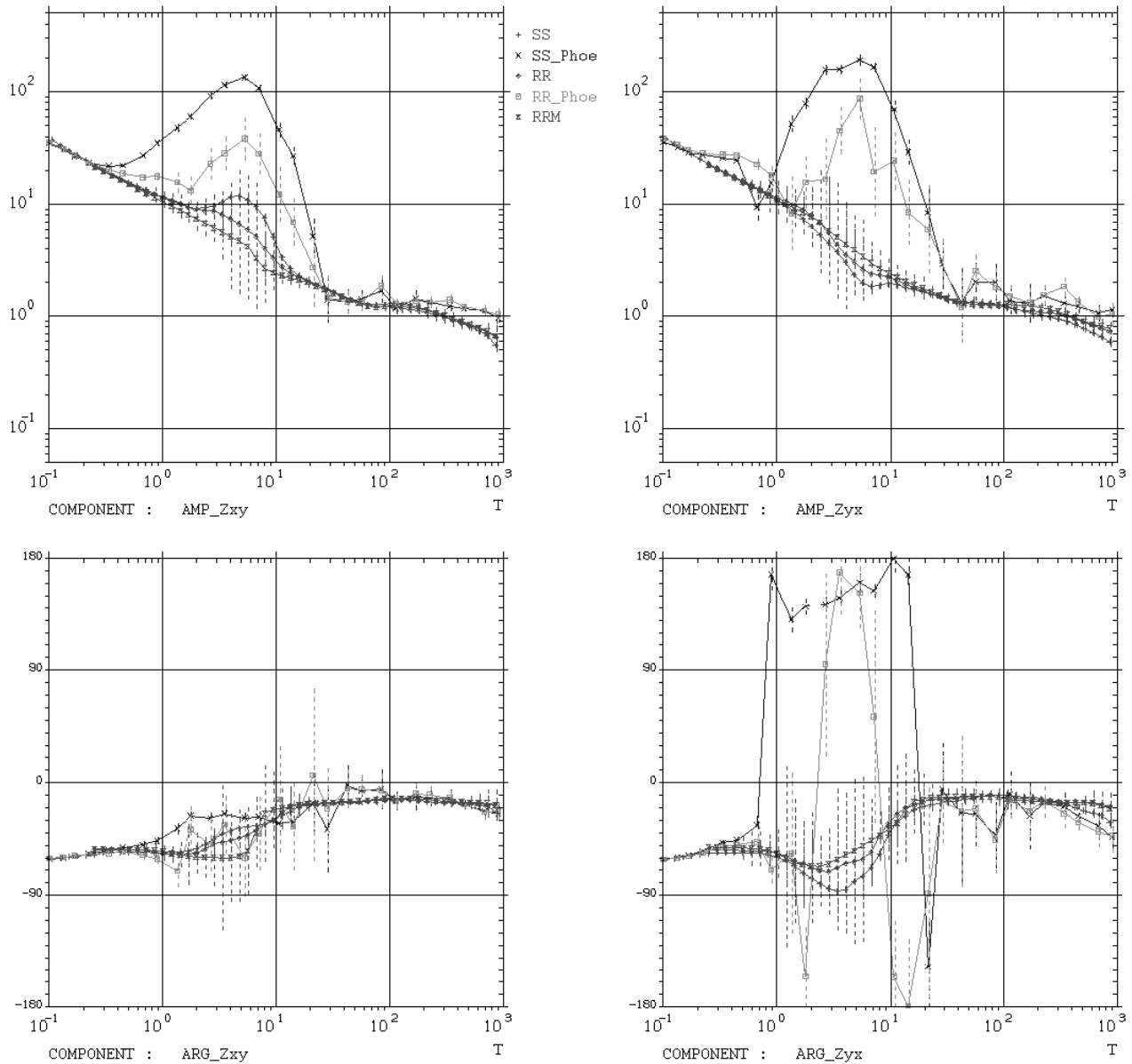


Figure 9. The period dependence of two main impedance estimates (amplitudes at top panels and phases at bottom ones) for the site in the industrial area in Nizhniy Novgorod region: single-site responses estimated in the PRC_MTMV system (SS) and obtained with the Phoenix data processing software (SS_Phoe); corresponding remote reference estimates (RR and RR_Phoe) and, finally, our RRMC estimate (RRM).

The developed approach in the Pomeranian conditions makes possible to concentrate the robust estimators at small, but favourable portion (till the very first percents) of the available data. It improves estimates for distant remotes (at hundreds of km), cleans results for medium remote separations (30-100 km) and thus simplifies the selection of remote sites for the multi-

RRMC procedure. An encouraging experience is obtained in the use of adjacent geomagnetic observatories as distant and long-term operating remotes.

All these efforts brought for the whole EMTESZ-Pomerania array (with very few exception sites) the reliable estimation of the impedance in the period range of 10-10000 s, of the tipper in the range of 30-10000 s, and of the horizontal magnetic tensor in the range of 60-20000 s. And at many sites with long enough observations, especially at the LT-7 profile, the longest estimation periods for the impedance and the **M**-tensor were further extended. The comparably good quality was achieved for different TF data components, main and additional, amplitudes and phases.

We advanced in the understanding, how the arrays of simultaneous EM soundings serve for the quality increase in the estimation of local TF operators based on the simultaneous analysis of multi-site data records. The unique experience in the construction of the array-wide system of inter-station geomagnetic responses from a series of observation campaigns is obtained. Several steps are made towards the construction of a new generation of multi-site data processing procedures, jointly estimating a number of EM field transfer operators with a deep exploiting of there specific features and inter-relations.

Acknowledgements

We would like to thank our colleagues in EMTESZ-Pomerania WG and in Russian North-West Ltd. geophysical company for effective joint efforts in the analysis of the data considered in the paper. This work was supported by DFG-RFBR Grant 03-05-04002 and NATO Collaboration Linkage Grant EST.CLG.980126.

References

- Brasse, H., Cerv, V., Ernst, T., Jozwiak, W., Pedersen, L.B., Varentsov, Iv.M., and EMTESZ-Pomerania WG, 2006. Probing the electrical conductivity structure of the Trans-European Suture Zone. *Eos Trans. AGU* (Submitted).
- EMTESZ-Pomerania WG, presented by Varentsov, Iv.M., 2004. EMTESZ-Pomerania: an integrated EM sounding of the lithosphere in the Trans-European suture zone (NW Poland and NE Germany). XVII Workshop on EM Induction in the Earth (Abstracts). Hyderabad, India, 133-134.
- Ernst, T., Sokolova, E.Yu., Varentsov, Iv.M., and Golubev, N.G., 2001. Comparison of two MT data processing techniques using synthetic data sets. *Acta Geophys. Pol.*, **49**(2), 213-243.
- Garcia, X., Chave, A.D., and Jones, A.G. 1997. Robust processing of MT data from the auroral zone. *J. Geomagn. Geoelectr.*, **48**, 1451-1468.
- Junge, A., 1996, Characterization of and correction for cultural noise, *Surv. Geophys.*, **17**, 361-391.
- Larsen, J.C. et al., 1996, Robust smooth magnetotelluric transfer functions, *Geophys. J. Int.*, **124**, 801-819.
- Oettinger, G., Haak, V, and Larsen, J.C., 2001. Noise reduction in magnetotelluric time-series a with a new signal-noise separation method and its application to a field experiment in the Saxonian Granulite Massif, *Geophys. J. Int.*, **146**, 659-669.

- Palshin, N.A., Smirnov, M.Yu., and EMTESZ-Pomerania WG, 2005. Characterization of the cultural EM noise. Study of geological structures containing well-conductive complexes in Poland, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., Warszawa, C-95(386), 87-96.
- Pek, J., 2004. The reciprocal criterion of the M-tensor accuracy. Private communication.
- Ritter, O., Junge, A. and Dawes, G.J.K., 1998. New equipment and processing for MT RR observations. *Geophys. J. Int.*, **132**, 535-548.
- Sokolova, E.Yu., 2002. Development of new methods for the analysis of deep EM soundings and their applications in regions of complex geoelectric structure, Cand. Sc. (Phys.-Math.) Dissertation, OIFZ RAN, Moscow (in Russian).
- Varentsov, Iv.M., 2005. Arrays of simultaneous EM soundings: methods of construction and analysis. *Electromagnitnye issledovaniya zemnykh neдр* (Ed. Spichak V.V.), Nauchny Mir, Moscow, 143-156 (in Russian).
- Varentsov, Iv.M., and EMTESZ-Pomerania WG, 2004. The estimation and analysis of horizontal magnetic inter-station transfer functions in the EMTESZ-Pomerania project. XVIII Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth (Abstracts), Hyderabad, India, 153-154.
- Varentsov, Iv.M., and Sokolova, E.Yu., 2004. The multi-site estimation of MT/GDS transfer functions with horizontal magnetic control. XVIII Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth (Abstracts), Hyderabad, India, 150.
- Varentsov, Iv.M., Sokolova, E.Yu., and BEAR WG, 2003. Diagnostics and suppression of auroral distortions in the transfer operators of the EM field in the BEAR experiment. *Izvestiya, Phys. Solid Earth*, **39**(4), 283-307.
- Varentsov, Iv.M., Sokolova, E.Yu., Martanus E.R., and EMTESZ-Pomerania WG, 2005. Array view on EM transfer functions in the EMTESZ-Pomerania project. Study of geological structures containing well-conductive complexes in Poland, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., Warszawa, C-95(386), 107-121.
- Varentsov, Iv.M., Sokolova, E.Yu., Martanus, E.R., Nalivayko, K.V., and BEAR WG, 2003. System of EM field transfer operators for the BEAR array of simultaneous soundings: methods and results. *Izvestiya, Phys. Solid Earth*, **39**(2), 118-148.
- Yakovlev, A.G. et al., 2002. The simultaneous broadband MT survey in the urban area of Nizhniy Novgorod region. Private communication.

Kanonische Kohärenzen - Indikator für kohärenten Noise

Juliane Hübert^{*,**} und Oliver Ritter^{*}

^{*}GeoForschungsZentrum Potsdam, Telegraphenberg D-14473 Potsdam,

^{**}Universität Potsdam, Institut für Geowissenschaften Karl-Liebknecht-Str. 24/25 D-14476 Golm

contact: jhuebert@gfz-potsdam.de

1 Einleitung

Die Magnetotellurische Tiefenondierung ist wegen ihrer Eigenschaften als elektromagnetisches Verfahren über ein breites Frequenzspektrum anfällig für Störsignale z.B. von Stromleitungen und vom Verkehrswesen. Um die Kontamination mit Störsignalen zu verringern, kommen vielfältige Verfahren aus der Statistik und die Methode des *remote-reference* zum Zuge. Für letzteres benötigt man die möglichst wenig veräuschten Daten einer Referenzstation. Die Diagnose einer solchen gestaltet sich manchmal schwierig, da eine Kontamination mit kohärentem Rauschen sehr subtil sein kann, aber ausgeschlossen werden sollte.

Nach [Egbert, 1997] kann man einen Ansatz aus der Multivariaten Statistik zu Hilfe nehmen, die *Kanonische Korrelationsanalyse* [Morrison, 1967], um die Korrelationsstruktur zwischen zwei Zufallsvektoren (hier zwischen den Fourierkoeffizienten der Zeitreihen von synchron aufzeichnenden MT-Stationen) zu bestimmen. Die *kanonischen Kohärenzen* beschreiben die Kohärenzdimension zwischen einer lokalen Station und mehreren anderen. Im Idealfall sollte diese zwei betragen, nach der Anzahl der Richtungen des Anregungssignals der Magnetotellurik. Gibt es nun Störquellen, die das Signal an mehreren Stationen beeinflussen, wird die Kohärenzdimension im gestörten Frequenzbereich größer.

Die kanonischen Kohärenzen helfen also zu identifizieren, ob Noise lokal oder auch weiträumiger auftritt.

2 Kohärenzen

Als Indikator für die Datenqualität wird häufig die bivariate Kohärenz verwendet, die das Verhältnis von vorhergesagtem Signal mit tatsächlich gemessenem, unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs (Übertragungsfunktionen Z) zwischen Eingangs- (Y) und Ausgangskanälen (X , wobei $*$ das komplex konjugierte beschreibt) beschreibt:

$$X = Z_1 \cdot Y_1 + Z_2 \cdot Y_2 \quad (1)$$

$$r_b^2 = \frac{Z_1 \cdot [Y_1 \cdot X^*] + Z_2 \cdot [Y_2 \cdot X^*]}{X \cdot X^*} \quad (2)$$

Die bivariate Kohärenz ist eine genormte Größe, deren Werte zwischen $[0,1]$ liegen. Bivariate Kohärenzen nahe 1 versprechen normalerweise gute Datenqualität, niedrige Kohärenzen können aus der Kontamination der Daten mit Noise resultieren.

3 Kanonische Kohärenzen

Die Kanonische Kohärenzen beschreiben die Korrelationsstruktur zwischen zwei multidimensionalen Vektoren X und Y , hier in der Anwendung zwischen drei synchron messenden MT-Stationen: X ist der frequenzabhängige Vektor der komplexen Fourierkoeffizienten der Zeitreihen (also Bx , By , Bz , Ex , Ey) für eine der fünfkkanäligen MT-Stationen (hier immer als die *lokale* Station bezeichnet), der Vektor Y besteht aus den Komponenten der zwei verbliebenen Stationen und i ist der Index der Zeitsegmente. Mit den Spektralmatrizen:

$$S_{11} = \sum X_i X_i^* \quad (3)$$

$$S_{12} = \sum X_i Y_i^* \quad (4)$$

$$S_{21} = \sum Y_i X_i^* \quad (5)$$

$$S_{22} = \sum Y_i Y_i^* \quad (6)$$

(* für komplex konjugiert) berechnen sich die Kanonischen Kohärenzen (ccs) als Eigenwerte von:

$$U(\omega) = S_{11}(\omega)^{-1} \cdot S_{12}(\omega) \cdot S_{22}(\omega)^{-1} \cdot S_{21}(\omega) \quad (7)$$

$$V(\omega) = S_{11}(\omega)^{-1} \cdot S_{21}(\omega) \cdot S_{22}(\omega)^{-1} \cdot S_{12}(\omega) \quad (8)$$

Von den fünf (nach der Anzahl der Kanäle) positiven, reellen Eigenwerten (alle im Intervall $[0,1]$) sind im Idealfall ohne die Kontamination mit kohärentem Noise und unter Annahme von homogenen Quellen nur zwei größer als Null. Die Kohärenzdimension beträgt also zwei nach der Anzahl der Anregungsrichtungen des MT-Signals.

In gestörten Frequenzbereichen dagegen können auch die restlichen Eigenwerte anwachsen. Benutzt man nun reihum jede Station als *lokale* Station, ist es möglich, den interstationären Noise zu charakterisieren, d.h. die Station zu identifizieren, die am wenigsten kohärentes Rauschen mit den anderen teilt.

Bei diesem Verfahren werden alle Kanäle gleichberechtigt betrachtet, d.h. die Kreuz- und Autospektren werden nicht in Ein- und Ausgangskanäle unterschieden.

4 Beispiele Parkfield 2005

Im Frühjahr 2005 wurden über der San Andreas Verwerfung nahe Parkfield/Kalifornien im DFG-Projekt DeepRoot 2005 vom GFZ ein MT-Profil mit Breitbandstationen sowie ein Array mit LMT-Stationen installiert (siehe hierzu die Beiträge von W. Wilhelms und M. Becken in diesem Band). An allen LMT-Stationen wurden für drei Tage während der Messkampagne auch Breitbanddaten registriert. Solche, bei denen dies gleichzeitig geschah, konnten zur Berechnung von kanonischen Kohärenzen herangezogen werden. Ziel dessen ist die Charakterisierung des interstationären Rauschens, sowie das Finden einer geeigneten Referenzstation für das *remote-reference*-Verfahren bei gestörten Stationen.

Im hier diskutierten Beispiel wurden die Zeitreihen dreier Stationen synchronisiert, schmalbandig gefiltert, in gleichlange Segmente (events) unterteilt und fouriertransformiert. Die Fourierkoeffizienten wurden in Unterbänder so unterteilt, dass die Zielfrequenzen auf einer logarithmischen Skala gleichverteilt sind. Anschließend wurden für jedes Unterband die Eigenwerte von Gleichung 7 berechnet, so erhält man für jede Zielfrequenz fünf ccs.

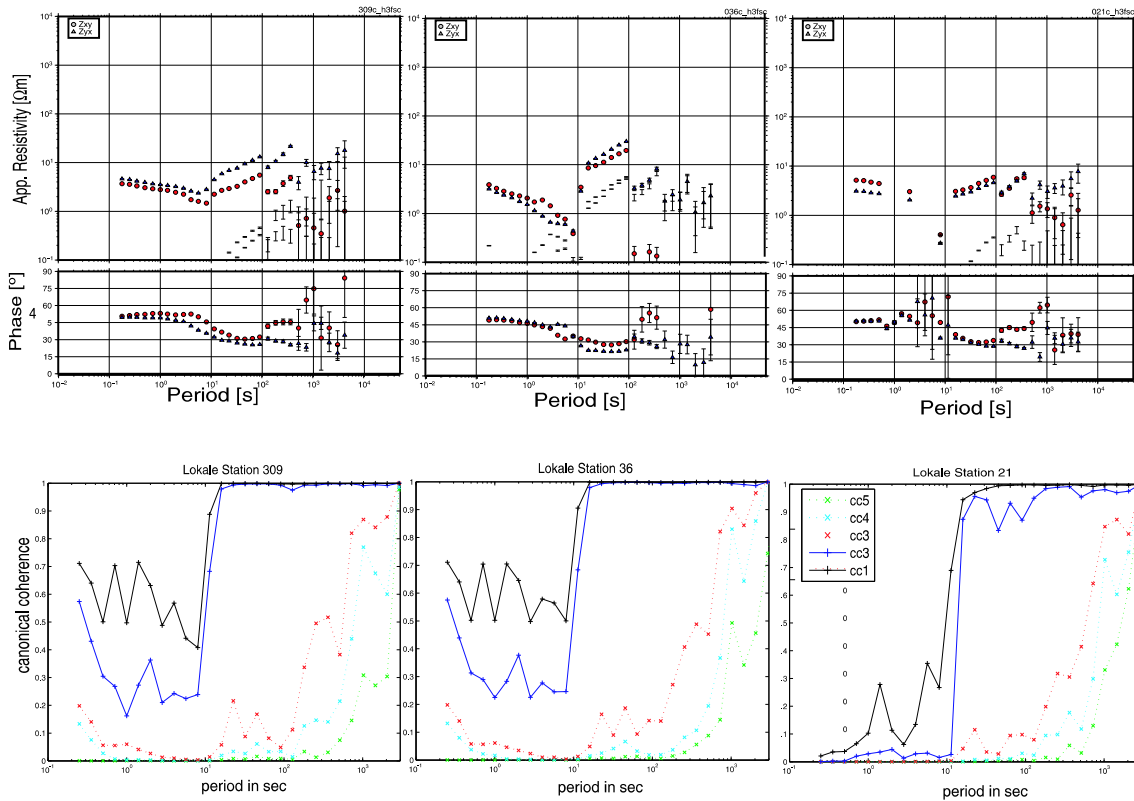


Abbildung 1: (oben) Single-Site-processing für Stationstripel 21 (links) 36 (mitte, beide im zentralen Teil des Profils) und 309 (rechts, ca. 20 km weiter nord-östlich). Übertragungsfunktion wurden bestimmt nach [Egbert, 1986]. Besonders die Stationen 21 und 36 sind im Bereich 1-10s gestört.

Abbildung 2: (unten) Kanonische Kohärenzen fürs Stationstrio 309, 36, 21. Bei Perioden $> 1s$ tritt fast der Idealfall ein: nur zwei ccs sind signifikant größer als Null, die Kohärenzdimension ist also 2, alle kürzeren Perioden aber sind gestört. Besonders Station 21 ist zwischen 1-10s stark verrauscht. Das Ansteigen aller ccs bei langen Perioden ($> 500s$) ist vermutlich auf die geringere Anzahl von Freiheitsgraden (< 10 events) in diesen Frequenzbereichen zurückzuführen.

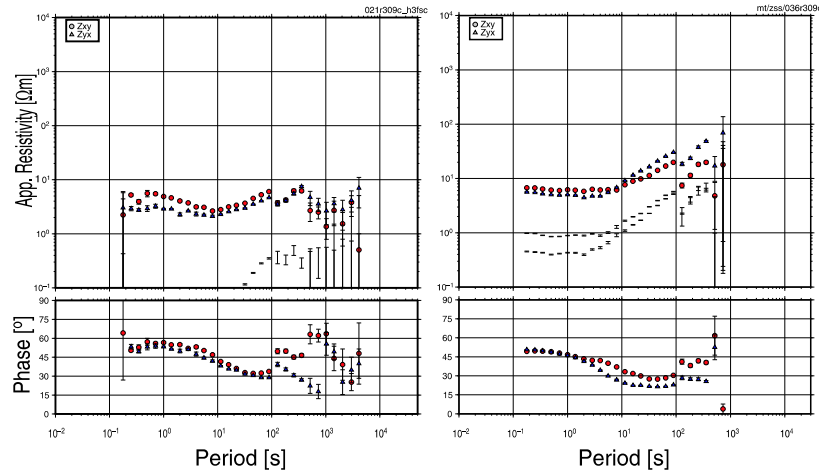


Abbildung 3: Ergebnis für remote-reference nach [Egbert, 1986] mit Referenzstation 309: deutliche Verbesserung im ehemals gestörten Frequenzbereich von Station 21 (links), auch bei Station 36 (rechts)

5 Offene Fragen und Ausblick

- ccs enthalten keine Informationen über die Amplitude des kohärenten Noise
- Berechnung der ccs für einzelne events ergibt keine sinnvollen Ergebnisse, Aufsummierung der Fourierkoeffizienten mehrerer Zeitsegmente ist nötig
- Verhalten bei langen Perioden unklar: Induktionsraum wird größer, also größere Kohärenzlänge, aber die Anzahl von events wird geringer, statistische Aussagen haben also weniger Gewicht
- Um die offenen Fragen zu beantworten sollen die ccs mit synthetischen Daten genauer untersucht werden: Test mit einzelnen verrauschten Kanälen, Bestimmung der Kohärenzlänge von Noise (örtliche Reichweite)...

Literatur

- [Egbert, 1986] Egbert, G. (1986). Robust estimation of geomagnetic transfer functions. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 87.
- [Egbert, 1997] Egbert, G. (1997). Robust multiple-station magnetotelluric data processing. *GJI*, 130.
- [Morrison, 1967] Morrison, D. (1967). *Multivariate Statistical Methods*. McGraw-Hill.

Einfluss von rotierten Feldern auf das Processing von MT-Zeitreihen

Andre Jung*, Ute Weckmann†

1 Einleitung

Eine der zentralen Aufgaben in der Interpretation magnetotellurischer (MT) Daten ist die Bestimmung der Streichrichtungen von elektrischen Strukturen. Insbesondere für eine 2D-Modellierung müssen die Übertragungsfunktionen getrennt nach TE (tangential elektrisch) und TM (tangential magnetisch) vorliegen. Dies wird durch eine Rotation des Impedanztensors nach dem Datenprocessing erreicht. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass es unerheblich ist, ob die Daten schon beim Stationsaufbau in der Orientierung des elektrischen Streichens registriert werden, sie vor dem Processing rotiert werden oder die Impedanzen vor der Interpretation rotiert werden. Wir haben jedoch beobachtet, dass sich die Ergebnisse bei verschiedener Vorgehensweise unterscheiden. Dies legt nahe, die Daten von vornherein in einem geeigneten Koordinatensystem auszuwerten.

2 Rotation von Zeitreihen und Impedanztensor

Die Formeln für die Rotationsmatrix und transponierte Rotationsmatrix lauten

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; R^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Aus den rotierten Feldern lässt sich (vor der Auswertung) ein Impedanztensor Z' berechnen.

$$\begin{aligned} E &= ZB \\ (RE) &= Z'(RB) \quad | \cdot R^T \\ (R^T R)E &= (R^T Z' R)B \\ E &= (R^T Z' R)B \\ Z &= R^T Z' R \end{aligned}$$

Eine Rotation des gemittelten Impedanztensors kann durch

$$R \cdot \begin{pmatrix} Z_{XX} & Z_{XY} \\ Z_{YX} & Z_{YY} \end{pmatrix} \cdot R^T = Z''$$

*ajung@gfz-potsdam.de, GeoForschungsZentrum Potsdam, Telegraphenberg, 14473 Potsdam, Germany and Universität Potsdam, Karl-Liebknecht-Str. 24/25, 14476 Golm, Germany

†uweck@gfz-potsdam.de, GeoForschungsZentrum Potsdam, Telegraphenberg, 14473 Potsdam, Germany

berechnet werden. Man kann zeigen, dass

$$Z' = Z''$$

gilt. Das heißt, aus mathematischer Sicht ist der Zeitpunkt der Rotation unerheblich.

3 Beispiele

Zur Demonstration wurde Station 85 aus Namibia (Abb.1, [3, 5]) mit starken 3D-Effekten und Station 67 aus Südafrika (Abb.2, [6]) mit geringerem 3D-Einfluß ausgewählt. Die Daten wurden mit dem EMERALD-Processing [2, 4] mit einem Kohärenzkriterium von 95% bearbeitet, wobei Events aussortiert wurden, die nicht in den erwartenden Quadranten fallen (Phasenkriterium). Bei beiden Stationen wurden die Zeitreihen **vor** dem Processing in unterschiedliche Koordinatensysteme rotiert, und anschließend die Impedanzen wieder in das Ursprungskoordinatensystem zurück transformiert. Dem mathematischen Ansatz zufolge sollten die Kurven deckungsgleich sein. An beiden Stationen zeigt sich, dass eine Rotation vor dem Processing häufig andere Impedanzen liefert als die Rotation der Ergebnisse. Die Ergebnisse lassen gerade zu längeren Perioden hin sehr unterschiedliche Interpretationen der Leitfähigkeiten zu.

Das Problem besteht vermutlich darin, dass das für die Impedanzberechnung am besten geeignete Koordinatensystem vor der Rotation noch nicht bekannt ist, und bei anschließender Rotation Anteile schlecht aufgelöster, kleiner Hauptdiagonalelemente die TE- oder TM-Übertragungsfunktionen wieder verschlechtern.

4 Rotation der E- und B-Felder im Larsen Processing

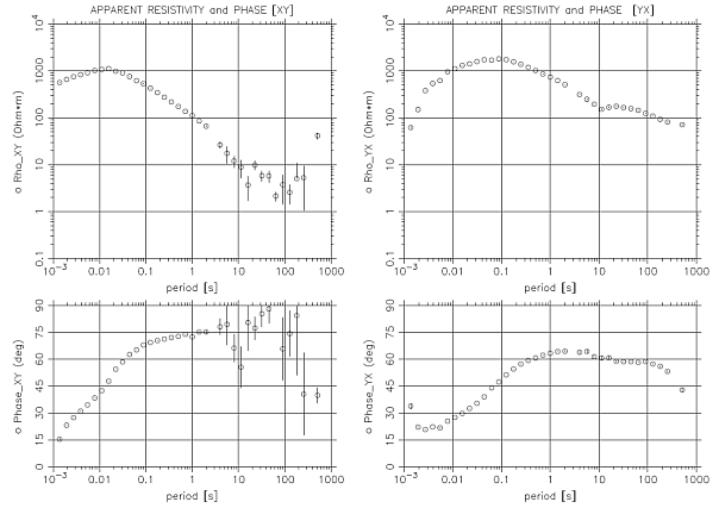
Larsen [1] schlägt vor die elektrischen Komponenten getrennt von den magnetischen Komponenten und **vor** der Impedanzberechnung zu rotieren. Die Maximierung einer E-Feldkomponente durch Rotation führt zu einer großen Komponente und einer kleinen Komponente. Anschließend werden die magnetischen Komponenten so rotiert, dass eine der magnetischen Komponenten maximale Kohärenz mit der elektrischen Hauptkomponente aufweist. Durch diese Methode der getrennten Rotation von E- und B-Feldern kann der Winkel zwischen E- und B-Feldern von 90° abweichen. Die Auswirkungen der getrennten Rotation auf die resultierenden Impedanzen sind bislang nicht tiefergehend untersucht.

5 Diskussion und Ausblick

Für die Unterschiede zwischen rotierten Daten und rotiertem Impedanztensor könnte die robuste Gewichtung der Tensorelemente während des Processings verantwortlich zu sein. Die Hauptdiagonalelemente sind häufig klein und schlecht aufgelöst. Die Rotation des Impedanztensors kann nachträglich zu einer Verschlechterung der größeren, besser bestimmten Nebendiagonalelemente führen.

In meiner Diplomarbeit möchte ich folgende Ansätze verfolgen:

unrotierte Daten



rotierte Daten

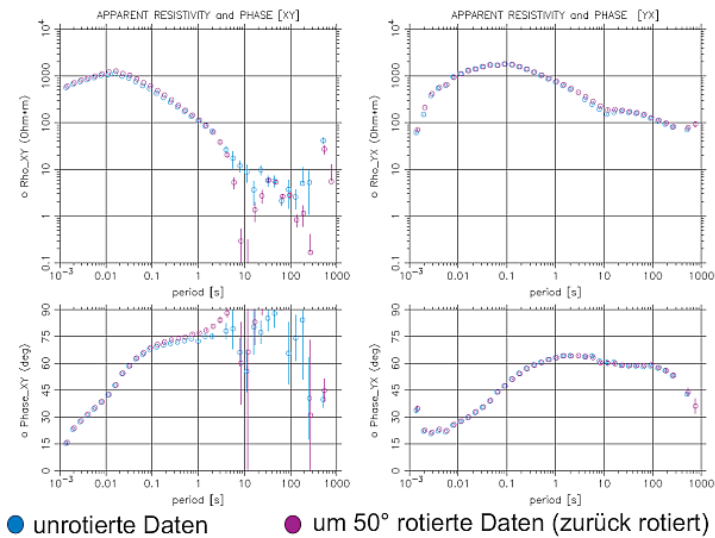
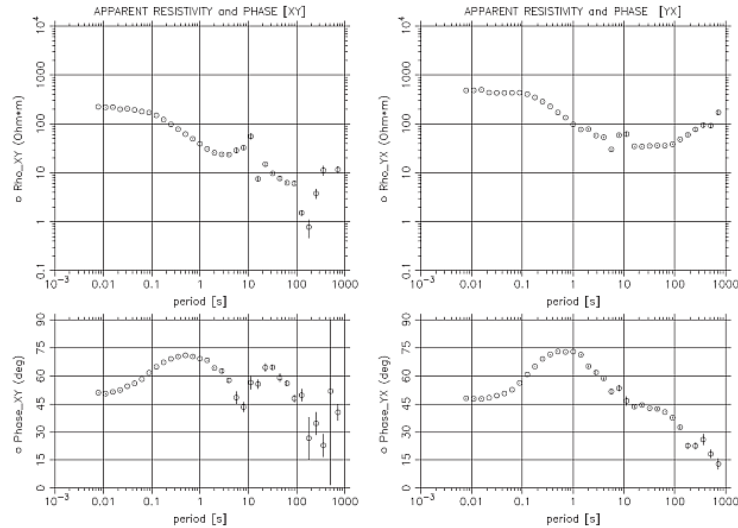


Abbildung 1: **Station 85, Namibia.** Eine Interpretation der XY-Komponente ist aufgrund von Rauschen ab 2s kaum möglich. Bei den Daten, die vor dem Processing um 50° rotiert wurden, und anschließend wieder zurück rotiert wurden, scheint die Phase bis 5s gut aufgelöst zu sein und deutet auf einen stetigen Verlauf der Phasen in den nächsten Quadranten hin. Dieser Verlauf scheint bei den unrotierten Daten nicht ausgelöst zu sein. Auch die Werte für den scheinbaren Widerstand liegen in wesentlich niedrigeren Bereichen als die der unrotierten. Die YX-Komponente ist in beiden Fällen sehr gut aufgelöst. In diesem Fall gibt es kaum Abweichungen zwischen unrotierten und rotierten Daten.

unrotierte Daten



rotierte Daten

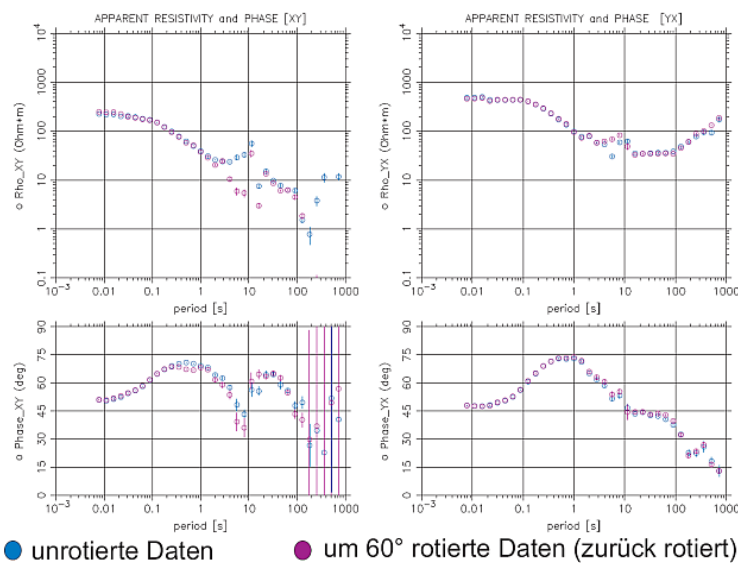


Abbildung 2: **Station 67, Südafrika.** Im unrotierten Zustand sind die scheinbaren Widerstands- und Phasekurven der XY-Komponente ab 10s sehr schlecht aufgelöst. Die schlechte Datenqualität wird bei den um 60° rotierten anhand der Phase noch deutlicher. Auch hier wurden die Daten vor dem Processing rotiert, und der resultierende Impedanztensor wieder zurück rotiert. Die YX-Komponente ist in beiden Fällen wesentlich besserer Qualität. Bei XY- und YX-Komponente deuten die Werte für ρ_a im Bereich von 2s bis 10s auf völlig andere Widerstandsveränderungen hin. In diesem Periodenbereich sind beide Komponenten gebiast. Allerdings ist in der XY-Komponente zwischen 0.2s und 1s ein anderer Phasenverlauf zu beobachten.

- Auswirkung von E- und B-Feldern, die in unterschiedliche Koordinatensysteme gedreht sind, auf die Impedanzen. Dies kann anhand einer Kreuzkorrelation vor dem Processing erreicht werden.
- Berechnung des Rotationswinkels anhand des Impedanztensors nach Methoden wie z.B. Swift, Bahr, Phasentensor, min/max Kohärenz. Anschließend werden die Daten bei einem 2. Durchlauf der Tensorberechnung unter Berücksichtigung dieses Winkels rotiert.

Literatur

- [1] J.C. Larsen, R.L. Mackie, A. Manzella, A. Fiordelisi, and S. Rieven. Robust smooth magnetotelluric transfer functions. *Geophysical Journal International*, 124:801–819, 1996.
- [2] O. Ritter, A. Junge, and G.J.K. Dawes. New equipment and processing for magnetotelluric remote reference observations. *Geophysical Journal International*, 132:535–548, 1998.
- [3] O. Ritter, U. Weckmann, T. Vietor, and V. Haak. A Magnetotelluric study of the Damara Belt in Namibia 1. Regional scale conductivity anomalies. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 138:71–90, 2003.
- [4] U. Weckmann, A. Magunia, and O. Ritter. Effective noise separation for magnetotelluric single site data processing using a frequency domain selection scheme. *Geophysical Journal International*, 162(3):000–000, 2005.
- [5] U. Weckmann, O. Ritter, and V. Haak. A magnetotelluric study of the Damara Belt in Namibia 2. MT phases over 90° reveal the internal structure of the Waterberg Fault / Omaruru Lineament. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 138:91–112, 2003.
- [6] U. Weckmann, O. Ritter, A. Jung, T. Branch, and M. deWit. Magnetotelluric measurements across the beattie magnetic anomaly and the southern cape conductive belt, south africa. *Journal of Geophysical Research*, 2006.

Bayesian Monte Carlo for MT Tensor Decomposition

Václav Červ¹, Josef Pek¹ and Michel Menvielle²

¹Geophysical Institute, Acad. Sci. Czech Rep., Prague, Czech Republic

²CNRS, Centre d'Études des Environnements Terrestre et Planétaires, Saint Maur des Fossés, France

Abstract

Magnetotelluric directional analysis and impedance tensor decomposition are basic tools that are being standardly employed to validate a local/regional composite electrical model of the underlying structure as well as to extract quantitative information about both the regional conductor, often with a specific type of symmetry, and the local distorters. As the effect of local galvanic distortions can result in considerably blurring the image of the deeper regional conductor, reliable quantitative estimates of both the decomposition parameters and their uncertainties are needed. Bayesian stochastic methods are particularly suitable for this purpose, as they approach the problem of the parameter estimation and their uncertainty characterization in a fully probabilistic fashion, through the use of posterior model probabilities, rather than by deriving single point estimates of the model parameters and assessing their uncertainties via a linearized covariance projection from the data space into the model domain.

We use the standard Groom-Bailey 3-D local/2-D regional composite model in our bayesian approach to the magnetotelluric decomposition. We assume that the experimental impedance estimates are contaminated with the Gaussian noise and define the likelihood of a particular composite model with respect to the observed data in terms of the least-squares misfit between the model and experimental impedances. We use non-informative, flat priors over physically reasonable intervals for the standard Groom-Bailey decomposition parameters. Further, we apply two numerical variants of a Monte Carlo technique, specifically the Markov chain Monte Carlo procedure based on the Gibbs sampler and a single-component adaptive Metropolis algorithm, to simulate samples from the posterior distribution of the composite models conditioned on the experimental data. From the posterior samples, we characterize the estimates and uncertainties of the individual decomposition parameters by using the respective marginal posterior probabilities. By analyzing results of our stochastic decomposition experiments carried out with several recently published impedance data sets, both synthetic and practical, we can conclude that the stochastic scheme performs reliably for a variety of models, including the multisite and multifrequency case with up to several hundreds of parameters. Though the Monte Carlo samplers are computationally very intensive, the recent adaptive Metropolis algorithm seems to efficiently increase the speed of the simulations for large-scale problems.

1 Introduction

Magnetotelluric (MT) directional analysis and impedance tensor decomposition have since long become standard MT data analysis techniques that have largely extended possibilities of the MT interpretation of data with evidently a 3-D character (e.g., Zhang *et al.*, 1987; Bahr, 1988; Groom and Bailey, 1989; Bahr, 1991; Smith, 1995; Jones and Groom, 1993; Groom *et al.*, 1993; Lilley, 1998a, b; McNiece and Jones, 2001). MT composite models reflect well the natural conditions in which the main distortions to the MT data often come from very complex near-surface inhomogeneities, while the deeper structure shows smoother conductivity trends and often a higher degree of symmetry. Since the shallow inhomogeneities distort the MT impedances in only a static way starting from a certain period, a possibility exists to separate the static and inductive parts of the impedance tensor by utilizing their different frequency dynamics.

Various schemes of the MT decomposition have been suggested, and those by Bahr (1991) and Groom and Bailey (1989) have become standards in this respect. They are both primarily single site and single frequency approaches that often produce largely scattered estimates of the decomposition parameters if noisy data and strong distortions are involved. Then, rather a lengthy iterative procedure is required to infer stable enough decomposition results by successively correcting the composite model parameters with respect to the data considered for a series of neighbouring periods. Recently, McNiece and Jones (2001) have suggested a linearized multisite and multifrequency inverse procedure which largely stabilizes the MT decomposition by optimizing the composite model jointly for a series of periods and a whole array of sites.

Static distortions frequently cause the deep regional structure to become largely blurred in the surface MT data. As the regional parameters are of primary interest for the interpretation, a proper characterization of the uncertain-

ties of their estimates is of essential importance. Bayesian inference is a stochastic approach frequently used in similar situations. The outstanding feature of the bayesian techniques is that they explicitly operate with probability distributions related to the composite model analyzed, and are thus capable of providing the most exhaustive quantitative information on the model parameter space (e.g., Gelman *et al.*, 2004). Clearly, this exhaustive probabilistic mapping of the model parameter domain needs an extensive exploration of the parameter space, which is often a computationally extremely intensive task.

In this contribution, we present simple Monte Carlo (MC) procedures to analyze the distorted MT data and conclude on both the decomposition parameter estimates and their uncertainties by simulating marginal posterior probability density functions for the parameters. The structure of the paper is as follows: In Section 2, we briefly recall the basics of the MT distortions, MT composite models and decomposition procedures. In Section 3, we present a bayesian formulation of the MT decomposition problem for the classical Groom-Bailey factorization of a 3-D local/2-D regional composite model and summarize the main ideas on the numerical sampling procedures used, specifically the Markov chain Monte Carlo (MCMC) method with Gibbs sampler (Geman and Geman, 1984) and an adaptive single-component Metropolis algorithm adopted from (Haario *et al.*, 2004). In the subsequent Section 4, we apply our stochastic decomposition procedure to the synthetic as well as practical MT data sets presented by McNiece and Jones (2001) in their recent multi-site, multi-frequency decomposition study, and discuss the performance and efficiency of the stochastic approach for those data sets. Finally, we outline some perspectives of the stochastic decomposition in the conclusion, Section 5.

2 MT Tensor Decomposition

2.1 3-D Local/2-D Regional Composite Model

Static distortions of the MT impedance tensor due to shallow 3-D electrical inhomogeneities can be formally described by

$$\mathbf{Z}^{\text{obs}}(\mathbf{r}, T) = \mathbf{A}^{\text{dist}}(\mathbf{r}) \mathbf{Z}^{\text{reg}}(\mathbf{r}, T), \quad (1)$$

where $\mathbf{A}^{\text{dist}}(\mathbf{r})$ is a frequency independent distortion tensor, and $\mathbf{Z}^{\text{obs}}(\mathbf{r}, T)$ and $\mathbf{Z}^{\text{reg}}(\mathbf{r}, T)$ are, respectively, the observed and regional impedance tensors at the location $\mathbf{r}$ and period T . For a 2-D regional structure, the regional impedance in the direction of the regional strike is given by an antidiagonal tensor,

$$\mathbf{Z}^{\text{reg2D}}(\mathbf{r}, T) = \begin{pmatrix} 0 & Z_E(\mathbf{r}, T) \\ -Z_H(\mathbf{r}, T) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Two factorizations of the distortion tensor in terms of more elementary distortion factors are widely used. Bahr's (1991) approach expresses the distortion matrix in terms of telluric deviations and anisotropic gains,

$$\mathbf{A}^{\text{dist}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 & \tan \beta_H \\ \tan \beta_E & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_E & 0 \\ 0 & a_H \end{pmatrix}, \quad (3)$$

while that by Groom and Bailey (1989) factorizes it as a product of elementary distortion types, twist t , shear e , anisotropy s , and gain g ,

$$\mathbf{A}^{\text{dist}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+s & 0 \\ 0 & 1-s \end{pmatrix} g. \quad (4)$$

By comparing (3) and (4), a simple relation between the directional distortion parameters of those two factor sets can be written immediately,

$$\begin{aligned} \beta_E &= \epsilon + \tau, & \beta_H &= \epsilon - \tau, \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(\beta_E + \beta_H), & \tau &= \frac{1}{2}(\beta_E - \beta_H), \end{aligned} \quad (5)$$

with $\epsilon = \arctan e$, $\tau = \arctan t$.

2.2 Fitting the Composite Model

MT decomposition is an ambiguous task. From a single-site single-frequency impedance tensor, we can uniquely recover only the regional strike θ_{reg2D} , the directional distortions twist t and shear e , and scaled (by unknown real factors) regional impedances $Z_E^{\text{scaled}}(\mathbf{r}, T)$, $Z_H^{\text{scaled}}(\mathbf{r}, T)$. MT decomposition leads to the solution of a system of

eight real, non-linear algebraic equations that result from the condition of fitting the experimental impedances to those produced by the composite model,

$$\mathbf{Z}^{\text{obs.mod}}(\mathbf{r}, T) = \mathbf{R}(\theta_{\text{obs}} - \theta_{\text{reg2D}}) \begin{pmatrix} 1 - et & e - t \\ e + t & 1 + et \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & Z_E^{\text{scaled}}(\mathbf{r}, T) \\ -Z_H^{\text{scaled}}(\mathbf{r}, T) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}(\theta_{\text{reg2D}} - \theta_{\text{obs}}), \quad (6)$$

where $\mathbf{R}(\theta)$ is a 2-D rotation matrix through θ .

As the near-surface distortion often mask the deep structure to a considerable degree, estimates of regional parameters, and especially those of the regional strike θ_{reg2D} , are often unstable and largely scattered if evaluated separately for individual frequencies within some frequency range. McNeice and Jones (2001) have recently suggested a procedure for stabilizing the MT decomposition by fitting the observed impedance data by a composite model for a whole range of periods and for multiple sites simultaneously. Specifically, the multi-site multi-frequency decomposition minimizes the target

$$\Phi(\mathbf{d}) = \sum_{i(\text{sites})} \sum_{j(\text{periods})} \sum_{\alpha, \beta \in \{x, y\}} \sum_{\text{Pa} \in \{\text{Re}, \text{Im}\}} \left[\frac{\text{Pa } Z_{\alpha, \beta}^{\text{obs.exp}}(\mathbf{r}_i, T_j) - \text{Pa } Z_{\alpha, \beta}^{\text{obs.mod}}(\mathbf{d}, \mathbf{r}_i, T_j)}{\delta Z_{\alpha, \beta}^{\text{obs.exp}}(\mathbf{r}_i, T_j)} \right]^2, \quad (7)$$

where $\mathbf{d}$ are the decomposition parameters, i.e., the regional strike common to all sites and periods, the twist and shear parameters common to all periods at a specific site, and the regional impedance pairs specific for each period and each site. In what follows, we use the normalized value of $\Phi(\mathbf{d})/N_D$ to characterize the misfit between the observed and model data, where N_D is the total number of the data items. If experimental (complex) impedances are available for N_T periods at each of N_S sites, then $N_D = 8N_TN_S$. The total number of decomposition parameters to be recovered by a decomposition procedure is $N_P = 4N_TN_S + 2N_S + 1$, where the three summands are for the number of the (real) scaled regional impedances, number of twists and shears, and one common value of the regional strike, respectively.

The problem of minimizing eq. (7) with respect to the parameters $\mathbf{d}$ is a standard non-linear optimization problem. McNeice and Jones (2001) use an efficient iterative procedure based on a sequential quadratic programming algorithm to minimize the difference between the observed and model impedances and to obtain point estimates of the decomposition parameters in the least-squares sense. To quantitatively characterize the parameter uncertainties recovered from the non-linear minimization of (7), McNiece and Jones (2001) use a slightly modified bootstrap procedure of Groom and Bailey (1991) to derive the confidence limits for the individual decomposition parameters.

3 Bayesian Approach to the MT Decomposition

3.1 Bayesian Formulation of the MT Decomposition Problem

In a bayesian approach, both the parameter estimation and the assessment of the parameter uncertainties are treated as problems of determining the posterior probability of the composite model conditioned on the observed data, i.e., according to the Bayes rule,

$$\text{Prob}(\mathbf{d} | \mathbf{Z}^{\text{obs.exp}}, M) = \frac{\text{Prob}(\mathbf{Z}^{\text{obs.exp}} | \mathbf{d}, M) \text{Prob}(\mathbf{d} | M)}{\text{Prob}(\mathbf{Z}^{\text{obs.exp}}, M)}, \quad (8)$$

(see, e.g., Gelman *et al.*, 2004). The posterior probability density function $\text{Prob}(\mathbf{d} | \mathbf{Z}^{\text{obs.exp}}, M)$ is considered a solution to the inverse problem (7) and is further used for evaluating point estimates for the parameters and for deriving their confidence intervals.

In the general formula (8), the prior probability, $\text{Prob}(\mathbf{d} | M)$, describes the available knowledge about the decomposition parameters prior to the data being observed. The symbol M stands for the assumptions made on the decomposition model *a priori*. In our particular decomposition problem, it represents the assumption that we deal with a 3-D local/2-D regional type of the composite model.

As we generally do not assume any particular knowledge about the decomposition parameters *a priori*, we use flat (constant) priors on the individual parameters within reasonable physical bounds, specifically

$$\theta_0 \leq \theta_{\text{reg2D}} \leq \theta_0 + 90^\circ, \quad -2 \leq t(\mathbf{r}_i) \leq 2, \quad -1 \leq e(\mathbf{r}_i) \leq 1, \\ 0.5 \sqrt{\frac{10\varrho_{\min}}{T_j}} \leq \text{Pa } Z_{E,H}(\mathbf{r}_i, T_j) \leq 0.5 \sqrt{\frac{10\varrho_{\max}}{T_j}}, \quad (9)$$

where θ_0 is used to adjust limits of the regional strike range, and $\varrho_{\min}$, $\varrho_{\max}$ define wide enough limits to accommodate sufficiently large impedance shifts. The lower and upper bounds for the twist and shear correspond to the twist and shear limit angles of $\pm \arctan 63.4^\circ$ and $\pm \arctan 45^\circ$, respectively. Of course, one of the strengths of the bayesian analysis is that more informative priors on the parameters can be introduced into (8) if additional structural information is available *a priori*.

The other fundametal term in (8), the likelihood, $\text{Prob}(\mathbf{Z}^{\text{obs.exp}}|\mathbf{d}, M)$, represents the probability of obtaining the observed impedances given a particular set of values for the decomposition parameters, and can be written in the form

$$\text{Prob}(\mathbf{Z}^{\text{obs.exp}}|\mathbf{d}, M) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \Phi(\mathbf{d}) \right], \quad (10)$$

if Gaussian noise distribution in the observed data is assumed. Here, $\Phi(\mathbf{d})$ is the misfit defined by (7). The likelihood function allows us to rate models according to their fit to the particular experimental data observed. By foulding the likelihood with the prior information on the parameters, we arrive at the parameters' posterior probability distribution. The denominator in (8), $\text{Prob}(\mathbf{Z}^{\text{obs.exp}}, M)$, plays just a role of a constant scaling factor which guarantees that the posterior probability distribution integrates to one over the admissible parameter space domain.

3.2 MT Decomposition via Stochastic Sampling

Analytic solutions to bayesian inference problems are rare and are mostly limited to linear statistical models in low-dimensional settings and to simple standard probability distribution functions. Most of the practical applications of the bayesian methods, especially in higher dimensions and with non-linear models involved, are based either on qualified approximations of the target probability distributions by simpler standard probability densities, like Gaussians or their mixtures, or on generating samples from the posterior probability function numerically, e.g., by Monte Carlo simulation procedures.

In our study, we have used a variant of the Monte Carlo method with Markov chains (MCMC) to simulate samples from the posterior probability of MT composite models conditioned on the observed impedances. Without going into details of the MCMC technique (for details, see, e.g., Gelfand *et al.*, 2004, or, within a geoelectrical context, Grandis *et al.*, 1999), the procedure consists in (i) constructing an ergodic Markov chain with the limit probability distribution equal to our target posterior probability (8), and (ii) obtaining a partial realization from the corresponding Markov chain. After a certain period during which the chain transits to its stationary state (burn-in period), the samples from the Markov chain realization can be considered approximate draws from our target posterior distribution.

MCMC sampling algorithms represent general rules for the construction and generation of the Markov chains with the above desired properties. Here, we have first tested the standard Gibbs sampling procedure (e.g., Geman and Geman, 1984; Grandis *et al.*, 1999; Gelman *et al.*, 2004), which proceeds as follows: Starting from the latest state of the Markov chain, say k -th, with parameters $\mathbf{d}^{(k)}$, the Gibbs sampler loops through all the components of the vector $\mathbf{d}$, and, for each individual component d_i , updates its value by drawing from the univariate conditional probability density

$$d_i^{(k+1)} = \text{Draw} \left\{ \text{Prob}(d_i | \underbrace{d_1^{(k+1)}, \dots, d_{i-1}^{(k+1)}}_{\text{updated values}}, \underbrace{d_{i+1}^{(k)}, \dots, d_{N_P}^{(k)}}_{\text{original values}}, M) \right\}. \quad (11)$$

After all the N_P components of the parameter vector have been updated in this way, one iteration step of the Gibbs sampler, and the transition to its new state $\mathbf{d}^{(k+1)}$, is completed.

The convergence of the MCMC procedure to the target probability is theoretically guaranteed for Markov chains of infinite length only. In practice, various indicators are used to assess the convergence, the simplest being the stability of the marginal probabilities of the model parameters over long enough sections of the chain. To assist the convergence, several parallel chains can be started from various points in the parameter space. Fig. 1 illustrates the basic steps of the MCMC sampling procedure for the regional strike assessment from a synthetic impedance tensor realization treated later in Section 4.1.

After a sample from the posterior probability density function is obtained, basic Bayesian integrals (mean values, covariance matrices, etc.) can be easily evaluated from the posterior sample and used to assess both the decomposition parameters (mean values) and their uncertainties and inter-dependencies (variance-covariance matrix, correlations).

Since the conditional probabilities in (11) are not given in a closed form, they are standardly approximated on a grid of points within the parameter domain. As the likelihood function (10) has to be evaluated at each grid point, that approximation may require extreme computing times, especially if the direct problem solution

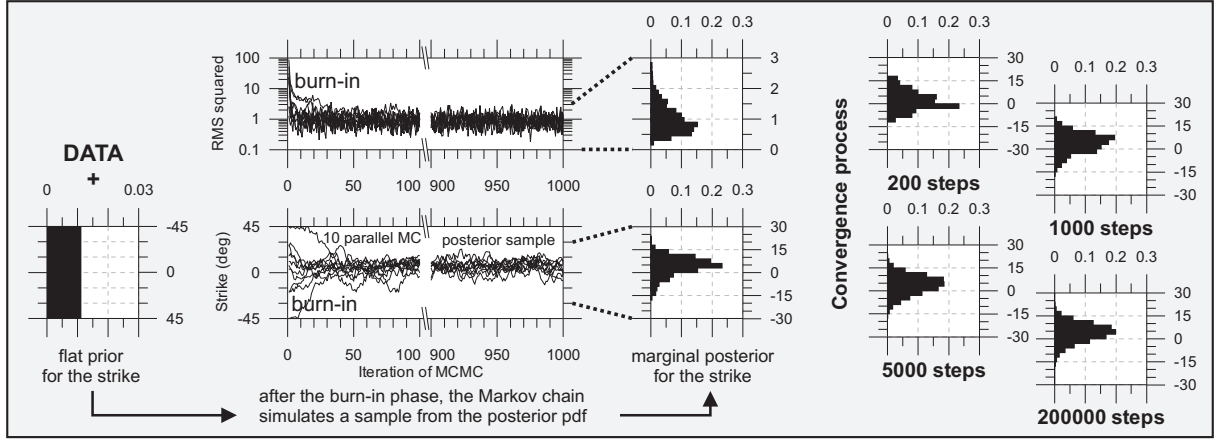


Figure 1: MCMC sampling procedure illustrated on the case of a stochastic estimation of the regional strike for one realization of the impedance tensor from Subsection 4.1. In the left, the data are combined with a non-informative, flat prior for the strike. Ten Markov chains, with seven decomposition parameters in (7), are run in parallel starting at different points in the parameter space. The normalized misfit and the strike are shown in the top and bottom evolution pannels, respectively, for 10000 iterations of the Gibbs sampler. After about 100 iterations (burn-in period), the chains stabilize around a common strike value. After 10000 iterations, the histogram for the strikes may be considered a good approximation of the marginal probability density function of the strike. The histograms to the right show that the form of the marginal distribution of the strike is practically stable after the first 1000 iteration steps.

is demanding, or if vast domains of the parameter space with very low likelihood are sampled. In some of our practical experiments, we have used grid steps as small as 0.5° for the regional strike, 0.01 for the twist and shear parameters, and 0.005 for the logarithms of the components of the regional impedances. Considering the parameter limits specified in (9), with $\varrho_{\min} = 10^{-2}$ and $\varrho_{\max} = 10^5 \Omega\text{m}$ used, the number of misfit (7) evaluations totals to more than 25 millions in such cases for one step of the Gibbs sampler. Coarsening the grid over areas with small likelihood, using more sophisticated, data driven approximation schemes, such as the neighbourhood interpolation suggested by Sambridge (1997), or narrowing the parameter bounds helps in reducing the computation burden.

As an alternative to the Gibbs sampler, we have also tested a slightly simplified version of the componentwise adaptive Metropolis algorithm suggested recently by Haario *et al.* (2003) in the context of upper atmosphere studies. The algorithm proceeds in similar cycles as the Gibbs sampler above except that the updates to the individual component d_i are generated by an adaptive Metropolis rule. For this, first a proposal draw is made from a normal distribution centered at the current value $d_i^{(k)}$ with a data adaptive variance, specifically

$$\text{proposal}_i^{(k)} = \text{Draw}\{\text{Normal}[d_i^{(k)}, s(\text{var}_i^{(k)} + \varepsilon)]\}, \quad (12)$$

where $\text{var}_i^{(k)}$ is the variance of d_i estimated from the previous steps of the sampler, the factor s is a multiplicative constant tuned experimentally to optimize the rejection/acceptance ratio of the algorithm (here, $s = 2.4$ has been used according to the suggestion by Haario *et al.*, 2003), and ε is a small regularizing factor. Then, the Metropolis decision step is made, i.e., the candidate point is accepted, $d_i^{(k+1)} = \text{proposal}_i^{(k)}$, with the probability

$$\pi^{(\text{accept})} = \min \left\{ 1, \frac{\text{Prob}(\text{proposal}_i^{(k)} | d_1^{(k+1)}, \dots, d_{i-1}^{(k+1)}, d_{i+1}^{(k)}, \dots, d_{N_P}^{(k)})}{\text{Prob}(d_i^{(k)} | d_1^{(k+1)}, \dots, d_{i-1}^{(k+1)}, d_{i+1}^{(k)}, \dots, d_{N_P}^{(k)})} \right\}. \quad (13)$$

If the proposal is rejected, the old value of the parameter is retained, i.e., $d_i^{(k+1)} = d_i^{(k)}$ with the probability $1 - \pi^{(\text{accept})}$. As in this algorithm a longer history of the chain is used for adapting the variances in (12), the chain is evidently not Markovian any more. Nonetheless, Haario *et al.* (2003) have proved its convergence to the target posterior. As compared to the original Gibbs sampler, the adaptive Metropolis procedure requires only one solution to the direct problem per component and per iteration. The adaptive variance in (12) should take care of a quasi-optimality of the acceptance/rejection ratio for updating the model parameters in the chain evolution, regulating thus the convergence of the chain.

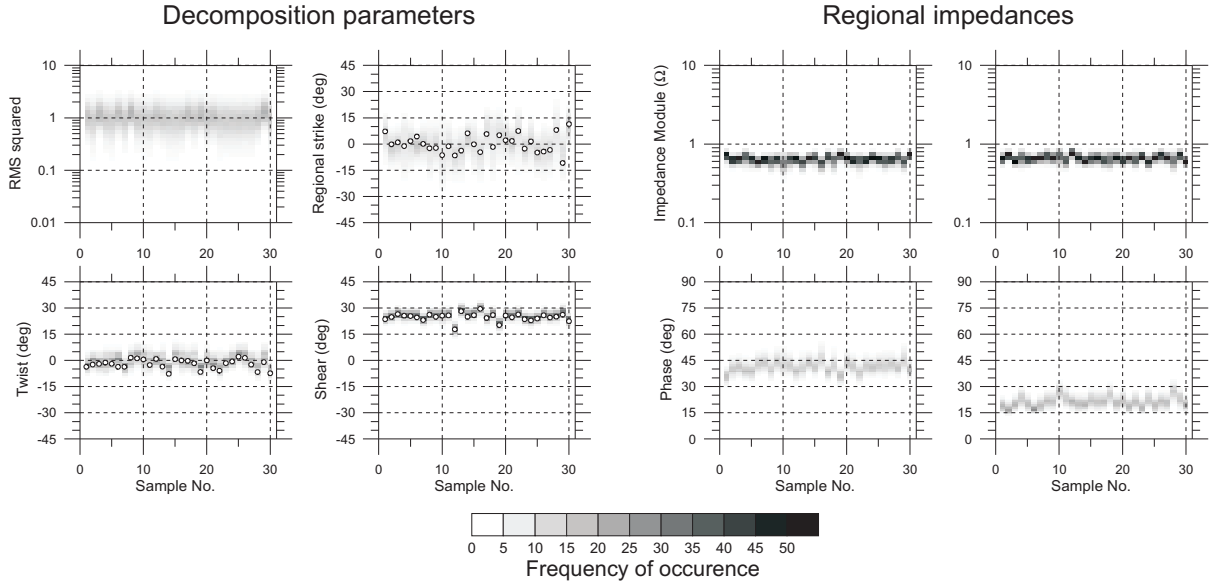


Figure 2: MT decomposition parameters from the MCMC sampling applied individually to each of 30 noisy realizations of the impedance tensor derived from (14). Left panels show the normalized misfit (RMS squared) for each decomposition run, and histograms, transformed into gray-shade maps, for the regional strike, twist and shear parameters. For comparison, point estimates of the latter three parameters from Bahr’s (1988) decomposition are shown by white circles. Right panels show the approximate marginal probability densities for the recovered regional impedances, in terms of their modules and phases. Exact values of the parameters from the generating impedance tensor (14) are: $\vartheta_{\text{reg2D}} = 0^\circ$, $\arctan t = -2.2^\circ$, $\arctan e = 24.95^\circ$, $\varphi_E = 40.63^\circ$, $\varphi_H = 20.59^\circ$.

4 Numerical Experiments

4.1 Synthetic: Multiple Realizations of a Single Impedance Tensor

To have a possibility to compare results of our numerical experiments with a reliable reference, we have tested the stochastic MT decomposition procedure on several data sets presented lately by McNiece and Jones (2001) in their multi-site, multi-frequency decomposition study. Their first example uses a single synthetic impedance matrix

$$\mathbf{Z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.26 & 0.44 \\ 0.53 & 0.86 \end{pmatrix}}_{\text{distortion}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4.72 + 4.05i \\ -8.25 - 3.10i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{2-D impedance}} \times 10^{-4} \Omega. \quad (14)$$

They further generate a series of 31 realizations of this distorted impedance tensor by contaminating its components by Gaussian noise with the standard deviation of 4.5 % of the largest impedance element. Though artificial, the example is suitable for estimating the impact of the noise on the decomposition results under otherwise equivalent conditions as regards the regional structure as well as the local distorter.

In Figs. 2 and 3, we show results of the stochastic decomposition runs for the set of thirty data realizations, which were combined in various ways to simulate different decomposition modi. Specifically, Fig. 2 displays results of the decomposition applied to each of the thirty tensors individually. We used the Gibbs sampler with 10k steps. The first 2k samples were used to equilibrate the chain (burn-in period). Histograms of the individual parameters from the remaining 8k samples were used as approximates to their marginal probability densities. The relative frequencies of occurrence of particular values were mapped onto a gray-shade scale, and are shown in Fig. 2. For comparison, point estimates of the regional strike, twist and shear obtained by Bahr’s (1988) decomposition analysis are also indicated.

While the previous example illustrated the stochastic decomposition approach in a setting typical for a single site, single frequency decomposition, Fig. 3 illustrates results of a simulation for a multiple site, multiple frequency case from the same data set. Now, the noisy impedance tensors are arranged into five groups, with six impedance realizations in each of them. Each group simulates a site, with a common value of the twist and shear parameters. Each realization within a particular group simulates one frequency. The regional strike is assumed to have the same value common to all the data.

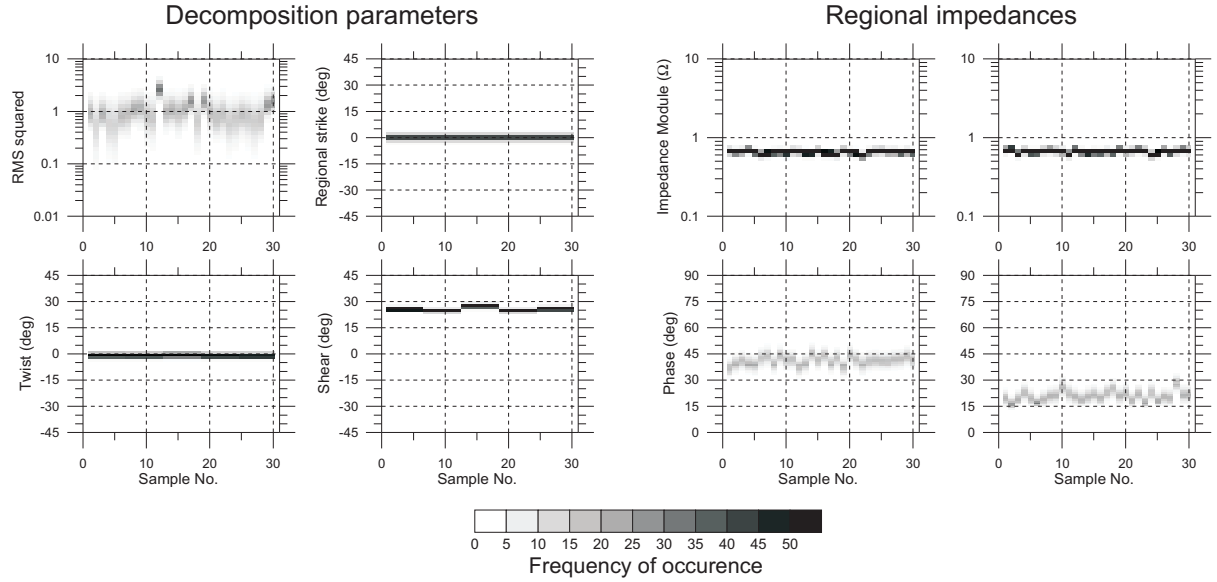


Figure 3: MT decomposition parameters from the stochastic sampling applied to five groups of six realizations the impedance tensor derived from (14). For each group, the twist and shear parameters are considered constant. The regional strike is assumed to be the same for all data. For details on the figure structure, see caption to Fig. 2.

4.2 Synthetic: Multi-Site Multi-Frequency Decomposition over a 2-D Block Model

The second example adopted from McNeice and Jones (2001) is their synthetic study of distorted impedances generated by a simple 2-D model. A $50 \Omega\text{m}$ 2-D body, 5 km deep with a 4 km depth extent and a width of 25 km, was embedded in a $1000 \Omega\text{m}$ half-space. Observations were made at ten sites equispaced at 8 km intervals across the surface. At each site, impedances were modelled numerically for 31 periods within the range 0.01 to 1000 s and subsequently distorted by a predefined, site-specific distortion matrix. The distorted tensors were then rotated away from the regional strike direction (by -30°), and contaminated with Gaussian noise with the std corresponding to 2 % of the maximum impedance element at each period.

Though apparently simple and straightforward, this example bears some specific features that might be rather unfavourable for the stochastic decomposition approach. First, stochastic global optimization and sampling procedures are known to fail frequently for problems with a large number of variables. In the model above, the total number of decomposition parameters to be resolved is 1261, which may be considered very large for a stochastic approach. Especially, this number of variables practically prevents us from using the simple Gibbs sampler within the MCMC, as the number of solutions to the direct problem would be prohibitively large if no coarsening strategy for the approximation of the parameters' conditionals could be suggested.

Second, any componentwise sampling suffers from the presence of highly correlated parameters within the set of variables. In the present syntetic example, the 2-D manifestation of the regional structure is relatively weak, and is, moreover, obscured by excessively strong artificial distortions. In such a case, correlations between the parameters of the composite model occur, with degraded performance of the sampling procedure as a consequence.

We used the componentwise adaptive Metropolis algorithm by Haario *et al.* (2003) to perform the MCMC sampling for the above model. We have met serious difficulties in sampling for the sites individually, especially because of strong correlations between the decomposition parameters. For the whole set consisting of all 10 sites and all 31 frequencies, the procedure behaved much more regularly than for the sites considered individually, and produced satisfactory results after about 100k iterations of the adaptive Metropolis algorithm. For comparison, we present our results for the strike, twist and shear estimates together with those published by McNiece and Jones (2001) in Table 1.

4.3 Practical: MT-DIW2 Papua-New Guinea MT Data Set

Here we present a few illustrative results of the analysis of the Papua New Guinea data (PNG, Jones and Schultz, 1997), which were a subject of detailed investigations within the MT-DIW2 project, and have been studied extensively by McNiece and Jones (2001) from the point of view of the directional and decomposition analysis. From the latter analysis, this data set has been shown to indicate a consistent regional structure for a series of eight sites, called PNG101 through PNG108.

Site	True twist	True shear	MNJ twist	MNJ twist	ACM twist	ACM shear
SYN001	-20	20	-20.1	20.1	-20.0 ± 0.1	19.9 ± 0.1
SYN002	40	-10	40.2	-10.1	39.9 ± 0.1	-10.2 ± 0.1
SYN003	-15	25	-15.1	25.2	-15.2 ± 0.2	25.0 ± 0.1
SYN004	20	40	19.7	39.9	19.9 ± 0.2	40.0 ± 0.2
SYN005	-40	-25	-40.0	-25.0	-40.0 ± 0.1	-25.0 ± 0.1
SYN006	30	-20	30.1	-20.2	29.9 ± 0.1	-20.0 ± 0.1
SYN007	-50	-35	-50.1	-34.9	-50.1 ± 0.2	-35.2 ± 0.1
SYN008	-10	25	-10.1	-25.1	-10.3 ± 0.2	25.0 ± 0.1
SYN009	-5	35	-5.3	35.1	-5.1 ± 0.2	35.1 ± 0.1
SYN010	45	15	45.1	14.8	44.9 ± 0.1	15.0 ± 0.1

Table 1: Strike and twist parameters, in degrees, for the synthetic data produced by the 2-D conductive block in Section 4.2. True parameters were used to distort 2-D impedances of the box model. MNJ are results of the reverse decomposition presented by McNeice and Jones (2001). ACM parameters are results of the adaptive componentwise Metropolis sampling used in this paper. For the common regional strike, we have 30° for the true strike, 30.3° from the MNJ analysis, and $30.1 \pm 0.2^\circ$ from the stochastic procedure.

To compare the performance of our algorithm with the optimization procedure by McNeice and Jones (2001) for a set of field data, we have used the PNG data set within our stochastic decomposition analysis. Here, we will only show a fraction of the results concerning the regional strike estimates. The results were obtained by using the Gibbs sampler within the MCMC procedure, typically with 10k iterations and 2k steps of a burn-in phase. The results are summarized in Fig. 4, and can be compared directly with the estimates given in McNeice and Jones (2001), Figures 11 through 13.

The strike estimates were obtained by applying the stochastic decomposition to various combinations of the PNG data items. First, the single strike, single frequency decomposition was carried out. The partial strike histograms at individual frequencies were then merged into a single histogram to show the aggregate directional information for the region at individual frequencies (top row of histograms in Fig. 4). Obviously, for whole frequency ranges, this directional information is rather poor and excessively diffuse.

By assuming the same regional strike for all the eight sites considered at individual frequencies, a multiple site, single frequency directional analysis clearly improves the resolution with respect to the regional strike (middle row of histograms in Fig. 4). Further sharpening of the deep directional image is achieved by aggregating the data over frequency ranges, as demonstrated by histograms in the bottom line in Fig. 4.

5 Conclusion

The MT decomposition is a problem that targets not only the parameters of the underlying composite model, but is interested in their uncertainties as well. Relatively weak manifestation of the deep symmetric regional structure and its masking by static distortions, sometimes extreme, of near-surface origin may result in excessively blurred images of the deep conductors. By aggregating the data over frequency bands and groups of sites presents a way of effectively focusing on poorly resolvable features of the regional structure, as shown by McNeice and Jones (2001) in their multi-site, multi-frequency decomposition study.

Technically, the decomposition is an optimization procedure aiming at the minimization of the objective function (7). In the above study by McNeice and Jones (2001), a direct minimization procedure is used to solve the decomposition problem. If converged, it provides point estimates of the decomposition parameters for the optimal composite model. The error estimates for these parameters can be then obtained by either a linearized projection of the data covariance matrix into the parameter space (e.g., Menke, 1989), or, if non-linearities are essential, by a stochastic search in a neighbourhood of the optimal model, or by studying changes in the composite model due to stochastic variations of the data, e.g., by using a bootstrap procedure as in Groom and Bailey (1991) and McNeice and Jones (2001).

We present an alternative multi-site, multi-frequency decomposition procedure that is based on the bayesian formulation of the decomposition problem and its solution via a stochastic sampling by a MCMC technique. The procedure generates a chain that approximates samples from the posterior probability distribution of the MT composite model conditioned on the observed data. Though computationally demanding, the advantage of the procedure is that, by providing the results in the form of a posteriori probability distribution, the uncertainty information on the decomposition parameters is an inseparable component of the solution.

This paper is just a feasibility study that compares the performance of the stochastic decomposition with the

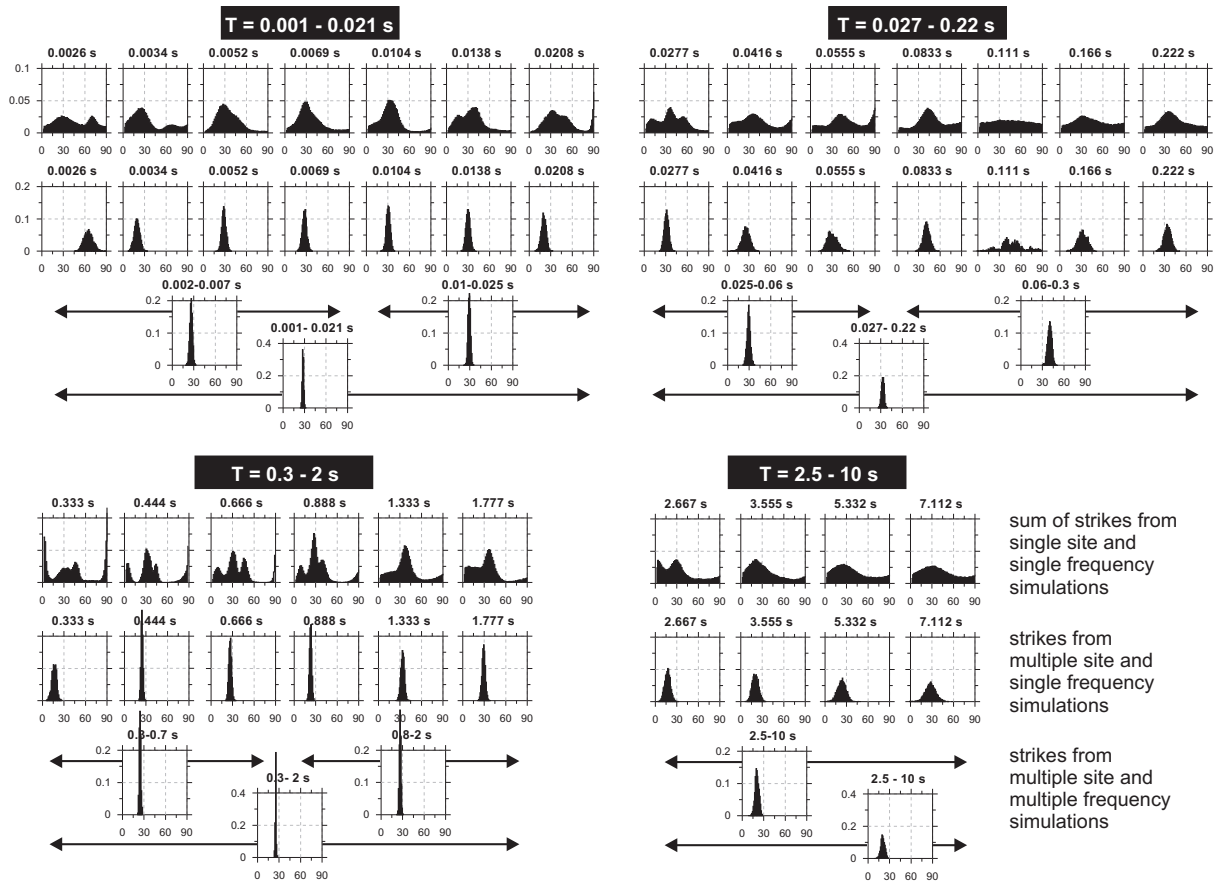


Figure 4: Marginal probability densities for the regional strike from the PNG101 through PNG108 data set (Jones and Schultz, 1997). Top row—Sum of strikes estimated for the sites and periods separately. Middle row—Strikes obtained from a multi-site, single frequency decomposition applied to all eight sites jointly. Bottom rows—Strikes from a multi-site, multi-frequency decomposition over all eight sites and over period bands of, respectively, half a decade and one decade width.

results presented by McNeice and Jones (2001). The comparisons carried out above show that the bayesian averaging from the MCMC samples provides estimates to the decomposition parameters statistically equivalent to those obtained from the direct optimization procedure. Confidence intervals for the individual parameters are immediately available at the output of the MCMC sampling. The MCMC procedure could be used with success even in the unfavourable case of a 2-D box model, with a large number of variables and strong correlations between the parameters. In this case, however, the computational demands cannot compete with those of the direct minimization. Nonetheless, if a bootstrap error testing should be supplemented for that model, the amount of computations required would undoubtedly rocket as well.

The presented bayesian analysis allows us to relatively easily extend the scope of problems that have to be addressed in relation to the MT decomposition. E.g., the generalization to the model that considers also static magnetic distortions (Chave and Smith, 1994; McNeice and Jones, 2001) is straightforward. Moreover, the bayesian model selection is a suitable tool to answer the question of whether incorporating the magnetic distortions into the composite model is really required by the data. Another problem not addressed here is that of poorly estimated data variances in (7), which is not a rare case in practice, and affects even the PNG data set used here (for details, see McNeice and Jones, 2001). Bayesian approach makes it possible to include the data variances into the parameter set as nuisance variables (e.g., Gelman *et al.*, 2004), and thus allows us to cope with deficiencies originating from the data processing.

Acknowledgements

Financial assistance of the Grant Agency of the Czech Republic, contracts No. 205/04/0746 and No. 205/04/0740, is highly acknowledged.

References

- Bahr, K., 1988. Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: regional induction and local telluric distortion. *J. Geophys.*, **62**, 119–127.
- Bahr, K., 1991. Geologic noise in magnetotelluric data: a classification of distortion type. *Phys. Earth. Planet. Int.*, **66**, 24–38.
- Chave, A. D. and Smith, J. T., 1994. On electric and magnetic galvanic distortion tensor decompositions. *J. Geophys. Res.*, **99**, 4669–4682.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. and Rubin, D. B., 2004. *Bayesian data analysis*. 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 668 pp.
- Geman, S. and Geman, D., 1984. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **6**, 721–741.
- Grandis, H., Menvielle, M. and Roussignol, M., 1999. Bayesian inversion with Markov chains I. The magnetotelluric one-dimensional case. *Geophys. J. Int.*, **138**, 757–768.
- Groom, R. W. and Bailey, R. C., 1989. Decomposition of magnetotelluric impedance tensors in the presence of local three-dimensional galvanic distortion. *J. Geophys. Res.*, **94**, 1913–1925.
- Groom, R. W. and Bailey, R. C., 1991. Analytical investigations of the effects of near surface three-dimensional galvanic scatterers on MT tensor decomposition. *Geophysics*, **56**, 496–518.
- Groom, R. W., Kurtz, R. D., Jones, A. G. and Boerner, D. E., 1993. A quantitative methodology for determining the dimensionality of conductivity structure and the extraction of regional impedance responses from magnetotelluric data. *Geophys. J. Int.*, **115**, 1095–1118.
- Haario, H., Saksman, E. and Tamminen, J., 2003. Componentwise adaptation for MCMC. *Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint 342*, pp. 1–20.
- Jones, A. G. and Groom, R. W., 1993. Strike angle determination from the magnetotelluric tensor in the presence of noise and local distortion: rotate at your peril! *Geophys. J. Int.*, **113**, 524–534.
- Jones, A. G. and Schultz, A., 1997. Introduction to the MT-DIW2 special issue. *J. Geomag. Geoelect.*, **49**, 727–738.
- Lilley, F. E. M., 1998a. Magnetotelluric tensor decomposition: Part I, Theory for a basic procedure. *Geophysics*, **63**, 1885–1897.
- Lilley, F. E. M., 1998b. Magnetotelluric tensor decomposition: Part II, Examples of a basic procedure. *Geophysics*, **63**, 1898–1907.
- McNeice, G. W. and Jones, A. G., 2001. Multisite, multifrequency tensor decomposition of magnetotelluric data. *Geophysics*, **66**, 158–173.
- Menke, W., 1989. *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. International Geophysics Series, vol. 45, Academic Press, San Diego, California, 285 pp.
- Sambridge, M., 1999. Geophysical inversion with a neighborhood algorithm: I. Searching a parameter space. *Geophys. J. Int.*, **138**, 479–494.
- Smith, J. T., 1995. Understanding telluric distortion matrices. *Geophys. J. Int.*, **122**, 219–226.
- Zhang, P., Roberts, R. G. and Pedersen, L. B., 1987. Magnetotelluric strike rules. *Geophysics*, **52**, 267–278.

Untersuchung der Dimensionalität magnetotellurischer Daten mit Mohrkreisen und Rotationsinvarianten

T. Worzewski^{1*}, V. Haak², H. Brasse¹

¹Freie Universität Berlin, FB Geowiss, FR Geophysik; ²GeoForschungsZentrum Potsdam

Zusammenfassung

Bei der Modellierung von MT-Daten ist gewisse Vorsicht bei der Herangehensweise geboten, da die Daten manchmal in zweidimensionale Interpretationsschemata gedrängt werden, wo diese Annahme doch erst bestätigt werden muss. Eine Dimensionsanalyse mit einem Flussdiagramm und Mohrkreisen bietet verständlichere Ergebnisse als z.B. das klassische Dimensionsmaß Skew nach Swift und hat diesem gegenüber auch den Vorteil, unabhängig von Gleichstromverzerrung zu sein. Die auf eine Dekomposition des Phasentensors beruhende Analyse nach Weaver, Agarwal und Lilley (2003) wird hier anhand synthetischer und realer Daten vorgestellt, modifiziert und diskutiert. Stabilitätsuntersuchungen gegenüber Rauschen und Visualisierung von Gleichstromverzerrung sollen betrachtet dabei werden.

Einleitung

In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene Methoden entwickelt, um aus magnetotellurischen Datenstrukturen Informationen über den Untergrund abzuleiten. Eine dieser Methoden ist die der Mohr'schen Kreise, ein der Spannungstheorie entlehntes Konzept, welches von Lilley (1993) auf die MT übertragen wurde und sich seither in verschiedenen Publikationen mehrerer Autoren immer weiter differenziert hat.

Als Weaver, Agarwal & Lilley (zukünftig als „WAL“ bezeichnet) im Jahr 2000 einen Satz von sieben unabhängigen Rotationsinvarianten vorstellten, um den Informationsgehalt eines Magnetotellurischen Tensors (bzw. Impedanztensors) gänzlich zu charakterisieren, ergab sich die Möglichkeit einer Visualisierung von Gleichstromverzerrung in Mohr-diagrammen. Man kann das Problem dieser Verzerrung umgehen, indem man zur Betrachtung des von Caldwell, Bibby & Brown (2004) vorgestellten Phasentensors übergeht, welcher unabhängig von Gleichstromverzerrung ist. WAL fanden 2003 eine neue Dekomposition des Phasentensors und

entwickelten hieraus eine Mohrkreisdarstellung für den Phasentensor und darüber hinaus ein neuartiges Flussdiagramm für die Entscheidung, ob Datenstrukturen ein-, zwei- oder dreidimensional sind.

Im Rahmen einer Diplomarbeit wurde die Entscheidungslogik des Flussdiagrammes untersucht und geändert, woraufhin beide Diagramme vergleichend auf synthetische und reale Daten angewendet wurden. Weiterhin wurde anhand synthetischer Daten untersucht, inwieweit sich Gleichstromverzerrung in der Mohrkreisdarstellung visualisieren lässt, und inwieweit eine Verrauschung der Daten die Stabilität der Ergebnisse beeinträchtigt. Klassische Dimensionsmaße wie der Skew nach Swift und der nach Bahr wurden dabei vergleichend mituntersucht. Im folgenden sollen die wesentlichen Schritte und Ergebnisse erläutert und zusammengefasst werden.

Vorbemerkungen

Im Folgenden ist vom MT-Tensor $\mathbf{M}$ als Übertragungsfunktion zwischen Elektrischem Feld $\mathbf{E}$ und Magnetischem Fluss $\mathbf{B}$ die Rede, um eine Differenzierung zwischen diesem und dem gebräuchlich verwendeten Impedanztensor $\mathbf{Z}$ zu schaffen, welcher ja mit dem Magnetfeld $\mathbf{H}$ verknüpft ist ($\mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{H}$). So wie $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ stehen dann auch $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{M}$ über die magnetische Feldkonstante μ_0 im Zusammenhang ($\mathbf{Z} = \mu_0 \cdot \mathbf{M}$). Es ist also $\mathbf{E} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$ mit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{xxr} + iM_{xxi} & M_{xyr} + iM_{xyi} \\ M_{yxr} + iM'_{yxi} & M_{yyr} + iM_{yyi} \end{pmatrix}$. Die Indizes „r“ (bzw. „i“) stehen dabei für Realteil (bzw. Imaginärteil) der entsprechenden Tensorelemente. In den Graphiken und in den Rechnungen wurde die folgende Notation von Weaver (1994) verwendet:

$$\begin{aligned}\xi_1 + i\eta_1 &= 0.5(M_{xx} + M_{yy}), \\ \xi_2 + i\eta_2 &= 0.5(M_{xy} + M_{yx}), \\ \xi_3 + i\eta_3 &= 0.5(M_{xx} - M_{yy}), \\ \xi_4 + i\eta_4 &= 0.5(M_{xy} - M_{yx}).\end{aligned}$$

Wenn von beobachteten Daten die Rede ist, die im 2D-Fall i.a. rotiert bezüglich der Streichrichtung vorliegen, sind entsprechende Tensoren und

*jetzt IFM-Geomar; email: tworzewski@ifm-geomar.de

ihre Elemente durch Hochkommata indiziert (z.B. M'_{xx_r} oder $\mathbf{M}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}^T$ mit $\mathbf{R}$ der Rotationsmatrix).

Mohrkreise in der MT

Lilley (1993) stellte die Option vor, den Informationsgehalt eines MT-Tensors durch die Methode der Mohrschen Kreise darzustellen. Ihm zufolge kann man für den MT-Tensor zwei Mohrkreise erstellen, indem man Real- und Imaginärteil getrennt voneinander betrachtet. Trägt man dann die beobachteten, reellen MT-Tensorelemente M'_{xx_r} und M'_{xy_r} gegeneinander auf, so entsteht unter Rotation der Messachsen ein Kreis, wobei Kreismittelpunkt die Koordinaten

$$\left(\frac{1}{2}(M_{xy_r} - M_{yx_r}), \frac{1}{2}(M_{xx_r} + M_{yy_r})\right) = (\xi_4, \xi_1)$$

hat, und der Kreisdurchmesser gegeben ist durch

$$R = 0.5 \sqrt{(M_{xx_r} - M_{yy_r})^2 + (M_{yx_r} + M_{xy_r})^2}.$$

Analog ergibt sich ein Imaginärkreis aus den imaginären Tensorelementen. In Abb.1 sind Real- und Imaginärkreis eines MT-Tensors in kombinierter Darstellung nach WAL(2000) zu sehen. Mittelpunkt und Radius sind jeweils rotationsinvariant, was bedeutet, dass die Gestalt der Kreise unverändert unter Rotation bleiben. Die Gestalt der Kreise gibt Auskunft über die Dimensionalität der Daten bzw. des Tensors (siehe Abbildungstext).

WAL-Invarianten und Verzerrung

WAL (2000) stellten einen Satz von sieben unabhängigen Invarianten vor, über welche alle anderen Invarianten berechenbar sind. Diese sieben unabhängigen Invarianten plus einem Winkel, der die Orientierung der Referenzachsen definiert, charakterisieren den 8-elementigen komplexwertigen MT-Tensor gänzlich. Das Besondere an ihrem Satz ist, dass die Invarianten

- normiert und somit leicht vergleichbar sind,
- die Invarianten eine Darstellung im Mohrdiagramm haben und
- das Verschwinden einer jeden Invariante eine physikalische Bedeutung hat.

Die sieben unabhängigen Invarianten I_1 - I_7 kann man in drei Gruppen einteilen: die erste Gruppe ist das fundamentale Paar I_1 und I_2 , wenn alle anderen Invarianten Null sind, ist der Tensor eindimensional und scheinbarer Widerstand und Phase

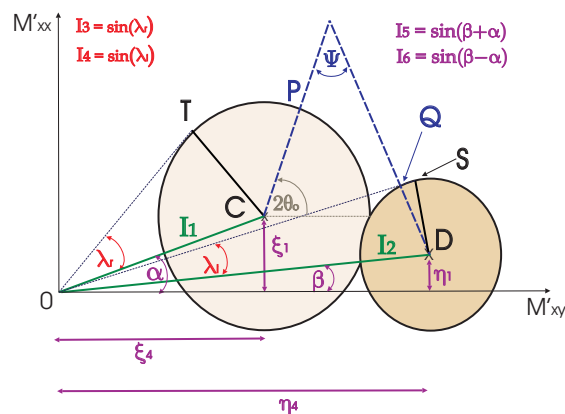


Abbildung 1: Das kombinierte Diagramm für Real- und Imaginärmohrkreis des MT-Tensors mit Invarianten nach WAL (2000). Der Realkreis hat den Mittelpunkt bei C, der Imaginärkreis bei D. Die Kreise sind verknüpft über den Winkel ψ , der dem Winkel zwischen den Vektoren $\vec{CP}$ und $\vec{DQ}$ entspricht, wobei P der ursprünglich beobachtete Punkt des Realkreises und Q der des Imaginärkreises ist. θ_0 ist der Winkel, durch welchen die originalen Koordinatenachsen rotiert werden müssten, um M_{xy_r} zu maximieren. Im Diagramm sind zu sehen: Das fundamentale Paar I_1 und I_2 („central impedances“), über welche im 1D-Fall die Leitfähigkeit berechnet werden kann (im 1D-Fall schrumpfen die Kreise zu Punkten auf der M'_{xy} -Achse). Die zwei Invarianten I_3 und I_4 , welche die 2D-Anisotropie beschreiben, sind über die Sine der Anisotropiewinkel λ_r und λ_i definiert. Je größer λ_r und λ_i (je größer die Radien der Kreise), desto größer die 2D-Anisotropie. Im 2D-Fall ist $\psi = 0$, d.h. $\vec{CP}$ und $\vec{DQ}$ sind parallel zueinander. Der Mittelpunkt der Kreise liegt auf der M'_{xy} -Achse. Wenn ein 2D-Fall mit reinem Twist des elektrischen Feldes vorliegt, so ist $I_5 = \sin(\alpha + \beta) \neq 0$ und die Kreismittelpunkte wandern von der M'_{xy} -Achse. Allerdings gilt in diesem Fall $I_6 = \sin(\alpha - \beta) = 0$, was bedeutet, dass $\alpha = \beta$ ist und somit die Strecken I_1 und I_2 auf einer Geraden liegen. Die Invariante I_7 lässt sich nur indirekt über den im Mohrkreis auftretenden Winkel ψ bestimmen.

berechnen sich über diese Invarianten. Die zweite Gruppe bilden I_3 und I_4 , welche Aussagen über die 2D-Anisotropie liefern. Sind I_5, I_6 und I_7 Null, so ist der Tensor 2D. Die dritte Gruppe (I_5, I_6 und I_7) macht Aussagen über Gleichstromverzerrung und Dreidimensionalität. Die Werte der Invarianten $I_3, I_4, |I_5|, |I_6|$ und $|I_7|$ reichen von Null bis maximal Eins. Die graphische Veranschaulichung hierzu ist schematisch in Abb.1 zu sehen.

Um die Auswirkungen von Gleichstromverzerrung zu visualisieren wurden von einem synthetischen Datensatz mehrere 1D- und 2D- MT-Tensoren mit den Parametern Twist, Shear und Anisotropie nach Groom & Bailey (1989) verzerrt. Während im unverzerrten Fall der Skew nach Swift und nach Bahr Null war, erreichte der Skew nach Swift im verzerrten Fall erwartungsgemäß sehr hohe Werte, abhängig von der Größe der Verzerrungsparameter bis über 0.6, was die Unzuverlässigkeit dieses Dimensionsmaßes unter verzerrenden Bedingungen unterstreicht. In Abb.2 ist beispielhaft dargestellt,

wie man in kombinierter Darstellung von Real- und Imaginärmohrkreis auf eine Gleichstromverzerrung schließen kann.

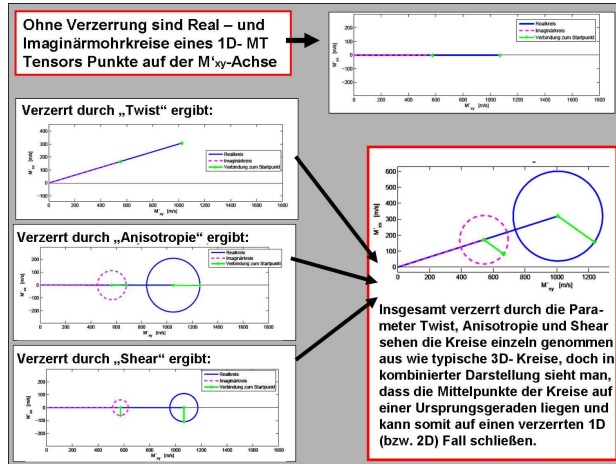


Abbildung 2: Auswirkung von Verzerrung auf einen MT-Tensor. Verzerrungsparameter nach Groom und Bailey (1980).

Dimensionsanalyse mit Flussdiagramm

Caldwell, Bibby & Brown (2004) stellten den Phasentensor vor, eine Konstruktion, in welcher der Imaginärteil des MT-Tensors multipliziert wird mit dem Inversen seines Realteils. Der Phasentensor ist dann eine 2x2-Matrix bestehend aus 4 reellwertigen Elementen, welcher im 2D-Fall symmetrisch ist (und die Symmetrie erhält sich unter Rotation), im 1D-Fall ist er darüber hinaus diagonal. Aus diesen Überlegungen heraus leiteten WAL (2003) eine Gleichung her, welche den Phasentensor über einen Streichwinkel θ_s (sofern dieser denn existiert) und einigen neudefinierten Invarianten ausdrückt:

$$\mathbf{T}' = J_1 \begin{pmatrix} 1 + I_0 \cos(2\theta_s) & I_0 \sin(2\theta_s) - I_0 I_7 \\ I_0 \sin(2\theta_s) + I_0 I_7 & 1 - I_0 \cos(2\theta_s) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Die hier verwendete Größe J_1 ist eine Rotationsinvariante, die sich teilweise aus Invarianten berechnet, wie sie im vorgeführten Satz von WAL (2000) vorgeschlagen wurden:

$$J_1 = \frac{\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2 - \xi_3 \eta_3 + \xi_4 \eta_4}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2} \equiv \frac{\Im(\det(\mathbf{M}))}{I_1^2(1 - I_3^2)}.$$

Die Gleichung 1 ist für die folgenden Überlegungen fundamental, denn aus dieser leiten WAL die Zerlegung des Phasentensors in drei Komponenten ab, die mit 1D-, 2D- und 3D-Beiträgen identifizierbar sind (siehe Abb.3). Er charakterisiert den Phasentensor durch 3 Rotationsinvarianten J_1, J_2 und J_3 ,

$$\mathbf{J} = \cos(2\theta_s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sin(2\theta_s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \text{Einheitsmatrix}$$

$$\mathbf{T} = J_1 \mathbf{I} + J_2 \mathbf{J} + J_3 \mathbf{K}$$

1D-Beitrag 2D-Beitrag 3D-Beitrag

Abbildung 3: Dekomposition des Phasentensors nach WAL (2003)

wobei

$$J_2 = I_0 \cdot J_1,$$

$$J_3 = I_7 \cdot J_2 = I_0 \cdot I_7 \cdot J_1.$$

sind. WAL schlussfolgern, dass wenn $J_1 \gg J_2, J_3$ gilt, der Phasentensor diagonal ist und somit der 1D-Fall vorliegt. Wenn weiterhin J_2 gegenüber J_1 nicht vernachlässigbar ist, aber $J_2 \gg J_3$ gilt, verbleibt der Phasentensor symmetrisch und somit liegt dann der 2D-Fall vor. Im 3D-Fall ist dann J_3 nicht zu vernachlässigen. Dieser Sachverhalt lässt sich in einem Mohrkreis darstellen, welcher dann dieselben Charakteristiken aufweist, wie die Mohrkreise des MT-Tensors (Abb.4).

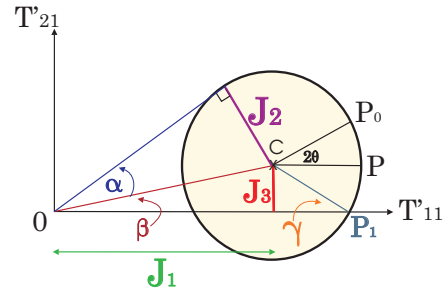


Abbildung 4: Mohrkreis des Phasentensors nach WAL (2003). Abgebildet ist der 3D-Fall. Wiederum gilt: im 2D-Fall liegt der Kreismittelpunkt auf der T_{11} -Achse, im 1D-Fall schrumpft der Kreis zu einem Punkt auf der Achse.

J_1, J_2 und J_3 hängen in ihren Magnitudenverhältnissen offenbar von nur zwei Invarianten ab, I_0 und I_7 , die beide vom Betrag her zwischen Null und Eins liegen. Daher vergleichen WAL nunmehr diese beiden Invarianten zur rechnerischen Bestimmung der Dimensionalität und fußen ihre Entscheidungslogik auf das in Abb.5 (a) dargestellte Flussdiagramm.

Hier ist zu bemerken, dass in WAL's Flussdiagramm an der Stelle zur Prüfung der Eindimensionalität die Bedingung $I_0 < 0.1$ hinreichend ist, da dies $I_0 |I_7| < 0.1$ ohnehin impliziert, d.h. es wird letztlich „nur“ nach I_0 und I_7 abgefragt. Der Wert „0.1“ ist hierbei willkürlich von WAL als Grenzwert gewählt worden, ab dem eine Invariante zu

vernachlässigen ist. Dieser Grenzwert muss bei der Behandlung realer Daten kritisch betrachtet werden.

Die Flussdiagramme in Abb.5 weisen Daten als „ungültig“ zurück, welche nicht 3D zu sein scheinen (also $|I_7| < 0.1$), und dennoch ein von Lilley (1998) formuliertes „fundamentale Kriterium“ verletzen: Bei einem MT- Tensor muss $\det(\Re(\mathbf{M})) > 0$ und $\det(\Im(\mathbf{M})) > 0$ gelten, damit er überhaupt physikalisch sinnvoll behandelbar ist. Graphisch bedeutet dies, dass der Koordinatenursprung weder innerhalb des Real- noch innerhalb des Imaginärmohrkreises liegen darf. Diese Forderung ist erfüllt, solange I_3 und I_4 , welche mit den „determinantal impedances“ verknüpft sind, beide < 1 sind. Laut WAL (2003) sind „ungültige“ Daten möglicherweise in einer hohen lokalen Anisotropie (gegenüber regionalen) begründet.

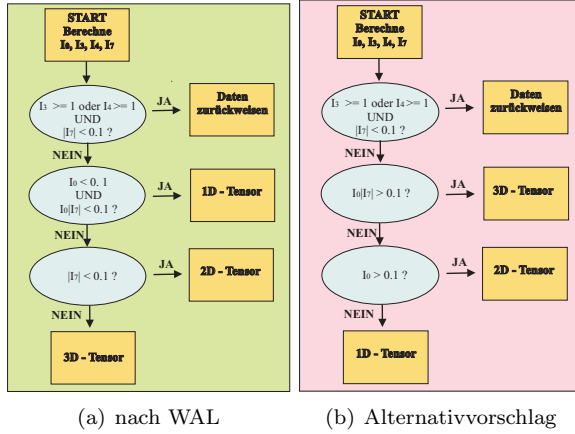


Abbildung 5: (a) Das Flussdiagramm zur Bestimmung der Dimensionalität nach WAL (2003). Das Flussdiagramm weist den Daten eine Dimensionalität zu gemäß der Vorschrift: Ist der Tensor „ungültig“, dann zurückweisen. Wenn 2D- und 3D-Term vernachlässigbar sind (also J_2 und J_3 klein gegenüber J_1 , vgl. Abb.3), so sind die Daten eindimensional. Ist dem nicht so und der 3D-Term ist vernachlässigbar gegenüber dem 2D-Term, dann sind die Daten zweidimensional. Ist der 3D-Term nicht vernachlässigbar, so sind die Daten dreidimensional. (b) Ein alternativer Vorschlag zur Bestimmung der Dimensionalität. Der wesentliche Unterschied besteht nicht nur in der Richtung, sondern darin, dass $|I_7|$ nicht allein darüber entscheidet, ob die Daten 2D oder 3D sind.

Ein Alternativ- Vorschlag: Aus den oben angeführten Betrachtungen ist es sofort erkennbar, wie WAL (2003) zu ihren Bedingungen für die Dimensionalität und dem resultierenden Flussdiagramm kommen. Doch betrachtet man nochmals Gleichung 1, so kann man ebenso folgern, dass

1. wenn $I_0 |I_7|$ nicht vernachlässigbar ist, dann $\mathbf{T}'$ nicht symmetrisch sein kann und ergo der Tensor 3D ist,

2. wenn $I_0 |I_7|$ aber doch vernachlässigbar ist, aber I_0 leider nicht, dann der Tensor zwar nicht diagonal aber zumindest symmetrisch ist und ergo 2D sein muss und
3. wenn schließlich auch noch I_0 vernachlässigbar ist, der Tensor diagonal und ergo nur noch 1D sein kann.

Nach dieser Vorgehensweise kann man ein etwas anderes Flussdiagramm aufstellen (siehe Abb.5 (b)), was sich nicht nur darin von WAL (2003) unterscheidet, dass man rückwärts vorgeht, sondern sich auch in der Abfrage der Parameter unterscheidet. In Abb.5 (b) sieht man, dass nicht I_7 (wie in (a)) sondern vielmehr die Invariante $I_0 |I_7|$ als Entscheidungskriterium für Dreidimensionalität dient. Die folgenden einfachen Zahlenbeispiele sollen Klarheit verschaffen: Sei $\theta_s = 45^\circ$, $I_0 = 0.2$ und $I_7 = 0.2$, so ergibt sich für $\mathbf{T}'$ durch einsetzen in Gl.1:

$$\mathbf{T}' = J_1 \begin{pmatrix} 1 & 0.24 \\ 0.16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man dies, so ließe sich darüber streiten, ob $\mathbf{T}'$ im Rahmen der Messgenauigkeit als symmetrisch anzusehen sei oder nicht (in erster Näherung sind $T'_{12} \approx T'_{21} \approx 0.2$). Nach WAL's Flussdiagramm würde der Tensor als 3D eingestuft werden, im alternativen Flussdiagramm aber 2D. Ein weiteres Zahlenbeispiel wird nun betrachtet: Sei $\theta_s = 0^\circ$ (die Tellurik ist also senkrecht bzw. parallel zu der vermeintlichen Streichrichtung ausgerichtet), $I_0 = 0.2$ und $I_7 = 0.3$, so ergibt sich für $\mathbf{T}'$ durch einsetzen in Gl.1:

$$\mathbf{T}' = J_1 \begin{pmatrix} 1.2 & -0.06 \\ 0.06 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man dieses nun, so erscheinen die Nebendiagonalelemente doch vernachlässigbar klein, nach WAL würde die Sachlage als 3D eingestuft werden, nach dem alternativen Diagramm aber als 2D.

Hier wird folgendes klar: WAL betrachten also die Nebendiagonalelemente von $\mathbf{T}'$ in Gl.1, die gegeben sind durch $\{I_0 \sin(2\theta_s) \pm I_0 I_7\}$. Sie bilden das Verhältnis des zweiten Terms in der Summe zum ersten Term, d.h. $I_0 |I_7| : I_0 \sin(2\theta) = |I_7| : \sin(2\theta)$, und nehmen als Abschätzung für den Sinus die obere Grenze seines Wertebereiches (also Eins, d.h. ein Winkel von 90°). Zuletzt fordern sie, dass dieses Verhältnis, welches sich dann zu $|I_7| : 1$ reduziert, vernachlässigbar sein muss um Symmetrie des Phasentensors zu gewährleisten. Während WAL (2003) aber so verfahren, lassen sie dabei außer Acht, dass der Sinus des Streichwinkels so klein sein kann, dass der erste Summand in den Nebendiagonalelementen, also $I_0 \sin(2\theta_s)$ ohnehin vernachlässigbar wird. Denn dann kommt es nur noch darauf an,

ob der verbleibende zweite Summand $I_0 |I_7|$ auch vernachlässigbar ist, um Symmetrie des Tensors zu gewährleisten. Es ist in diesem Falle also unerheblich, ob $|I_7|$ groß ist, solange $I_0 |I_7| < 0.1$ gewährleistet ist. Somit scheint eine Analyse nach dem alternativ vorgeschlagenem Diagramm sinnvoller.

Auswirkung von Verrauschung

Um die Stabilität der Analyse gegenüber Rauschen zu testen, wurden von einem synthetischen Datensatz von WAL (2000) die MT-Tensoren stückweise wie folgt untersucht: Den acht Tensorelementen eines jeden Tensors wurden acht verschiedene Zufallszahlen hinzuaddiert/subtrahiert, die den jeweiligen Originalwert bis zu einem bestimmten Prozentsatz verrauschte. Dieser Vorgang wurde dann 100 Mal wiederholt, um 100 verschiedene verrauschte Realisationen zu erhalten. Von den 100 verrauschten Tensoren wurden dann jeweils die verrauschten Rotationsinvarianten berechnet und verglichen. Zu den 100 Realisationen der Verrauschung wurden die Dimensionalitätsbestimmungen beider Flussdiagramme berechnet und die Mohrkreise abgebildet. Die Invariante I_7 streute im Vergleich zu

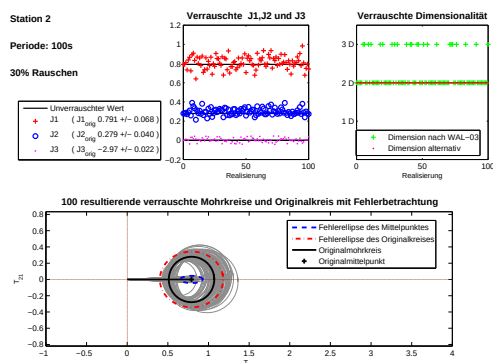


Abbildung 6: 30%-ige Verrauschung. Links oben: 100 Realisationen der verrauschten J_1, J_2 und J_3 , in der Legende (ganz links) sind die unverrauschten Werte mit Standardabweichung gegeben. Unten sind die 100 resultierenden Mohrkreise in grau eingezeichnet. Der unverrauschte Kreis ist schwarz, und um diesen wurden gemessen an den berechneten Standardabweichungen Fehlerellipsen für Mittelpunkt und Radius gezogen, um eine Möglichkeit einer graphischen Fehlerbetrachtung eines Mohrkreises zu geben. Rechts oben sind die Dimensionsergebnisse beider Diagramme dargestellt, erst bei 30% streut WAL's erheblich (grüne Kreuze), während das alternative Diagramm stabil bleibt (alle roten Punkte markieren 2D).

den anderen Invarianten besonders stark, doch beide Flussdiagramme bestimmten die Dimensionalität zuverlässig bis zu einer Verrauschung der Daten von 10%. Erst bei 30%-iger Verrauschung traten erhebliche Schwankungen in der Dimensionsanalyse nach WAL auf, während sich die alternative

als stabiler erwies (siehe Abb.6). Skewwerte blieben auch bei hoher Verrauschung klein (<0.2).

Anwendung auf ein ideales 2D-Modell

In Abb.7 (oben) ist das 2D-Modell zu sehen. Über einer zweidimensionalen Leitfähigkeitsverteilung sind an der Oberfläche alle 10 km insgesamt elf Stationen angesiedelt (U-1 bis U-11). Per 2D-Vorwärtsmodellierung in WinGlink wurden zu allen elf Stationen die MT-Tensoren für Perioden von 17s - 10000s berechnet. Die Hauptdiagonalelemente sind, wie es auch zu erwarten ist, allesamt Null. Daraus ergibt sich auch, dass der Skew nach Swift und der phasensensitive nach Bahr für alle Stationen und Perioden Null sind.

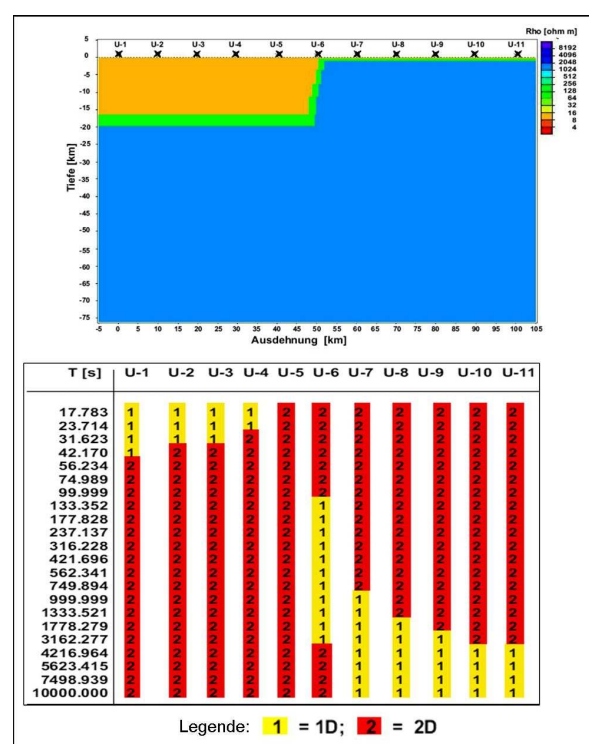


Abbildung 7: Oben: Das synthetische 2D-Modell (erstellt von Anne Neska, pers. Mitt.). Links ist eine 17 km dicke gutleitende Schicht von ca. 30 Ω m, darunter eine 3 km dicke Schicht von ca. 100 Ω m. In 50 km Entfernung (bei U-6) liegt eine vertikale Grenze, die diese Region von dem uniformen Viertelraum (1000 Ω m) trennt. Unten: Das Dimensionalitätsdiagramm (siehe Text).

Anhand der Tensorelemente wurden die Invarianten berechnet und das Flussdiagramm zur Bestimmung der Dimensionalität angewendet (Abb.7 unten). Das Flussdiagramm nach WAL und das alternative lieferten fast identische Ergebnisse. Erfreulich in Abb.7 (unten) ist die Tatsache, dass die Stationen U-1 bis U-5 zeigen, was man erwartet: Für kleine Perioden liegt der Induktionsraum innerhalb der gutleitenden Schicht, so dass von die-

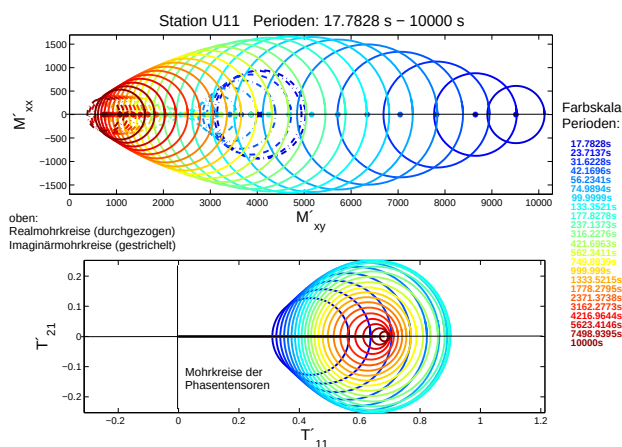


Abbildung 8: Mohrkreise der Station U-11 zu allen Perioden (Farbskala rechts). Oben: Imaginär- und Realkreise in kombinierter Darstellung. Unten: Mohrkreise der Phasensensoren.

sem Standpunkt aus die Welt 1D aussieht. Erst für größere Perioden wird die 2D-Struktur wahrgenommen. Um so näher die Stationen an der Grenzfläche zur 2D-Struktur (also bei U-6) liegen, um so eher umfasst der Induktionsraum auch schon bei kleineren Perioden die 2D-Struktur, so dass folglich die Dimensionalität auf 2D „anwächst“. Man erwartet also eine Art „Treppenstruktur“ von U-1 bis U-6, was auch zu sehen ist.

Mit der Gleichung für die Skintiefe lässt sich dies noch mehr verdeutlichen: Bei der Periode $T = 17.18 \text{ s}$ beträgt die Skintiefe δ unter Station U-1 etwa 12 km, wenn man in $\delta \approx 0.5\sqrt{\rho T}$ einen spezifischen Widerstand von $\rho = 30 \text{ } \Omega\text{m}$ einsetzt. Also kann diese Station die 50 km entfernte 2D-Struktur nicht erkennen, die nur 10 km entfernte Station U-5 hingegen erkennt bereits die 2D-Struktur. Unter den Stationen U-7 bis U-11 ist bei der Periode $T = 17.18 \text{ s}$ ein Induktionsraum mit Radius 66 km definiert, wenn man in der Gleichung der Skintiefe $\rho = 1000 \text{ } \Omega\text{m}$ einsetzt, also erkennen alle Stationen auch bei der kleinsten Periode die 2D-Struktur.

Eine mögliche Erklärung für die 1D-Wertungen bei großen Perioden liefert folgende Überlegung: Berechnet man die Skintiefe für $T = 4216.9 \text{ s}$ (die Periode, ab welcher unter U-9 im Dimensionalitätsdiagramm alles 1D aussieht) und $\rho = 1000 \text{ } \Omega\text{m}$ ein, so ergibt sich eine Skintiefe von 1027 km (!). Die leitfähige Region müsste von diesem Standpunkt aus als vernachlässigbare oberflächennahe Schicht in einem ansonsten 1D-Modell gewertet werden.

Doch ist der Wechsel von einer 2D-Wertung zu einer 1D-Wertung nicht so abrupt, wie es erscheint, was besonders gut in der graphischen Darstellung verfolgt werden kann. In Abb.8 sind oben die Real- und Imaginärkreise zu allen Perioden abgebildet, und unten die Mohrkreise der Phasensensoren.

Als erstes fällt auf, dass alle Kreismittelpunkte auf der M'_{xy} - bzw. T'_{11} -Achse liegen (Für Imaginär- und Realkreise bedeutet das $I_5, I_6, I_7 = 0$, für die Phasentensorkreise $J_3 = 0$). Es kann sich daher um höchstens 2D-Fälle handeln. Man sieht oben bei den Realkreisen, dass bis zu einer bestimmten Periode (bis ca. 177 s, grün) mit wachsender Periode die Radien der Kreise größer werden, d.h. die Anisotropiewinkel in den Real- und Imaginärkreisen (und somit I_3, I_4) wachsen mit der Periode an, und diese dienen ja als ein Maß für die 2D-Anisotropie. Ab $T \approx 177 \text{ s}$ reduziert sich die Zweidimensionalität zunehmend. Deutlicher ist diese Entwicklung bei den Phasentensorkreisen in Abb.8 (unten) zu beobachten: Erst nimmt die Zweidimensionalität kontinuierlich mit der Periode zu bis $T \approx 177 \text{ s}$ (grün), um dann stetig abzunehmen (Phasentensorkreise schrumpfen auf Punkte zusammen), bis schließlich die Sachlage als 1D eingestuft wird (im Flussdiagramm abhängig vom gewählten Grenzwert in der Abfrage).

Es handelt sich bei Station U-11 also um einen kontinuierlichen Übergang zur Eindimensionalität der Tensoren und nicht um einen abrupten Wechsel, was das Dimensionalitätsdiagramm anmuten lässt. Daher ist es ratsam, beides in Kombination zu betrachten: Das Dimensionalitätsdiagramm für eine schnelle Einschätzung der Gesamtverhältnisse und die Mohrkreise im einzelnen für die genaue Entwicklung der Dimensionalität über die Perioden zu allen Stationen.

Anwendung auf reale Daten

Die vorgestellten Dimensionsanalysen wurden auf zwei reale Datensätze, die aus internationalen Großprojekten stammen, angewendet: Daten aus Polen, die im Projekt EMTESZ aufgenommen wurden, und Daten aus Jordanien des Projektes DESERT. Um Näheres über diese Projekte zu erfahren sei der interessierte Leser auf Brasse (2006) und die anderen Beiträge des EMTESZ-Blockes in diesem Band bzw. Ritter (2003) verwiesen.

U.a. darauf gestützt, dass die Daten aus Jordanien nach Betrachtungen von Ritter (2003) der Annahme einer vorliegenden 2D-Struktur gehorchten, scheint es bei realen Daten sinnvoll,

1. die Grenzwerte in der Abfrage der Flussdiagramme zu erhöhen (auf etwa 0.2) und
2. das alternative Flussdiagramm zur Dimensionsanalyse dem von WAL vorzuziehen.

Tut man dies, so ergibt sich, dass die weitgehend ungestörten Daten aus Jordanien als 2D bestätigt

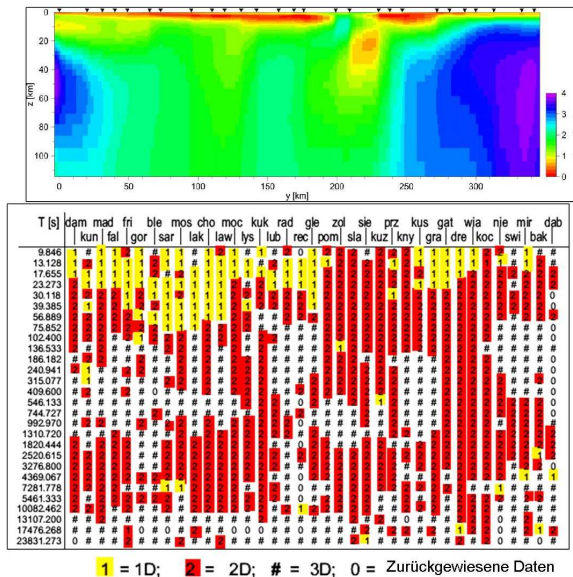


Abbildung 9: Auswertung der Daten des Projektes EM-TESZ. Oben: Ein vorläufiges 2D-Inversionsmodell von H.Brasse, A.Neska (pers.Mitt.), zur Erläuterung dessen wird auf die anderen Beiträge des EMTESZ-Blockes verwiesen und Brasse (2006). Unten: Das Dimensionalitätsdiagramm. Die Ergebnisse des alternativen Flussdiagrammes sind gezeigt mit einer Erhöhung der Grenzwertes in der Abfrage auf 0.2.

werden können, aber viele der Daten aus Polen dennoch 3D sind (siehe Abb.9).

Von den Daten aus Polen ist in den Abbildungen 10, 11(a) und (b) am Beispiel der Station WIA gezeigt, wie die Darstellung durch Mohrkreise und Interpretation durch Rotationsinvarianten möglich ist. Man kann Trends in der Entwicklung der Dimensionalität über die Perioden ablesen und Hinweise auf Gleichstromverzerrung erkennen. Das Dimensionalitätsdiagramm läßt durch „Treppenstrukturen“ Rückschlüsse auf Grenzstrukturen zu, allerdings kann die wesentliche geologische Struktur (TTZ) hierdurch nicht erkannt werden.

Schlussfolgerung

Das Flussdiagramm zur Bestimmung der Dimensionalität funktioniert bei synthetischen Daten sehr gut und lässt durch „Treppenstrukturen“ auch Hinweise auf Leitfähigkeitsgrenzen zu. Es empfiehlt sich die modifizierte Version (das alternativ vorgeschlagene) zu benutzen und bei realen Daten zudem den Grenzwert in der Abfrage zu erhöhen (etwa auf 0.2). Ergänzend zum Dimensionalitätsdiagramm bietet die Mohrkreisdarstellung des Phasentensors eine gute graphische Methode, um die genaue Entwicklung der Dimensionalität der Tensoren mit der Periode zu veranschaulichen, während die kombinierte Darstellung von Real- und Imaginärkreisen

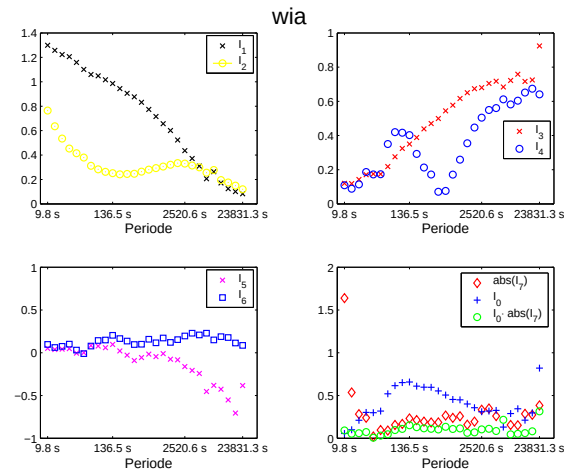


Abbildung 10: Die WAL-Invarianten zu allen Perioden der Station WIA. Links oben: I_1, I_2 , rechts oben: I_3, I_4 , links unten: I_5, I_6 , rechts unten: $|I_7|, I_0, I_0 \cdot |I_7|$. Für kleine Perioden liegt gleichstromverzerrter 1D bis 2D Tensor vor (solange I_3, I_4 klein sind, ist der Tensor 1D), denn I_5, I_6 sind vernachlässigbar klein. An I_0 kann man verfolgen, wie der verhältnismäßige 2D- Beitrag im Phasentensor erst ansteigt und ab ca. 100 s wieder abnimmt bis ca. 4000 s.

bzw. die Darstellung der WAL-Invarianten Hinweise auf Gleichstromverzerrung liefert.

Die Analyse erweist sich rechnerisch und graphisch als stabil gegenüber Rauschen, was eine graphische Fehlerbetrachtung unnötig macht.

Die Anwendung auf reale Daten aus Polen zeigt einerseits verständliche Aspekte (1D-Strukturen bei kurzen Perioden), andererseits aber auch viele dreidimensionale Strukturen für die Daten bei mittleren Perioden, die nicht verständlich sind. 3D- Modellierungen erscheinen hier demnach sinnvoll, um ein klares Abbild der elektrischen Eigenschaften des Untergrundes zu erhalten.

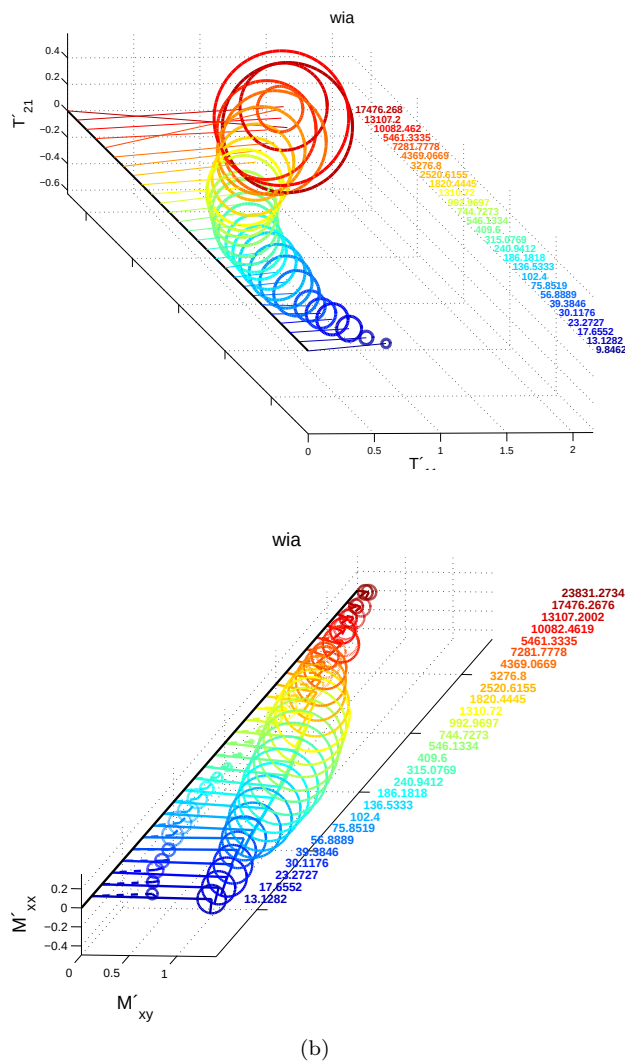


Abbildung 11: Mohrkreise der Station WIA, zur besseren Überschaubarkeit in einer dreidimensionalen Darstellungsform. Rotiert man das Achsengitter entsprechend, ergibt sich die bekannte Darstellung (wie z.B. in Abb.8). (a) Imaginär- und Realmohrkreise: Ein Vorteil dieser Darstellungsart ist, dass man durch Rotation des Achsengitters direkt ablesen kann, wo z.B. Gleichstromverzerrung vorliegt. (b) Phasentensormohrkreise.

Literatur

- [1] Brasse, H., Cerv, V., Ernst T., Jozwiak, W., Pedersen, L.B.B., Varentsov, Iv.M., and EMTESZ-Pomerania Working Group, 2006, *Probing the electrical conductivity structure of the Trans-European Suture Zone*, EOS Trans. AGU, in review
- [2] Caldwell, T. G., Bibby, H. M., and Brown, C., 2004, *The magnetotelluric phase tensor*, Geophysical Journal International, **158** (2), p.457-469
- [3] Groom, R. W. and Bailey, R. C., 1989, *Decomposition of Magnetotelluric Impedance Tensors in Presence of Local Three-Dimensional Galvanic Distortion*, Journal of Geophysical Research, **94**, p.1913–1925

- [4] Lilley, F. E. M., 1993, *Magnetotelluric analysis using Mohr circles*, Geophysics Online, **58**, p.1498–1506
- [5] Lilley, F. E. M., 1993, *Mohr circles in magnetotelluric interpretation. 1. Simple static shift. 2. Bahr analysis*, J. Geomagn. Geoelectr., **45**, p.833–839
- [6] Lilley, F. E. M., 1998, *Magnetotelluric tensor decomposition: Part I, Theory for a basic procedure*, Geophysics, **63**, p.1885–1897
- [7] Ritter, O., Ryberg, T., Weckmann, U., Hoffmann-Rothe, A., Abueladas, A., Garfunkel, Z. and DESERT Research Group, 2003, *Geophysical images of the Dead Sea Transform in Jordan reveal an impermeable barrier for fluid flow*, Geophysical Research Letters, **30**, p.1741–1744
- [8] Weaver, J. T., 1994, *Mathematical Methods for Geoelectromagnetic Induction*, Wiley, New York, **158** (2)
- [9] Weaver, J. T., Agarwal, A. K. and F. E. M. Lilley, 2000, *Characterisation of the magnetotelluric tensor in terms of its invariants*, Geophysical Journal International, **141**, 321–336
- [10] Weaver, J. T., Agarwal, A. K. and F. E. M. Lilley, 2003, *The relationship between the magnetotelluric invariants and the phase tensor of Caldwell, Bibby and Brown*, 3DEMIII Workshop, Adelaide

2D inversion for plane wave EM methods using an adaptive unstructured grid finite element approach: formulation, calculation of sensitivities and first results

Baranwal¹ V.C., Franke¹ A., Börner¹ R.-U., Spitzer¹ K., Sharma² S.P.

1. Institute of Geophysics, Freiberg University of Mining and Technology, Freiberg, Germany

2. Dept. of Geology and Geophysics, Indian Institute of Technology Kharagpur, India

Abstract

We present a 2D damped least-squares inversion approach for plane wave methods using an adaptive unstructured grid finite element forward operator. The development of an efficient inversion scheme to interpret two-dimensional (2D) magnetotelluric (MT) and very low frequency (VLF) data sets needs the elaborate calculation of the sensitivity matrix that contains the partial derivatives of the data with respect to the inversion model parameters. The perturbation method that determines the sensitivity matrix row-wise requires $(m + 1)n_f$ forward computations, where m is the number of model parameters and n_f the number of frequencies. The same numerical effort arises for another procedure called the sensitivity equation method that provides one linear system of equations for each row of the Jacobian matrix. However, it can be reduced to $(n + 1)n_f$ forward calculations where n is the number of observation points. This method uses a modified equation system obtained from the derivative of the finite element equations with respect to the model parameters.

For the forward calculations we use an adaptive unstructured grid finite element algorithm that allows for efficient discretisation of arbitrary 2D model geometries. However, the inversion model is parameterised on a coarser grid, for which the sensitivities are determined. Due to the small number of degrees of freedom the numerical effort is relatively low. So far, the procedure is implemented for inversion of E -polarisation data sets which is particularly relevant to the VLF method, however, the approach for inversion of H -polarisation will follow analogously without large effort. We show that the inversion process converges and gives reasonable results for simple cases. Concluding, we obtain a two-grid technique which has proved to be numerically efficient.

Introduction

Data inversion is a mathematical approach to fit the physical response computed for a parameter model to the observed data. In the last decades, inversion approaches have been developed by various researchers for 1D, 2D and 3D MT data (Jupp & Vozoff, 1975; deGroot-Hedlin & Constable, 1990; Smith & Booker, 1991; Mackie & Madden, 1993; Siripunvaraporn & Egbert, 2000; Rodi & Mackie, 2001). 1D MT data inversions are too simple to cope with a complex earth. However, 3D MT data inversions are very time consuming and large computer memory is required to solve the problem. In cases, where the assumption of 2D subsurface structures is valid, 2D inversion approaches serve as a rapid and numerically inexpensive alternative to obtain significant models.

A good review of inversion schemes is presented by Günther (2004). Among other methods, the Gauss-Newton or least-squares method is well known to minimise an appropriate objective function. Levenberg (1944) introduced the use of a Lagrange parameter to the Gauss-Newton approach. The method is described in detail by Marquardt (1963) and since then has been known as the Marquardt-Levenberg Method. Some researchers have referred it as damped least-squares method (Oristaglio & Worthington, 1980; Raiche et al., 1985) or ridge regression method (Inman, 1975). The damped least-squares method serves as a hybrid between the steepest descent and the Gauss-Newton methods (Lines & Treitel, 1984).

All the inversion schemes based on the minimisation of an objective function require the computation of the Jacobian or sensitivity matrix which consists of the partial derivatives of the observed data with respect to the

inversion model parameters. The perturbation or brute-force, the sensitivity-equation and the adjoint-equation method can be applied for the calculation of the sensitivity matrix (Rodi, 1976; McGillivray & Oldenburg, 1990; McGillivray et al., 1994; Farquharson & Oldenburg, 1996).

We have focussed on a discrete inversion approach of 2D MT data using the modified sensitivity-equation method (Rodi, 1976) for calculating the Jacobian. The region of interest is parameterised in rectangular blocks with piecewise constant electrical conductivities. The size of the rectangular blocks remains unchanged during the inversion process. Only the conductivities of the rectangular blocks vary to get an appropriate fitting of the computed to the observed data. We calculate the forward response on the basis of an adaptive unstructured grid finite element approach. Hence, we apply different parameterisation and discretisation schemes for forward modelling and inversion. All the codes are developed using MATLAB[®].

Forward Modelling

The propagation of electromagnetic fields is governed by Maxwell's equations. In the case of plane-wave, diffusive, time-harmonic electromagnetic fields in 2D conductivity structures they can be combined to yield two decoupled equations of induction

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 z^2} - i\omega\mu\sigma E_y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - i\omega\mu H_y = 0 \quad (2)$$

for E -polarisation and H -polarisation, respectively, in a right-handed Cartesian coordinate system with the positive z -axis pointing upwards. E_y is the electric field and H_y is the magnetic field. y denotes the strike direction. ω , μ , i , and σ are angular frequency, magnetic permeability, imaginary unit, and electrical conductivity, respectively. To solve for the unknown fields, inhomogeneous Dirichlet boundary conditions are applied that assign the field values for a horizontally layered half-space at the boundaries.

The forward computations are carried out by an adaptive unstructured triangular grid finite element (FE) algorithm (Franke et al., 2004). An adaptive mesh refinement is applied to get sufficiently fine meshes at conductivity contrasts. Additionally, the grid gets coarser towards greater depths and towards the boundaries due to a geometrical criterion that limits the adaptive refinement to the central region of the model. Adaptive mesh refinement redistributes the nodes of a uniform mesh in regions where a large number of nodes are required to guarantee a proper sampling of steep spatial field variations.

The FE discretisation leads to a system of equations that can be expressed in matrix-vector form as

$$(\tilde{K} + \tilde{M}) \vec{u} = 0, \quad (3)$$

where $\vec{u}$ is the column vector of the electric field values E_y and the magnetic field values H_y at each node in E -polarisation and H -polarisation, respectively. $\tilde{K}$ and $\tilde{M}$ are referred to as stiffness and mass matrix.

The remaining field components H_x , H_z for E -polarisation and E_x , E_z for H -polarisation can be determined at each grid node by

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}, & H_z &= -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \\ E_x &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z}, & E_z &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

The apparent resistivity ρ_a and the phase ϕ can be computed

for E -polarisation as

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_y}{H_x} \right|^2 \quad \text{and} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(E_y/H_x)}{\text{Re}(E_y/H_x)} \right) \quad (5)$$

and for H -polarisation as

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2 \quad \text{and} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(E_x/H_y)}{\text{Re}(E_x/H_y)} \right). \quad (6)$$

Inversion procedure

We apply the damped least-squares method for minimisation of the objective function ψ given by

$$\psi = \left(\Delta \vec{d} - S \Delta \vec{p} \right)^T \left(\Delta \vec{d} - S \Delta \vec{p} \right) + \lambda \left(\Delta \vec{p}^T \Delta \vec{p} - p_0^2 \right), \quad (7)$$

where $\Delta \vec{d} = (\vec{d}^{obs} - \vec{d}^{comp})$ denotes the discrepancy vector. $\vec{d}^{obs}$ represents the observed data and $\vec{d}^{comp}$ is the computed data for the assumed model. S and $\Delta \vec{p}$ denote the sensitivity matrix and the model parameter update, respectively. The logarithmised conductivities are considered as model parameters. The Lagrange parameter λ is introduced to constrain the energy of the model parameter update to a finite quantity p_0^2 . To get the minimum of the objective function ψ , its partial derivatives $\partial\psi/\partial\Delta p_j$ are required to be zero corresponding to all j . Therefore, deriving eq. (7) partially with respect to Δp_j and setting it to zero gives

$$S^T S \Delta \vec{p} + \lambda \Delta \vec{p} = S^T \Delta \vec{d}, \quad (8)$$

which can be rearranged to solve for the model parameter updates as

$$\Delta \vec{p} = (S^T S + \lambda I)^{-1} S^T \Delta \vec{d}. \quad (9)$$

As appears in eq. (9), the Lagrange parameter λ prevents $S^T S$ from being singular. It also damps large oscillating changes in the model parameters which may lead to unstable solutions during inversion process.

Logarithmic values of apparent resistivity and the phase in radian are used as data which assures both to have similar numerical values. The use of the logarithm of conductivities as model parameter prevents them to become negative during inversion. However, it may become unrealistically large when the solution starts to diverge.

The model parameters are updated by

$$p_j^{new} = p_j^{old} e^{\Delta p_j}. \quad (10)$$

Equation (9) has been solved iteratively applying a direct solver and model parameters are updated by eq. (10) after each iteration. We have applied three criteria to stop the iteration: (1) by defining the maximum number of iterations, (2) if the change in the error measure from one iteration to the next is less than 0.01%, and (3) when $\chi^2 \approx 1$.

The root mean square (RMS) error and χ^2 -value can be calculated by

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(d_i^{obs} - d_i^{comp})^2}{n}} \quad , \quad \chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(d_i^{obs} - d_i^{comp})^2}{\epsilon_i^2}, \quad (11)$$

where ϵ_i is the standard deviation of the error in the data. The χ^2 -criteria is well accepted due to the fact that noise in MT data is assumed as normally distributed. If the amount of noise is known in the observed data then the χ^2 -criteria stops the inversion before the noise is fitted (Whittall & Oldenburg, 1992).

There remains the open problem to select an appropriate value of the Lagrange parameter λ . The L -curve and generalised cross validation (GCV) criterion can be used for the selection of proper starting λ -value. We have observed that the maximum singular value of $S^T S$ proves to be sufficient as the starting value for λ .

To get fast convergence, λ is decreased by a factor of less than one (e.g. 0.5) in each iteration. Whenever the solution starts to diverge i.e. the RMS error in the current iteration is more than the RMS error in the previous iteration, λ is increased again to make the solution stable. The introduction of λ in this fashion allows resolving of prominent model parameters (having largest singular values) first and model parameters with smaller singular values later.

We need to investigate the behaviour of the convergence to find an appropriate factor to decrease λ in each iteration. If the χ^2 -value converges very fast or the solution starts to diverge before reaching the χ^2 -criterion then a larger factor is required to decrease λ so that we get $\chi^2 \approx 1$ in the last iteration before stopping the inversion process.

Sensitivity calculation

Here, we show how to determine the sensitivities for E -polarisation. In principle, the sensitivities may be computed by three methods: (1) the brute-force method, (2) the sensitivity-equation method, and (3) the adjoint-equation method.

For m model parameters, n observation locations, and n_f frequencies, the brute-force and the sensitivity-equation methods require $(m+1)n_f$ forward computations whereas the adjoint-equation method requires $(n+1)n_f$ forward computations.

Rodi (1976) has presented the efficient use of the sensitivity-equation method to compute sensitivities in a modified form depending on whether there are more observation points than model parameters or vice versa. The modified sensitivity-equation method requires $(n+1)n_f$ forward computations. Therefore, one of these sensitivity-equation methods can be used to calculate sensitivities depending on the actual number of parameters and observation sites. We have used the modified sensitivity-equation method for the calculation of the sensitivities. The same approach is used by Rodi and Mackie (2001) and Siripunvaraporn and Egbert (2000) for MT inversion and by Zhang et al. (1995) for DC resistivity inversion. Expressions for sensitivities of logarithmised apparent resistivity $S_{ij}^{ln\rho_a}$ and phase S_{ij}^ϕ for the i^{th} observation site and j^{th} model parameter can be computed by evaluating a complex quantity S_{ij} as

$$S_{ij}^{ln\rho_a} = 2\text{Re}(S_{ij}) \quad , \quad S_{ij}^\phi = \text{Im}(S_{ij}), \quad (12)$$

where S_{ij} will be expressed according to Farquharson and Oldenburg (1996) as

$$S_{ij} = \frac{1}{E_y} \frac{\partial E_y}{\partial \sigma_j} - \frac{1}{H_x} \frac{\partial H_x}{\partial \sigma_j}. \quad (13)$$

The electric field E_y and the magnetic field H_x at the i^{th} observation site can be computed from $\vec{u}$ by forming two column vectors $\vec{a}_i$ and $\vec{b}_i$ as

$$E_y = \vec{a}_i^T \vec{u} \quad , \quad H_x = \vec{b}_i^T \vec{u}. \quad (14)$$

$\vec{a}_i$ is formed by simply keeping 1 at the position of the i^{th} datum and zeros at all other nodes. $\vec{b}_i$ is designed to perform also a numerical differentiation over $\vec{u}$ according to eq. (4) and gives H_x value at the i^{th} observation site when used according to eq. (14). If the observation site is not located exactly at the discretised grid node then it is interpolated by two nearby grid nodes.

Now inserting the values of E_y and H_x into eq. (13) and using eq. (3) gives

$$S_{ij} = \left(\frac{1}{\vec{a}_i^T \vec{u}} \vec{a}_i - \frac{1}{\vec{b}_i^T \vec{u}} \vec{b}_i \right)^T \left(\tilde{K} + \tilde{M} \right)^{-1} \left(-\frac{\partial \tilde{M}}{\partial \sigma_j} \right) \vec{u}, \quad (15)$$

Since $(\tilde{K} + \tilde{M})$ is a symmetric matrix, a vector v_i can be introduced so that $\vec{v}_i^T = (\frac{1}{\vec{a}_i^T \vec{u}} \vec{a}_i - \frac{1}{\vec{b}_i^T \vec{u}} \vec{b}_i)^T (\tilde{K} + \tilde{M})^{-1}$. $\vec{v}_i^T$ is evaluated by solving a modified forward problem as

$$(\tilde{K} + \tilde{M}) \vec{v}_i = \left(\frac{1}{\vec{a}_i^T \vec{u}} \vec{a}_i - \frac{1}{\vec{b}_i^T \vec{u}} \vec{b}_i \right). \quad (16)$$

$\vec{u}$ is solved from eq. (3) and the value of $-\partial \tilde{M} / \partial \sigma_j$ can be calculated easily without much effort, hence, all the parameters are known to solve eq. (15). Therefore, a total of $n + 1$ forward computations are required to be solved for each frequency to calculate the sensitivities. One forward computation is required to solve eq. (3) for $\vec{u}$ and n forward computations are required to solve eq. (16) corresponding to n observation sites. The values of S_{ij} are used to compute the desired sensitivities $S_{ij}^{ln\rho_a}$ and S_{ij}^ϕ according to eq. (12).

Results and discussion

We present inversion results of an E -polarisation data set. The synthetic data are calculated for an assumed model and Gaussian noise is added to the synthetic data.

Synthetic Model

We consider a simple model (Fig. 1 left) for testing the performance of our inversion code. The model consists of an anomalous region having a conductivity of 0.1 S/m and a size of 300 m $\times$ 150 m within a 0.01 S/m half-space. The forward response is calculated at 9 different locations (arrows in Fig. 1 right)) ranging from -1000 m to 1000 m with 250 m spacing for frequencies 1000 Hz, 500 Hz and 100 Hz. 5 % Gaussian noise is added to the apparent resistivity and an equivalent of 1.5° is added to the phase data.

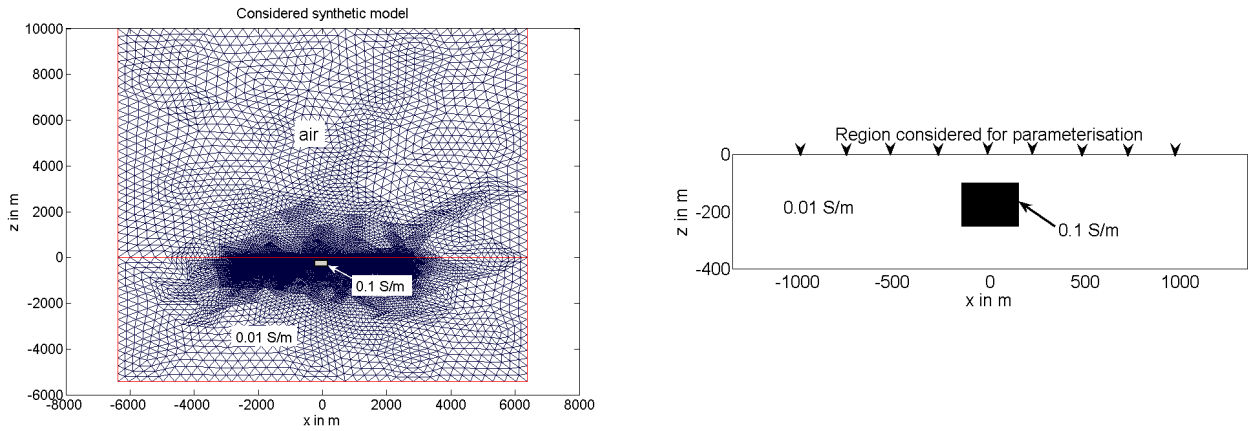


Figure 1: Synthetic model of a buried rectangular 0.1 S/m body (300 m $\times$ 150 m) within a half-space of 0.01 S/m for generating the synthetic data (left). The region considered for parameterisation to perform the inversion (right). Observation sites are marked by arrows.

Inversion results

We select a region as shown in Fig. 1 (right) for parameterisation to perform the inversion. The region is parameterised in rectangular blocks. The size of the blocks is fixed in the x -direction and increases by a factor of 1.5 in the z -direction. Two differently parameterised models with half-spaces of 0.01 S/m conductivity are assumed as starting models to test the inversion approach for different parameterisations. The first starting model for the

inversion is parameterised in such a manner that the anomalous region accommodates exactly in the parameterised region. Basic block size is considered as $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ for parameterisation. Minimisation stops after 5 iterations when $\chi^2 \approx 1$ (Fig. 2). The λ -value is decreased by a factor of 0.6 in each iteration. Fig. 3 depicts that inversion of the synthetic data is able to resolve the anomalous region and the conductivities of this region are also close to their true values. The fitting between observed and computed data is good as shown in Fig. 4.

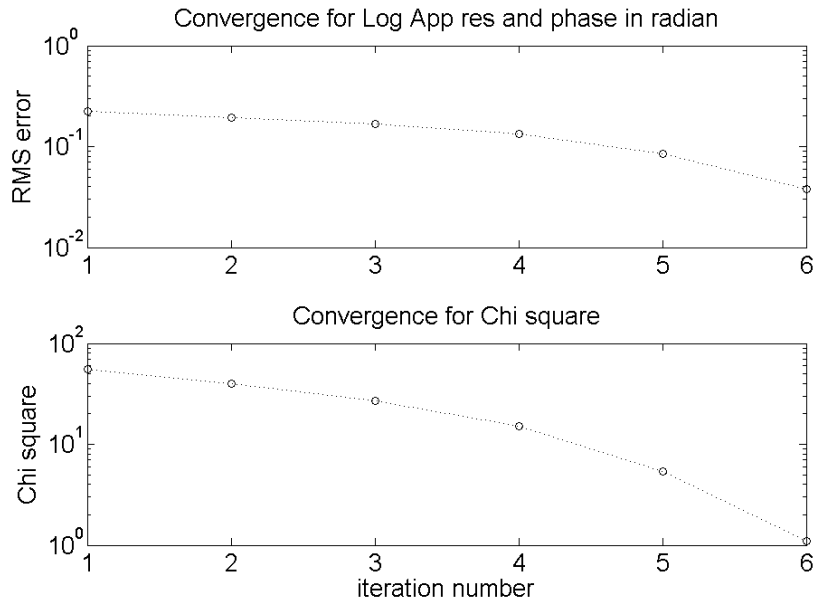


Figure 2: Convergence of RMS error and χ^2 -value during the iteration. Minimisation is stopped when $\chi^2 \approx 1$.

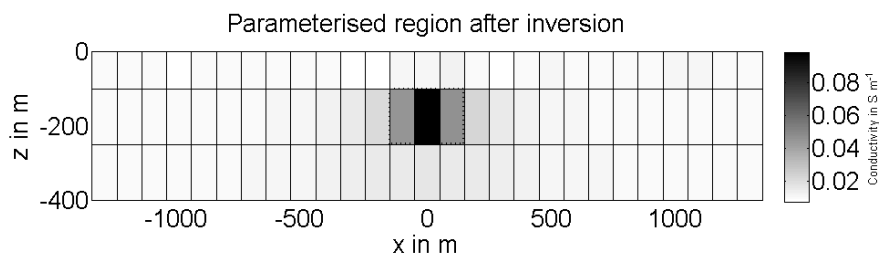


Figure 3: Model obtained from inversion using a 0.01 S/m half-space as starting model. Parameterisation accommodates the anomalous region exactly (covered by dashed lines).

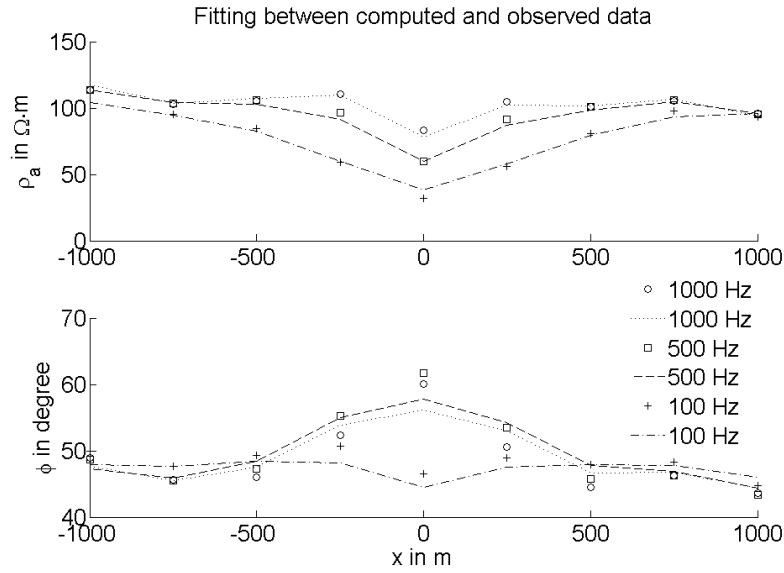


Figure 4: Fitting between observed and computed apparent resistivity and phase data. Symbols represent observed data and broken lines represent computed data.

The second starting model for the inversion uses the same half-space. However, the parameterisation is finer compared to the previous one and does not coincide with the outline of the perturbing body. Basic block size is considered as $50 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ for parameterisation. Minimisation stops after 5 iterations (Fig. 5). The λ -value is decreased by a factor of 0.5 in each iteration. The inverted model shows that the inversion result is close to the assumed model but some of the blocks in the upper corners of the anomalous region of the inverted model are not well resolved (Fig. 6). This may be due to the disagreement of the parameterisations and the higher degree of ill-posedness due to the larger number of parameters. However, the fitting is good for all frequencies (Fig. 7).

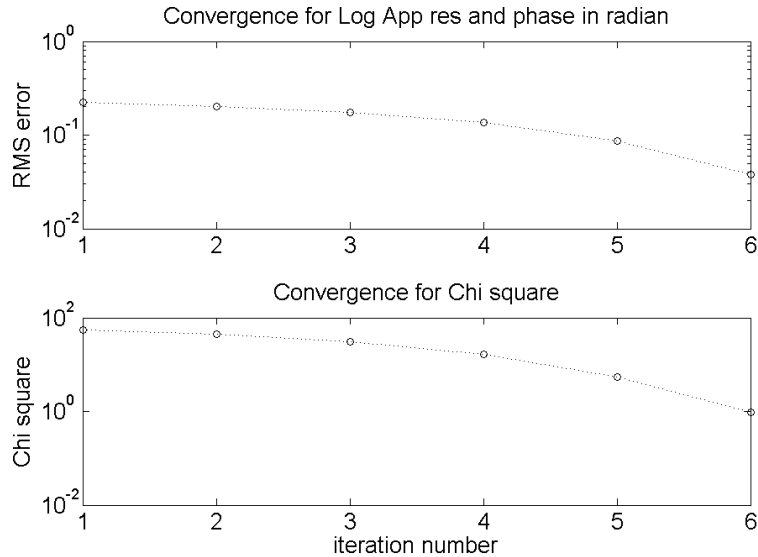


Figure 5: Convergence of RMS error and χ^2 -value during the iteration for the second model. Minimisation is stopped when $\chi^2 \approx 1$.

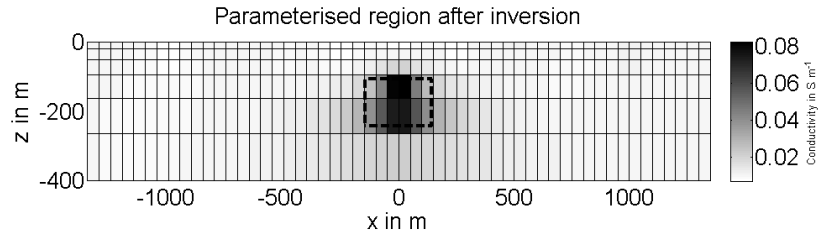


Figure 6: Model obtained after inversion. The starting model is a half-space of conductivity 0.01 S/m. Parameterisation is finer than the one used for the previous starting model and not able to accomodate the anomalous region exactly (covered by dashed lines).

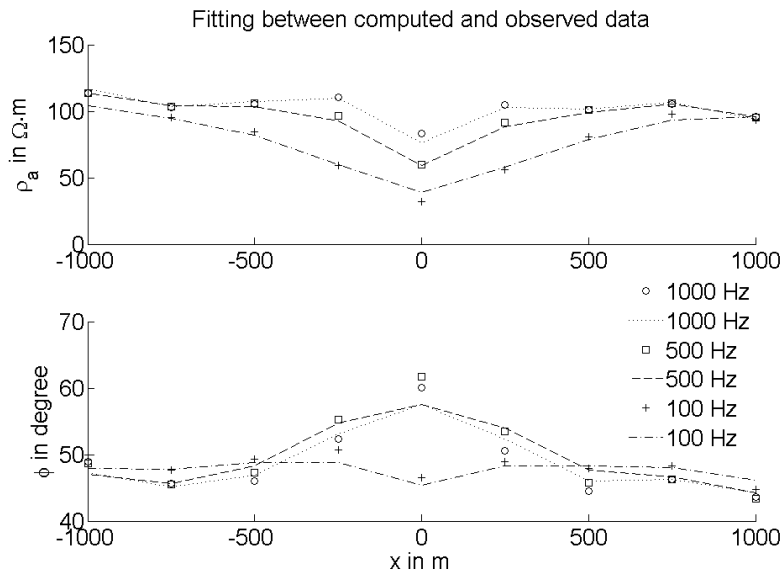


Figure 7: Fitting between observed and computed apparent resistivity and phase data for the second model. Symbols represent observed data and broken lines represent computed data.

Conclusion

This is the first step in the development of a new 2D inversion approach. We have shown that the algorithm works in principle. The elements of the sensitivity matrix are calculated by the modified sensitivity equation method which is efficient when the number of observation points is smaller than the number of model parameters.

Different discretisation and parameterisation schemes are used in forward modelling and inversion. The forward

simulation is done applying an adaptive unstructured triangular grid finite element algorithm that enables us to model nearly any 2D conductivity structure including surface topography. However, the inversion is carried out by parameterising the region of interest in rectangular blocks. This has to be considered as a first test of operational reliability. We will enhance the parameterisation to include topography in the inverse process as well and to exploit the full power of the forward operator. Mapping between forward modelling grid and parameterisation grid of the inverse model will thus become an important issue of our future research.

References

- deGroot-Hedlin, C., & Constable, S. (1990). Occam inversion to generate smooth, two-dimensional models for magnetotelluric data. *Geophysics*, 55, 1613-1624.
- Farquharson, C. G., & Oldenburg, D. W. (1996). Approximate sensitivities for the electromagnetic inverse problem. *Geophys. J. Int.*, 126, 235-252.
- Franke, A., Börner, R.-U., & Spitzer, K. (2004). 2d finite element modelling of plane-wave diffusive time-harmonic electromagnetic fields using adaptive unstructured grids: Extended abstract. *17th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth, Hyderabad, India*. [www-document. http://www.emindia2004.org., S.2-O.01](http://www.emindia2004.org., S.2-O.01), 1-6.
- Günther, T. (2004). *Inversion methods and resolution analysis for the 2d/3d reconstruction of resistivity structures from dc measurements*. Unpublished doctoral dissertation, TU Bergakademie Freiberg, Freiberg, Germany.
- Inman, J. R. (1975). Resistivity inversion with ridge regression. *Geophysics*, 40, 798-817.
- Jupp, D. L. B., & Vozoff, K. (1975). Stable iterative methods for the inversion of geophysical data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 42, 957-976.
- Levenberg, K. (1944). A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Quarter. Appl. Mathemat.*, 2, 164-168.
- Lines, L. R., & Treitel, S. (1984). Tutorial: A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems. *Geophys. Prospect.*, 32, 159-186.
- Mackie, R. L., & Madden, T. R. (1993). Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients. *Geophys. J. Int.*, 115, 215-229.
- Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Indus. Appl. Mathemat.*, 11, 431-441.
- McGillivray, P. R., & Oldenburg, D. W. (1990). Methods for calculating frechet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: a comparative study. *Geophys. Prospect.*, 38, 499-524.
- McGillivray, P. R., Oldenburg, D. W., Ellis, R. G., & Habashy, T. M. (1994). Calculation of sensitivities for the frequency-domain electromagnetic problem. *Geophys. J. Int.*, 116, 1-4.
- Oristaglio, M. L., & Worthington, M. H. (1980). Inversion of surface and borehole electromagnetic data for two-dimensional electromagnetic conductivity models. *Geophys. Prospect.*, 28, 633-657.
- Raiche, A. P., Jupp, D. L. B., Rutter, H., & Vozoff, K. (1985). The joint use of coincident loop transient electromagnetic and schlumberger sounding to resolve layered structures. *Geophysics*, 50, 1618-1627.
- Rodi, W. L. (1976). A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 44, 483-506.
- Rodi, W. L., & Mackie, R. L. (2001). Nonlinear conjugate gradient algorithm for 2-d magnetotelluric inversion. *Geophysics*, 66, 174-187.
- Siripunvaraporn, W., & Egbert, G. (2000). An efficient data-subsurface inversion method for 2-d magnetotelluric data. *Geophysics*, 65, 791-803.
- Smith, J. T., & Booker, J. R. (1991). Rapid inversion of two-and three-dimensional magnetotelluric data. *J. geophys. Res.*, 96, 3905-3922.
- Whittall, K. P., & Oldenburg, D. W. (1992). *Inversion of magnetotelluric data for a one-dimensional conductivity: Geophysical monograph series*. Soc. Expl. Geophys., Tulsa, OK.
- Zhang, J., Mackie, R. L., & Madden, T. R. (1995). 3-d resistivity forward modelling and inversion using conjugate gradients. *Geophysics*, 60, 1313-1325.

2D Finite Element modelling of plane-wave diffusive time-harmonic electromagnetic fields using adaptive unstructured grids

Antje Franke, Ralph-Uwe Börner, and Klaus Spitzer,

Technische Universität Bergakademie Freiberg, Institute of Geophysics, Freiberg, Germany

Summary

We present a new adaptive unstructured triangular grid Finite Element approach for effectively simulating electromagnetic fields in two-dimensional anisotropic conductivity structures. This requires the elaborate generation of huge irregular grids and their expensive administration to model nearly arbitrary geometries including surface topography.

To characterise the diffusion of the electromagnetic fields, a second order elliptic boundary value problem is solved. The appropriate inhomogeneous Dirichlet boundary conditions are calculated analytically for a 1D stratified ground.

The accuracy of the Finite Element solution is mainly influenced by mesh parameters, in particular the size of the triangles. However, fine meshes and thus large grids require great effort in computing time and memory. Adaptively refined meshes generate fine discretisations only where necessary and therefore obtain optimum trade-off between computational expense and quality.

Comparisons to analytical solutions and numerical calculations illustrate the robustness and flexibility of our FE approach with respect to model geometry and topography.

1 Introduction

Numerical modelling in magnetotellurics (MT) has generally been carried out using regularly structured grids. Finite difference (FD) methods approximate solutions on rectangular grids that discretise regions into piecewise constant parameter structures (Jones and Price, 1970, Brewitt-Taylor and Weaver, 1976, Mackie et al., 1993). Finite element (FE) approaches are basically not restricted to such orthogonal model geometries. Using triangles in 2D and tetrahedrons in 3D, a much more flexible outlining of structural boundaries may be achieved by employing non-uniform grids. However, for the sake of simplicity, FE approaches were implemented on regularly structured grids by decomposing rectangles into triangles and prisms into tetrahedrons (Coggon, 1971, Wannamaker et al., 1987). Thus, the full power of such discretisation techniques has not unfolded so far.

We present a 2D FE algorithm for modelling electromagnetic fields using adaptive unstructured grids to discretise areas including anisotropic conductivities and surface topography. This approach benefits from all the advantages of the FE method. Meshes are refined by an *a-posteriori* error estimator only where necessary optimising run time and accuracy. Our results for anisotropic models are compared to those obtained from an FE code by Li (2000) and an FD code by Pek and Verner (1997).

2 The Boundary Value Problem

The behaviour of plane-wave time-harmonic diffusive electromagnetic fields is governed by Maxwell's equations in the quasi-static approximation. They lead to a second-order elliptic partial differential equation (pde) of the general form

$$-\nabla \cdot (c \cdot \nabla u) + a \cdot u = f. \quad (1)$$

Let y be the strike direction of a 2D conductivity structure and $\sigma = \sigma(x, z)$ be the isotropic conductivity. The coordinate system is right-handed with the z -axis pointing negative downwards. In case of dipping anisotropy the conductivity tensor is

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

For E-Polarisation we have $\vec{E} = (0, E_y, 0)^T$ and for H-Polarisation $\vec{H} = (0, H_y, 0)^T$. The following definitions are valid for the coefficients a , c , and the right hand side f of eq. (1):

- E-polarisation: $u := E_y$

$$\begin{aligned} \text{isotropic: } & c := 1, \\ & a := i\omega\mu\sigma, \\ & f := 0, \\ \text{anisotropic: } & c := 1, \\ & a := i\omega\mu\sigma_{yy}, \\ & f := 0, \end{aligned} \quad (3)$$

- H-polarisation: $u := H_y$

$$\begin{aligned} \text{isotropic: } & c := 1/\sigma, \\ & a := i\omega\mu, \\ & f := 0, \\ \text{anisotropic: } & c := 1/\tau \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \\ & \tau = \sigma_{xz}\sigma_{zx} - \sigma_{xx}\sigma_{zz}, \\ & a := i\omega\mu, \\ & f := 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs} \cdot (\text{Am})^{-1}$ is the free space magnetic permeability and ω the angular frequency of the observed time-harmonic fields.

To solve for the unknown field components, appropriate boundary conditions need to be introduced. At the vertical outer domain boundaries, the analytical solution for a layered halfspace is given (Wait, 1953). Li (2000) presents a straightforward calculation of boundary conditions for arbitrarily anisotropic conductivity structures. The field values at the horizontal upper and lower boundaries are obtained by a cubic spline interpolation.

3 The Finite Element Method

In the FE method, a piecewise linear approximation u_h to the exact solution u is sought in the closed region $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ with the inner part Ω and the outer boundaries Γ . Therefore we test the elliptic pde $Lu_h = f$ against all possible test functions v of that class:

$$\int_{\bar{\Omega}} (Lu_h - f)v \, dx = 0. \quad (5)$$

L is an elliptical differential operator (cf. eq. (1)). u_h is represented as a combination $u_h(x) = \sum_{i=1}^n U_i N_i(x)$ with piecewise linear basis functions N_i (Fig. 1) and scalar coefficients U_i . To determine n unknowns $U_1, U_2, \dots, U_n$ we choose n test functions to be $v = N_1, N_2, \dots, N_n$. This results in a system of linear equations

$$(\tilde{K} + \tilde{M}) \vec{u} = 0, \quad (6)$$

where the stiffness matrix $\tilde{K}$ and the mass matrix $\tilde{M}$ contain integrals in terms of the basis functions N_i^e, N_j^e on triangle e , as well as the coefficients a and c defining the problem

$$\begin{aligned}\tilde{K}^e &= \iint_{\Omega^e} ((c \cdot \nabla N_j^e) \cdot \nabla N_i^e) dx dy, \\ \tilde{M}^e &= \iint_{\Omega^e} a N_i^e N_j^e dx dy\end{aligned}\quad (7)$$

for a single element e with area Ω_e . The vector $\vec{u}$ contains the field values $H_{y,i}$ or $E_{y,i}$ at each mesh point i . Considering the correlation between the local and global numbering of the grid nodes the element matrices $\tilde{K}^e$ and $\tilde{M}^e$ are assembled to constitute $\tilde{K}$ and $\tilde{M}$, respectively.

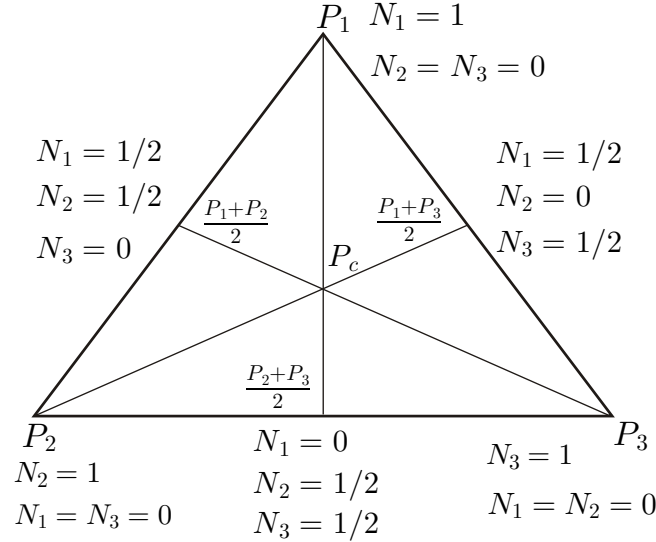


Fig. 1: Linear basis functions $N_i^e(P_j)$ ($i, j = 1, 2, 3$) on triangle e , $N_i^e(P_j) = 1$ ($i = j$) and $N_i^e(P_j) = 0$ ($i \neq j$).

The solution $\vec{u} = \vec{u}_\Omega + \vec{u}_\Gamma$ is composed of field values $\vec{u}_\Omega$ at the inner points in region Ω and $\vec{u}_\Gamma$ on the boundaries Γ . The Dirichlet boundary conditions $\vec{u}_\Gamma = \vec{E}, \vec{H}$ are considered separately. From eq. (6) we derive a system of linear equations for $\vec{u}_\Omega$:

$$(\tilde{K} + \tilde{M}) \vec{u}_\Omega = -(\tilde{K} + \tilde{M}) \vec{u}_\Gamma. \quad (8)$$

The quality of an FE solution can be remarkably improved by reducing the size of the grid elements. Unlike refining a mesh globally, an adaptive refinement strategy yields an optimal mesh with even less triangles (Fig. 2). The regions for adaptive mesh refinement are determined on the basis of an *a-posteriori* error estimator that considers the residual $f - au_h$ of eq. (1) on each triangle and the jump in flux $\vec{n} \cdot c \nabla u_h$ across the element edge. For linear basis functions we have $\nabla \cdot c \nabla u_h = 0$. $\vec{n}$ is the unit normal vector of the appropriate edge. A direct solver of the Gauß elimination type is applied to eq. (8). Jin (1993) and Monk (2003) are recommended for further reading about FE applications in electromagnetics. Due to the complexity of an FE implementation using unstructured grids we have utilised the MATLAB®pde toolbox for solving partial differential equations.

4 Comparison with Analytical Solutions

We have carried out simulations for different homogeneous halfspaces at a fixed frequency and for a layered halfspace using a set of frequencies. The results indicate that the accuracy of the calculated fields for a given grid is mainly dependent on the skin depth. Even for an adaptively refined mesh the number of grid nodes per skin depth is limited by the total addressable memory space (here around 300,000 triangles at 1 GB RAM).

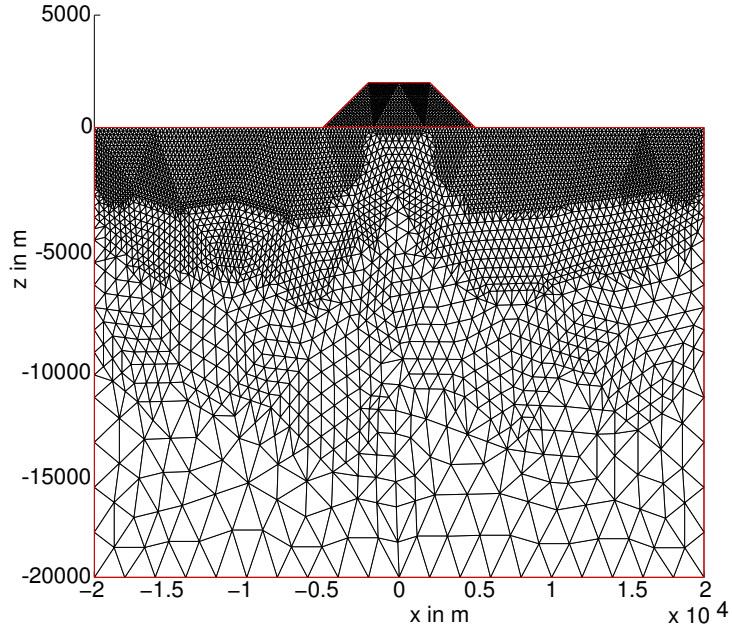


Fig. 2: Adaptively refined mesh for an H-Polarisation model with surface topography.

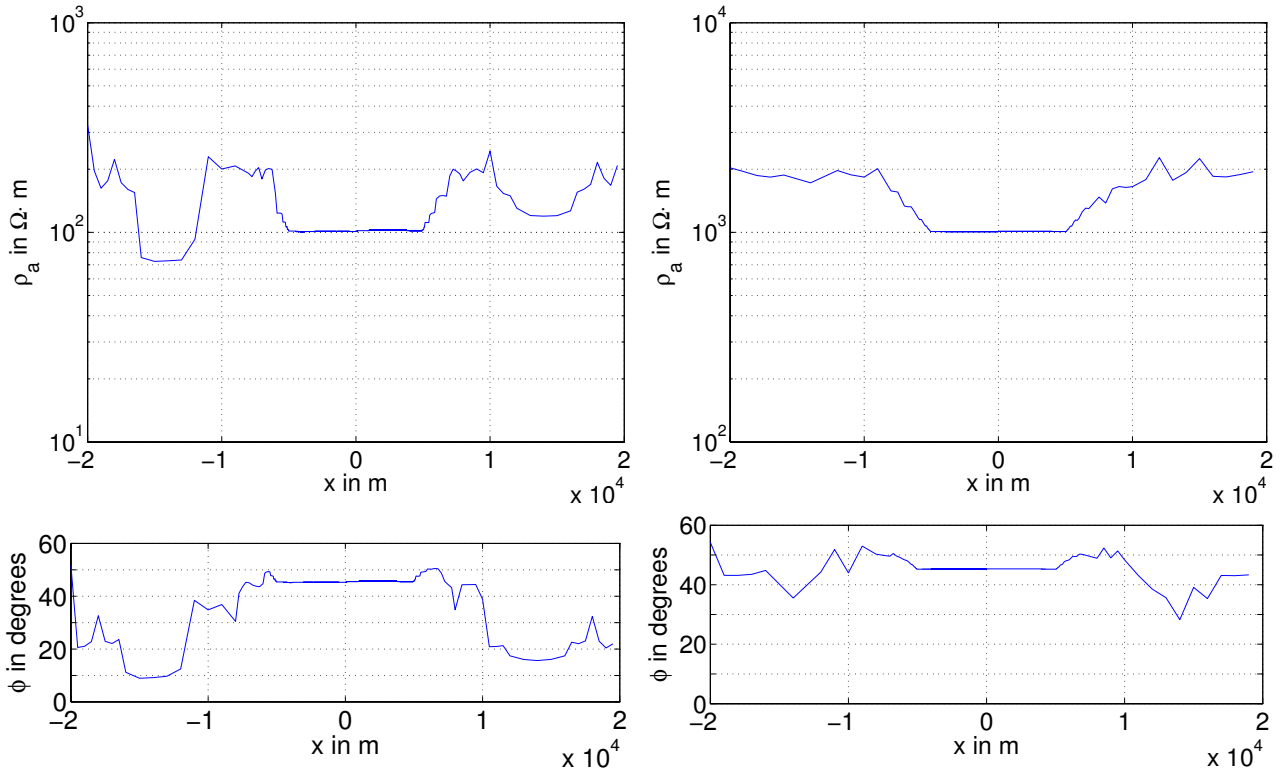


Fig. 3: Apparent resistivity ρ_a (top) and phase angle ϕ (bottom) at the surface of a $100\ \Omega\text{m}$ (left) and a $1000\ \Omega\text{m}$ (right) halfspace at a frequency of $f = 1\ \text{kHz}$, E-Polarisation, adaptive mesh refinement for $-5000\ \text{m} \leq x \leq 5000\ \text{m}$, error in adaptive refined region: $\delta_{\rho_a} \leq 2.5\%$, $\delta_{\phi} \approx 0.7\ \text{degrees}$ (left), $\delta_{\rho_a} \leq 1.5\%$, $\delta_{\phi} \approx 0.5\ \text{degrees}$ (right).

In Fig. 3, the 1000 Ωm halfspace solution (right) shows higher accuracy in apparent resistivity (top) and phase angle (bottom) than that of the 100 Ωm halfspace (left). Note, that the region of adaptive mesh refinement extends from $x = -5000$ m to $x = 5000$ m. The electromagnetic soundings in Fig. 4 are simulated for a 100 Ωm halfspace containing a layer of 10 Ωm between $z = -200$ m and $z = -300$ m. Again, the discrepancies at low periods are due to the appropriate small skin depths being covered by only few grid nodes. The accuracy may be enhanced further by adapting the model size to the frequency range.

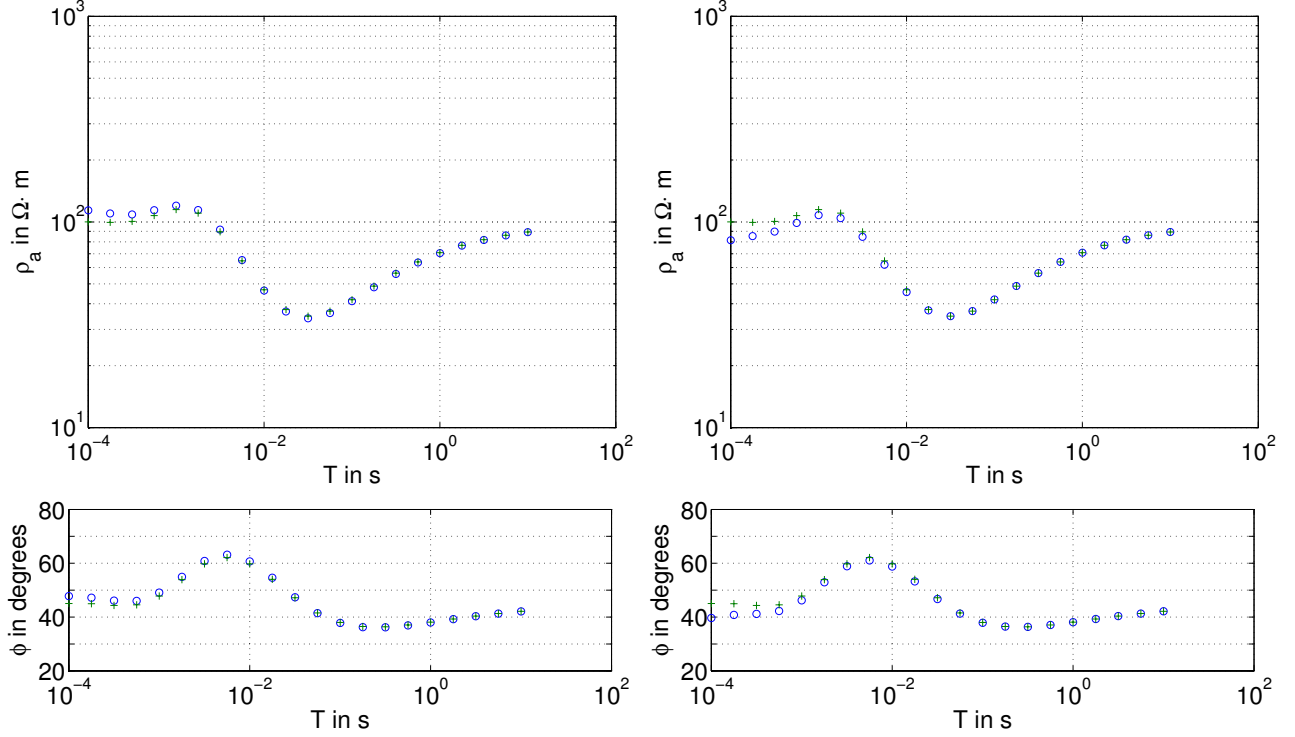


Fig. 4: Soundings of apparent resistivity ρ_a (top) and phase angle ϕ (bottom) over a 100 Ωm halfspace with an embedded 10 Ωm layer between -200 m and -300 m depth, analytic '+' (green) and numeric 'o' (blue) solution, E- (left) and H- (right) Polarisation, max. error: $\delta_{\rho_a} \leq 14\%$, $\delta_{\phi} \approx 2.8$ degrees (left), $\delta_{\rho_a} \leq 15\%$, $\delta_{\phi} \approx 5.4$ degrees (right).

5 Comparison with Numerical Calculations

One of the 2D COMMEMI (Comparison of modeling for Methods of Electromagnetic Induction) models was used as an example for comparing our FE approach with an FE program by Li (2000) and with an FD code by Weaver (1986).

Fig. 5 displays the COMMEMI model 2D-4. The apparent resistivity computed by our algorithm and the two reference codes for this model is shown in Fig. 6 for E- and H-Polarisation on the left- and right-hand side, respectively. The results are in good agreement.

Figs 7 and 8 present the horizontal current densities j_y and j_x for E- and H-Polarisation. In both cases, the currents are focussed in the upper conductive zones and decay with depth. Some channeling occurs in the thin 2.5 Ωm layer. j_y (Fig. 7) is discontinuous at horizontal conductivity contrasts whereas j_x (Fig 8) is continuous. In the right-hand diagrams large values of the imaginary parts of the current density $\text{Im}(j_y)$ (Fig. 7) and $\text{Im}(j_x)$ (Fig. 8) reflect strong induction effects in the conductive layers.

6 Anisotropy

Our FE approach is compared to the FD algorithm by Pek and Verner (1997) on the basis of the anisotropic dike model depicted in Fig. 9.

Fig. 10 displays the results computed by our FE approach and the FD reference algorithm in terms of apparent resistivity (top) and phase angle (bottom) for E- (right) and H- (left) Polarisation, respectively.

The dike structure leads to decreased apparent resistivity in both polarisation modes because all components of the dike's conductivity tensor are larger than the halfspace conductivity. However, the phase shows opposite behaviour for E- and H-Polarisation. This is due to the different directions of the currents. The asymmetry displayed in all curves is caused by the anisotropy.

Our results agree well with the values derived from the FD code. Higher deviations only occur within the dike and on its edges. At the conductivity contrasts the conditions of continuity are required for the electromagnetic field components. In the FE case, the mesh is generated adaptively on the basis of an error estimator. The FD grid is set up manually. It is coarser in the region of the conductivity contrast so that we assume our result to be more accurate.

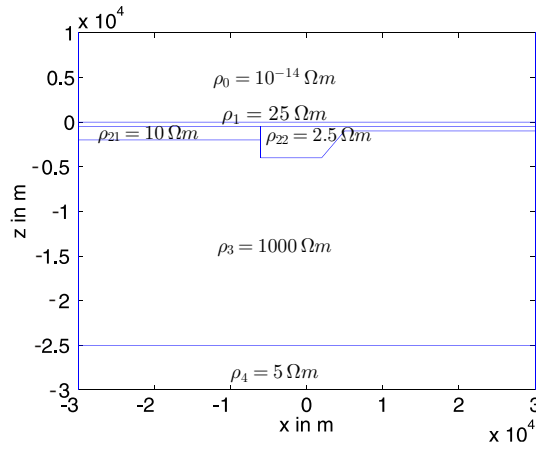


Fig. 5: COMMEMI model 2D-4.

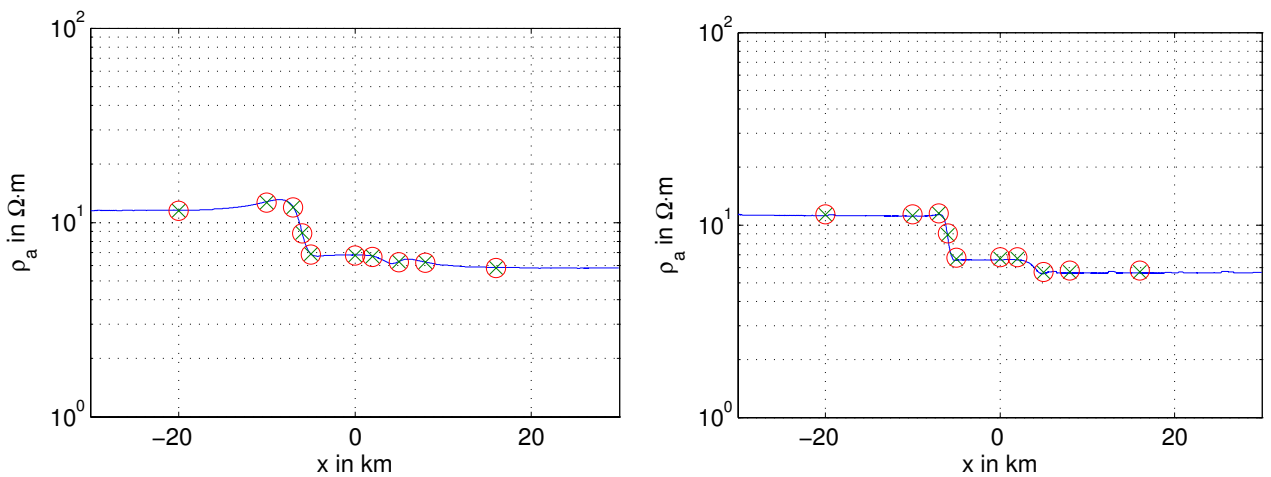


Fig. 6: Apparent resistivity ρ_a computed with our FE code '-', the one by Li '+', and the one by Weaver 'o' for E- (left) and H- (right) Polarisation. Deviations are about 2%.

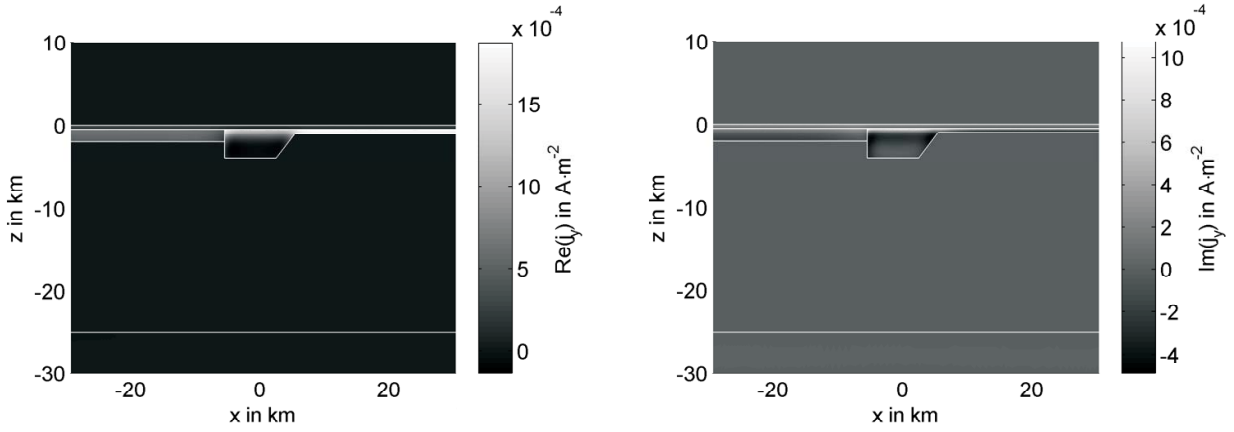


Fig. 7: Real (left) and imaginary (right) part of current density j_y , E-Polarisation.

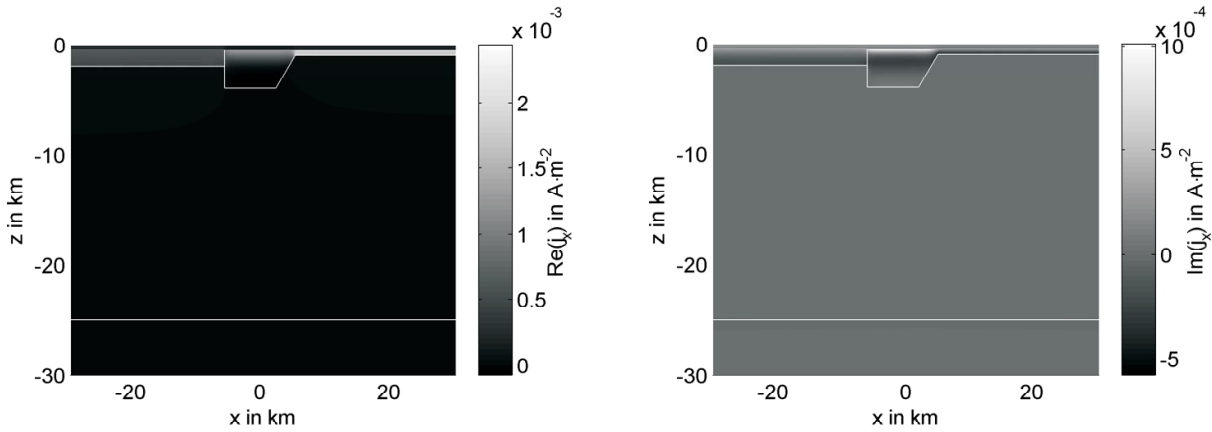


Fig. 8: Real (left) and imaginary (right) part of the current density j_x , H-Polarisation.

7 Topography

Wannamaker et al. (1986) discussed the topographic responses of simple-structured earth's surfaces. They applied triangular FE meshes that result from the decomposition of rectangular grid cells. However, unstructured grids provide the more precise discretisation of arbitrary model geometries. Exemplary, the topographic effects of a sinusoidal ($z = -\Delta \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)$, $\Delta = 100\text{ m}$ and $\lambda = 1000\text{ m}$) land surface are examined.

Fig. 11 shows the real part of the current density components j_y and j_x for E- and H-Polarisation, respectively. In the case of j_y (left diagram) large current densities occur in the conductive earth especially on top of the hills. The lateral lack of current flow in the air results in a higher apparent resistivity and larger phases over the hills while the extra current flow near the valleys yields negative anomalies in apparent resistivity and phase angle (Fig. 12 left). On the contrary, in the case of H-polarisation the current density j_x (Fig. 11 right-hand side) displays high values in the valleys. This leads to a decreased apparent resistivity on top of the hills. However, the phase depends on the direction of the currents as well so that it shows the same general tendency as for E-Polarisation.

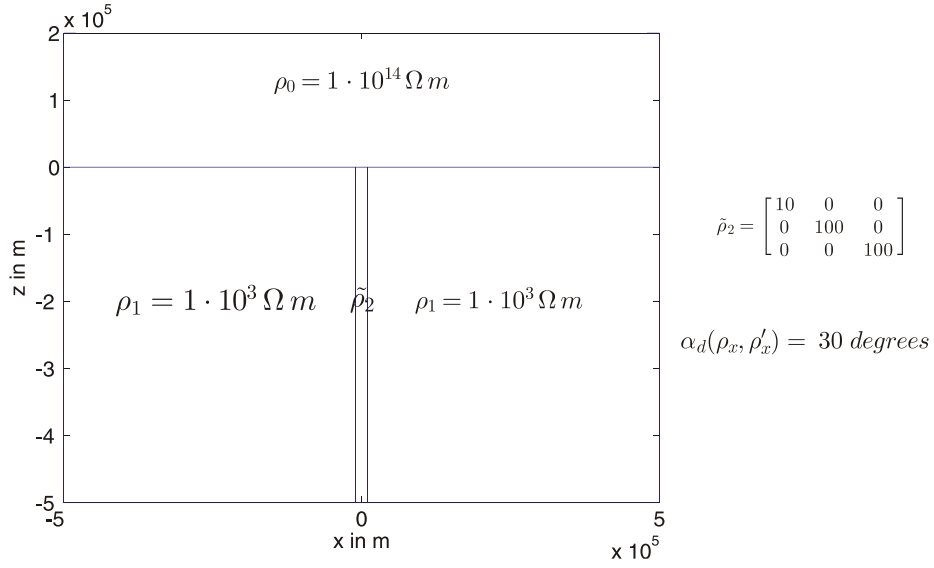


Fig. 9: Model of an anisotropic dike located in an isotropic homogeneous halfspace.

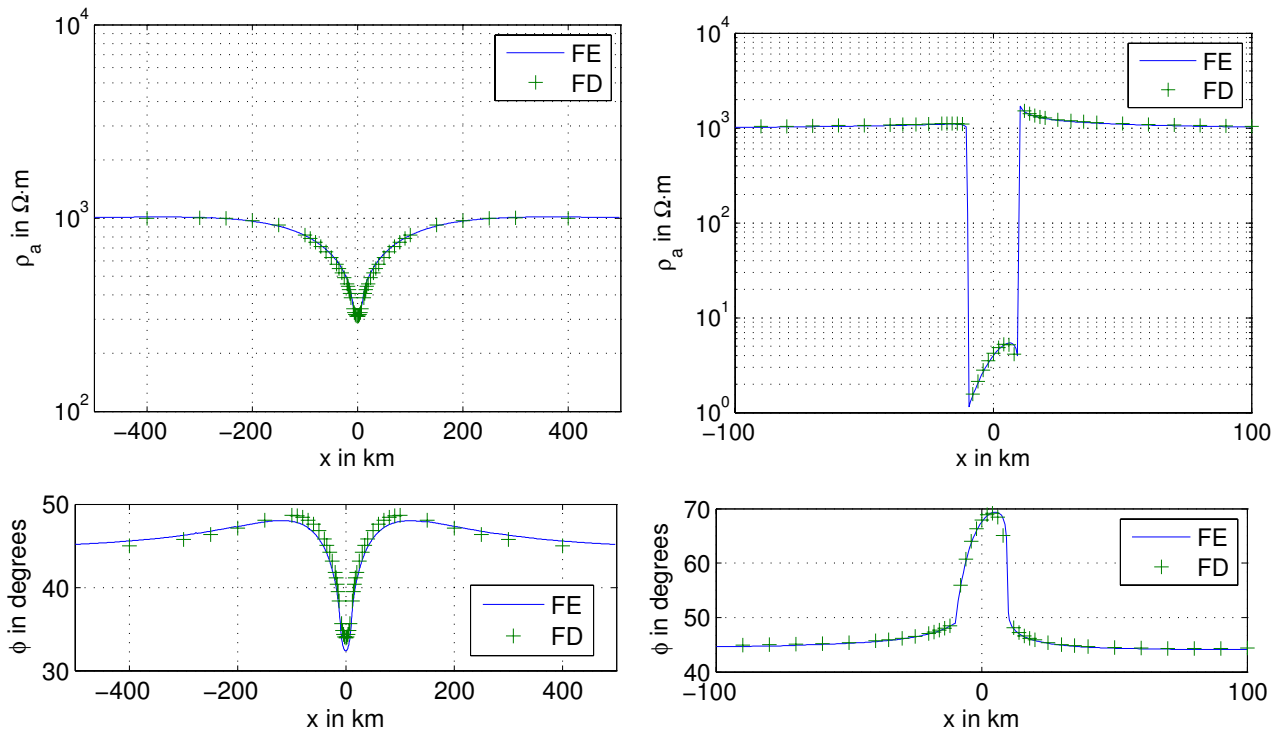


Fig. 10: Apparent resistivity ρ_a (top) and phase angle (bottom) ϕ for the dike model (Fig. 9) computed by the FE ('-') and the FD ('+') code at a frequency of $f = 0.01$ Hz, E- (left) and H-Polarisation (right), deviations: $\Delta\rho_a \leq 6\%$, $\Delta\phi < 1.6$ degrees, within the dike: $\Delta\rho_a \leq 20\%$, $\Delta\phi \leq 3.2$ degrees.

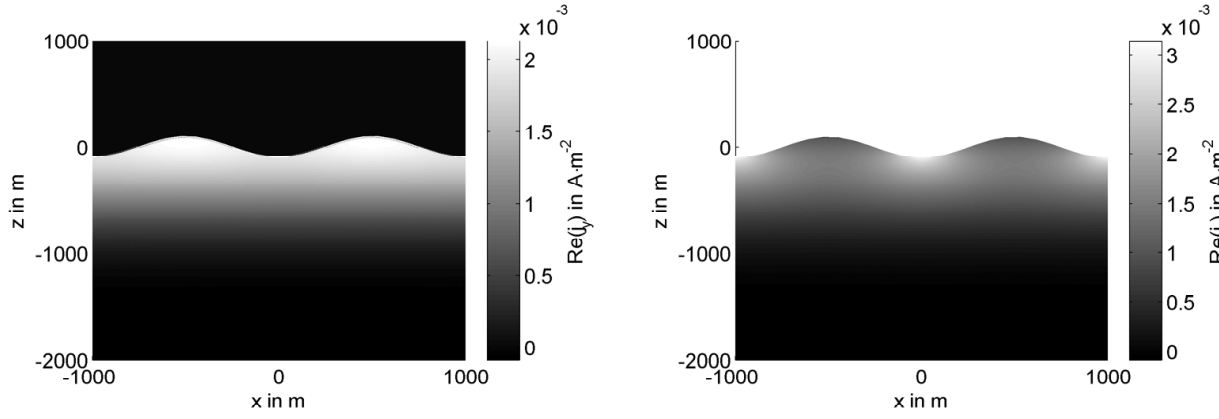


Fig. 11: Real part of current density $Re(j_y)$, E-Polarisation (left) and real part of current density $Re(j_x)$, H-Polarisation (right), $\rho_0 = 10^{14} \Omega m$ (air), $\rho_1 = 100 \Omega m$ (crust), $f = 100 Hz$.

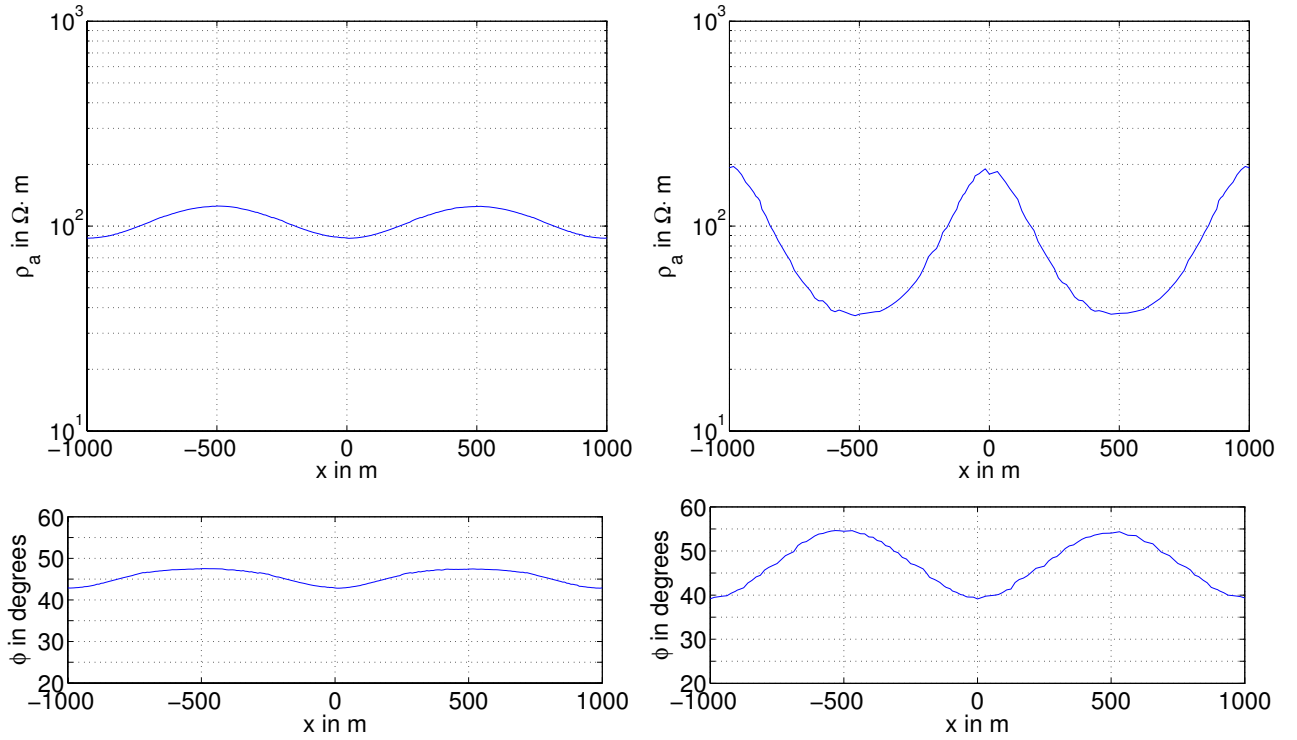


Fig. 12: Apparent resistivity ρ_a (top) and phase angle ϕ (bottom), E- (left) and H- (right) Polarisation.

8 Conclusions

We have developed an FE approach for modelling plane-wave diffusive electromagnetic fields. The appropriate boundary value problem consists of an elliptic second-order partial differential equation including inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. A system of linear equations results from applying the FE approximation with linear basis functions on unstructured triangular grids. So far, direct equation solvers are sufficient to obtain the solutions in reasonable times.

A comparison with analytical solutions and numerical calculations has shown that our FE approach is numerically robust. The use of unstructured grids is very suitable for simulating electromagnetic fields in arbitrary

model geometries especially if surface topography is involved. This seems to be very promising with regard to bathymetric data in marine geophysics.

Adaptive mesh generation guarantees high accuracy allowing for the efficient utilisation of computer memory.

The good experience with a commercial software toolbox encourages us to continue our strategy of integrating existing software for purely administrative software engineering reasons. This means cautious and controlled outsourcing of code generation with the aim of decreased development times, however, without loss of transparency.

Acknowledgements

Thanks to Y. Li for useful hints on boundary conditions for arbitrarily anisotropic conductivity structures and providing the results of his as well as J.T. Weaver's reference codes. The authors are grateful to J. Pek for making his FD algorithm available.

References

- Brewitt-Taylor, C. and Weaver, J. (1976). On the finite difference solution of two-dimensional induction problems. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 47, 375-396.
- Coggon, J. H. (1971). Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics*, 36, 132-155.
- Jin, J. (1993). *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Jones, F. W. and Price, A. T. (1970). The perturbations of alternating geomagnetic fields by conductivity anomalies. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 20, 317-334.
- Li, Y. (2000). *Numerische Modellierungen von elektromagnetischen Feldern in 2- und 3-dimensionalen anisotropen Leitfähigkeitsstrukturen der Erde nach der Methode der Finiten Elemente*. PhD thesis, Universität Göttingen, Cuvillier Verlag Göttingen.
- Mackie, R. et al. (1993). Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - theory and comparisons to integral equation solutions. *Geophysics*, 58, 215-226.
- Monk, P. (2003). *Finite element methods for maxwell's equations*. Oxford University Press Inc., New York.
- Pek, J. and Verner, T. (1997). Finite-difference modelling of electromagnetic fields in two-dimensional anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 128, 505-521.
- Wait, J. R. (1953). Propagation of radio waves over a stratified ground. *Geophysics*, 20, 416-422.
- Wannamaker, P. E. et al. (1986). Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements. *Geophysics*, 51, 2131-2144.
- Wannamaker, P. E. et al. (1987). A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modelling. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 88, 277-296.
- Weaver, J. T. (1986). *Finite difference calculations for commemi*. Department of Physics, University Victoria.

3-D Finite Elemente zur Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen

Christoph Schwarzbach (TU Bergakademie Freiberg)

`schwarzb@geophysik.tu-freiberg.de`

Abstract

Elektromagnetische Phänomene können mathematisch-physikalisch durch Randwertaufgaben beschrieben werden. In der Regel ist es nur möglich, die Lösung der Randwertaufgaben approximativ durch numerische Verfahren, wie die Methoden der Finiten Elemente oder Finiten Differenzen, zu bestimmen. Ausgangspunkt für die Methode der Finiten Elemente bildet dabei die Variationsformulierung. Diese wird unter Verwendung des Innenprodukts in Funktionenräumen aus der klassischen Randwertaufgabe gewonnen. Spezielle Finite-Elemente-Typen kommen für die Diskretisierung von Vektorfeldern zum Einsatz. Sie weisen im einfachsten Fall eine strukturelle Ähnlichkeit zur bei der Methode der Finiten Differenzen verwendeten Yee-Zelle (*staggered grid*) auf. Eine Verbesserung der Approximation der gesuchten Lösung kann neben der Gitterverfeinerung durch die Verwendung von Elementtypen mit Polynomen höherer Ordnung erzielt werden.

1 Einleitung

Software zur numerischen Simulation elektromagnetischer Phänomene, die auf der Methode der Finiten Elemente (FEM) basiert, erfreut sich zunehmender Beliebtheit. Ursachen dafür sind eine hohe Flexibilität bezüglich der Geometrie und der räumlichen Verteilung von Materialgrößen sowie die Möglichkeit, Approximationen der gesuchten Lösung von höherer Ordnung zu erhalten. Dieser Beitrag stellt deshalb am Beispiel der harmonischen Ausbreitung elektromagnetischer Wellen die Vorgehensweise vor, aus der üblichen Formulierung des Problems als Randwertaufgabe über die Formulierung als Variationsproblem eine Finite-Elemente-Lösung zu erhalten. Von besonderem Interesse sind die speziellen Typen finiter Elemente, die für die Diskretisierung von Vektorfeldern im dreidimensionalen Raum zum Einsatz kommen. Ein Vergleich von numerischer und analytischer Lösung eines vertikalen elektrischen Dipols schließt den Artikel.

2 Klassische Randwertaufgabe

Die Ausbreitung zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen kann als Randwertaufgabe für das elektrische Feld E formuliert werden. Die klassische Formulierung des Randwertproblems wird aus dem System der Maxwell-Gleichungen gewonnen. Dabei gelte eine Zeitabhängigkeit der Form $e^{-i\omega t}$, wobei i die imaginäre Einheit und ω die Kreisfrequenz bezeichnen. Die Randwertaufgabe wird durch Differentialgleichungen, Stetigkeitsbedingungen und Randbedingungen vollständig beschrieben:

1. In Gebieten Ω_j , $j = 1, 2, \dots$, mit glatter (einmal stetig differenzierbarer) Verteilung der Materialparameter gelten die Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} E) - \omega^2 \tilde{\epsilon} E = i\omega J_v \quad (1)$$

$$i\omega \operatorname{div}(\tilde{\epsilon} E) = \operatorname{div} J_v. \quad (2)$$

Hierbei sind $\tilde{\epsilon} = \epsilon + \frac{i}{\omega} \sigma$ der Tensor der komplexen elektrischen Permittivität, μ , ϵ und σ die Tensoren der magnetischen Permeabilität, der elektrischen Permittivität und der elektrischen Leitfähigkeit sowie J_v eine Quellstromdichte.

2. An der Grenze zwischen zwei Gebieten Ω_{j_1} und Ω_{j_2} , $j_1 \neq j_2$, ist die Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ sowie der Normalkomponenten der elektrischen Stromdichte $\mathbf{J}$, der dielektrischen Verschiebung $\mathbf{D}$ und der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ zu fordern.
3. Der Rand von $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$ wird zerlegt in disjunkte Gebiete Γ_1 und Γ_2 , auf denen dirichletsche bzw. neumannsche Randbedingungen gestellt werden,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) = i\omega \mathbf{J}_f \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (4)$$

$$i\omega \mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_v \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (5)$$

wobei $\mathbf{E}_0$ ein gegebenes elektrisches Feld auf Γ_1 ist und $\mathbf{J}_f$ eine gegebene Flächenstromdichte auf Γ_2 , die $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_f = 0$ genügt. Während die Randbedingungen (3) und (4) der Vektorwellengleichung (1) zugehörig sind, ergänzt die Randbedingungen (5) die Kontinuitätsgleichung (2).

3 Variationsformulierung

Ausgangspunkt für die Methode der Finiten Elemente bildet nicht die Formulierung als klassische Randwertaufgabe, sondern die sogenannte Variationsformulierung oder schwache Formulierung. Der Terminus *schwach* weist im mathematischen Sprachgebrauch darauf hin, dass die Identität der zwei Seiten einer Gleichung $x = y$ nur im Innenproduktsinne erfüllt sein muss, d. h. es wird die Identität der Innenprodukte von x und y mit ϕ , $(x, \phi) = (y, \phi)$, für alle ϕ gefordert. Das Innenprodukt zweier komplex- und vektorwertiger, quadratisch integrierbarer Funktionen Φ und Ψ ist definiert als

$$(\Phi, \Psi) := \int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot \Psi \, d^3r, \quad (6)$$

wobei $\bar{\Phi}$ die konjugiert komplexe Funktion von Φ bezeichnet. Ausgehend von Gleichung (1) erhält durch Bildung des Innenprodukts mit einer Testfunktion Φ , der Umformung (z. B. Monk 2003, S. 51)

$$\int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot \operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, d^3r = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \bar{\Phi} \cdot (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, d^3r + \int_{\partial\Omega} \bar{\Phi} \cdot (\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E})) \, d^2r, \quad (7)$$

der neumannschen Randbedingung (4) und der Forderung $\mathbf{n} \times \Phi = \mathbf{0}$ auf Γ_1 das folgende Variationsproblem

Bestimme $\mathbf{E} \in \mathcal{U}$, so dass

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \bar{\Phi} \cdot (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, d^3r - \omega^2 \int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) \, d^3r = i\omega \int_{\Omega} \bar{\Phi} \cdot \mathbf{J}_v \, d^3r - i\omega \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi} \cdot \mathbf{J}_f \, d^2r. \quad (8)$$

für alle $\Phi \in \mathcal{V}$ gilt. Dabei sind die Funktionenräume $\mathcal{U}$ der Ansatzfunktionen und $\mathcal{V}$ der Testfunktionen definiert durch

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{E} \in H^{\operatorname{rot}}(\Omega) : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \text{ auf } \Gamma_1 \}, \quad (9)$$

$$\mathcal{V} = \{ \Phi \in H^{\operatorname{rot}}(\Omega) : \mathbf{n} \times \Phi = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_1 \}, \quad (10)$$

$$H^{\operatorname{rot}} = \{ \Psi \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{rot} \Psi \in L^2(\Omega)^3 \}. \quad (11)$$

Das Variationsintegral (8) beinhaltet die Differentialgleichung (1), die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\mathbf{H}$ sowie die neumannsche Randbedingung (4). Diese Gleichungen werden bei der numerischen Approximation nur näherungsweise erfüllt, während die dirichletsche Randbedingung (3) sowie die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\mathbf{E}$ durch die Konstruktion der Funktionenräume $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ exakt gelten. Weiterhin kann man zeigen, dass Lösungen von (8) implizit und näherungsweise die Differentialgleichung (2) sowie die Randbedingung (5) erfüllen, falls $\omega > 0$.

4 Methode der Finiten Elemente

Nachdem die klassische Randwertaufgabe (1) bis (5) in die schwache Form gebracht worden ist, kann nun die Methode der Finiten Elemente angewandt werden, um die gesuchte Lösung numerisch zu approximieren. Dazu sind folgende Schritte erforderlich:

1. Das Gebiet Ω wird in einfache geometrische Elemente zerlegt, z. B. Hexaeder oder Tetraeder.
2. Der unendlich-dimensionale Funktionenraum H^{rot} wird durch einen endlich-dimensionalen Funktionenraum H_h^{rot} approximiert. Damit werden auch $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ endlich-dimensional und erhalten den Index h . Das Variationsproblem wird nun mit Ansatz- und Testfunktionen aus $\mathcal{U}_h$ und $\mathcal{V}_h$ formuliert.
3. Für H_h^{rot} wird ein vollständiger Satz Basisfunktionen $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ konstruiert. Damit lassen sich die gesuchten Felder als Linearkombination der vektorwertigen Basisfunktionen darstellen,

$$E(\mathbf{r}) = \sum_i e_i \Phi_i(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Die Basisfunktionen werden derart sortiert, dass die ersten $m \leq n$ Funktionen $\{\Phi_i\}_{i=1}^m$ eine Basis von $\mathcal{V}_h$ bilden. Die Koeffizienten e_i der restlichen Basisfunktionen Φ_i , $i = m+1, \dots, n$, sind durch die dirichletsche Randbedingung (3) festgelegt, die explizit in die Konstruktion von $\mathcal{U}_h$ eingeht. Damit ist $E \in \mathcal{U}_h$.

4. Die Forderung der Gültigkeit des Variationsintegrals (8) für alle Testfunktionen $\Phi \in \mathcal{V}_h$ ist äquivalent dazu, die Gültigkeit für alle Basisfunktionen $\Phi_i \in \mathcal{V}_h$, $i = 1, \dots, m$, zu fordern. Mit der j -ten Basisfunktion als Testfunktion ergibt sich aus dem Variationsintegral (8) und dem Ansatz (12) die j -te Zeile eines linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Linearkoeffizienten e_i ,

$$\sum_{i=1}^m a_{j,i} e_i = f_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (13)$$

mit

$$a_{j,i} = \int_{\Omega} \text{rot } \bar{\Phi}_j \cdot \left(\mu^{-1} \text{rot } \Phi_i \right) d^3r - \omega^2 \int_{\Omega} \bar{\Phi}_j \cdot (\tilde{\epsilon} \Phi_i) d^3r, \quad (14)$$

$$f_j = i\omega \int_{\Omega} \bar{\Phi}_j \cdot \mathbf{J}_v d^3r - i\omega \int_{\Gamma_2} \bar{\Phi}_j \cdot \mathbf{J}_f d^2r - \sum_{i=m+1}^n a_{j,i} e_i. \quad (15)$$

Damit ist die Lösung der Randwertaufgabe auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit komplexer, symmetrischer – nicht hermitescher – Koeffizientenmatrix A reduziert worden. Die für die Methode der Finiten Elemente charakteristische Wahl von stückweise polynomialen Basisfunktionen mit kleinem Träger – jede Basisfunktion ist nur auf einer kleinen Anzahl von Elementen ungleich Null – führt außerdem zu einer dünn besetzten Struktur von A .

Mit der Lösung des linearen Gleichungssystems e_i , $i = 1, \dots, m$, und den festgelegten Koeffizienten e_i , $i = m+1, \dots, n$, liefert die Darstellung (12) das elektrische Feld für jeden Punkt im Gebiet Ω . Dabei bilden die Basisfunktionen Φ_i , $i = 1, \dots, n$, die natürlichen, interpolatorischen Funktionen. Die Koeffizienten e_i entsprechen jedoch im Allgemeinen nicht dem Wert einer Komponente des Feldes an bestimmten Punkten des Raumes. Man beachte, dass die Koeffizienten Skalare und die Basisfunktionen Vektoren sind. Das Konzept zur Diskretisierung von Vektorfeldern soll im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

5 Finite Elemente für Vektorfelder

Zur Diskretisierung von Vektorfeldern werden spezielle Finite-Elemente-Typen benutzt (Kanten-/Nédélec-/Whitney-Elemente; Nédélec 1980; Whitney 1957). Ihre Basisfunktionen sind vektorwertig

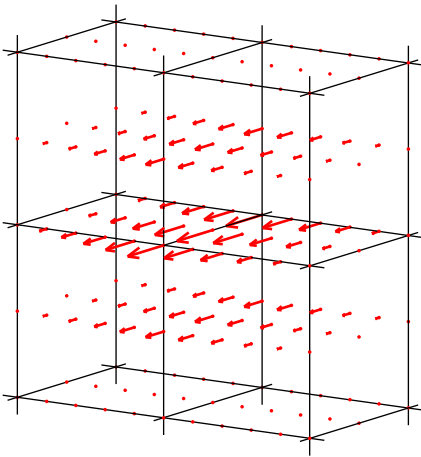


Abbildung 1: Ausschnitt eines Hexaedergitters mit einer stückweise linearen Basisfunktion, wie sie für die Diskretisierung von Vektorfeldern mit stetigen Tangentialkomponenten, z. B. von E , verwendet wird. Der Träger der Funktion besteht aus den 4 Hexaederelementen; auf allen anderen verschwindet sie.

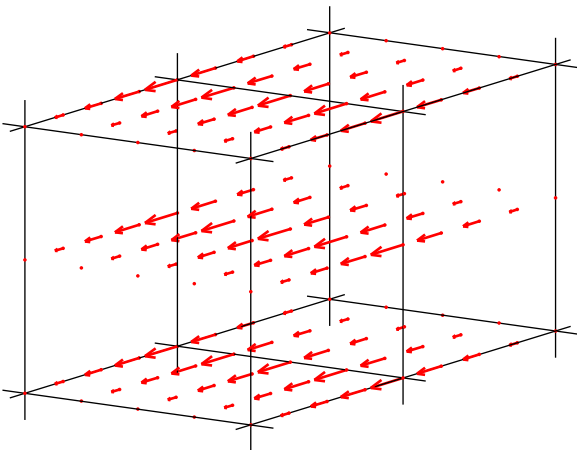


Abbildung 2: Ausschnitt eines Hexaedergitters mit einer stückweise linearen Basisfunktion, wie sie für die Diskretisierung von Vektorfeldern mit stetigen Normalkomponenten, z. B. von B , verwendet wird. Der Träger der Funktion besteht aus den 2 Hexaederelementen; auf allen anderen verschwindet sie.

und werden so konstruiert, dass sie den speziellen Forderungen an die Stetigkeit der Tangential- oder Normalkomponente genügen oder aber Sprünge zulassen. So hat jede Basisfunktion zur Diskretisierung des elektrischen Feldes (analog für das magnetische Feld) die Eigenschaft, dass ihre Tangentialkomponente auf Kanten oder Flächen der Elemente entweder verschwindet oder stetig ist, nicht jedoch zwingenderweise die Normalkomponente (Abb. 1). Basisfunktionen für die Diskretisierung von elektrischer Stromdichte, dielektrischer Verschiebung oder magnetischer Induktion hingegen haben entweder verschwindende oder stetige Normalkomponenten auf Elementflächen, lassen jedoch Sprünge in den Tangentialkomponenten zu (Abb. 2). Gelten die Stetigkeitseigenschaften für jede Basisfunktion, so gelten sie auch für jede beliebige Linearkombination derselben.

Die zur Darstellung der Felder als Linearkombination der vektorwertigen Basisfunktionen verwendeten Linearkoeffizienten sind skalare Größen und werden im Sprachgebrauch der Finite-Elemente-Theorie als Freiheitsgrade bezeichnet. Sie haben in der klassischen Definition von Nédélec (1980) die Bedeutung von gewichteten Momenten des Feldes. Das heißt, sie sind im Falle des elektrischen Feldes Integrale über die Tangentialkomponente des Feldes entlang einer Kante, über die zwei Tangentialkomponenten auf einer Randfläche des Elements bzw. über das Feld selbst im Volumen des Elements, die mit polynomialen Funktionen gewichtet sind. Die Beschränkung auf Tangentialkomponenten auf den Flächen und Kanten trägt der Tatsache Rechnung, dass nur die Tangentialkomponente von E stetig über Elementgrenzen hinweg ist. Die klassischen Freiheitsgrade für die magnetische Induktion z. B. sind definiert als Integrale über die Normalkomponente auf den Randflächen des Elements bzw. über die magnetische Induktion selbst im Elementvolumen. Damit wird der Stetigkeit der Normalkomponenten und der möglichen Unstetigkeit der Tangentialkomponenten über Elementgrenzen hinweg Rechnung getragen. Einen äquivalenten Satz von Freiheitsgraden erhält man, indem man anstelle der Momente des Feldes, also integraler Freiheitsgrade, punktuelle Freiheitsgrade verwendet. Ein solcher Freiheitsgrad entspricht gerade einer Komponente des Feldes an einem bestimmten Punkt des Elements.

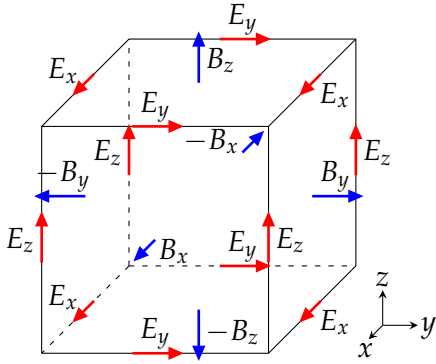


Abbildung 3: Anordnung der Feldkomponenten auf einem linearen Hexaederelement bzw. in einer Yee-Zelle.

6 Parallele zur Yee-Zelle (*staggered grid*)

Die einfachste Approximation der Felder erhält man mit stückweise linearen Basisfunktionen. Bei der Diskretisierung des elektrischen Feldes E entspricht in diesem Falle der i -te Linearkoeffizient gerade der konstanten Tangentialkomponente des Feldes entlang der i -ten Kante des verwendeten Finite-Elemente-Gitters, multipliziert mit der Kantenlänge. Entsprechend ist bei der Diskretisierung der magnetischen Induktion B der j -te Linearkoeffizient die konstante Normalkomponente von B auf der j -ten Fläche des Gitters, multipliziert mit dem Flächeninhalt. Stellt man diese Freiheitsgrade grafisch für ein rechtwinkliges Hexaederelement dar, so ergibt sich dieselbe Anordnung der Feldkomponenten wie bei der Yee-Zelle (*staggered grid*, Abb. 3; Yee 1966).

Die linearen Gleichungssysteme, die man aus der Methode der Finiten Elemente bzw. der Finiten Differenzen erhält, unterscheiden sich jedoch in der Verknüpfung der Feldkomponenten untereinander. So sind bei der Methode der Finiten Elemente z. B. die im Hexaeder sich diagonal gegenüberliegenden Feldkomponenten E_x , E_y bzw. E_z verknüpft. Bei der Methode der Finiten Differenzen werden die Differenzenquotienten hingegen meist nur entlang der Koordinatenachsen gebildet. Man kann jedoch durch eine geeignete Mittelung der Feldkomponenten die Finite-Elemente-Darstellung in die bekannten Finite-Differenzen-Formeln überführen (Monk 1993).

Gegenüber der Finite-Differenzen-Approximation der Maxwell-Gleichungen mit der Yee-Zelle bietet die Finite-Elemente-Approximation einige Vorteile: Die Methode ist nicht auf orthogonale Gitter beschränkt, sondern erlaubt bei der Verwendung unstrukturierter Hexaeder- oder Tetraedergitter die Vernetzung komplexer Geometrien. Die Behandlung inhomogener Medien ist über die Integrale (14), welche die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems bilden, wohl definiert. Sprünge in den Materialparametern sollten dabei mit Elementgrenzen zusammenfallen, weil innerhalb jedes Elements alle Feldkomponenten mit einer beliebig oft differenzierbaren, da polynomialen, und deshalb stetigen Funktion approximiert werden. Damit erübrigt sich die bei der Methode der Finiten Differenzen, insbesondere bei Finite-Differenzen-Sternen höherer Ordnung, erforderliche Mittelung von Materialeigenschaften.

Die Genauigkeit der numerischen Approximation kann sowohl durch verfeinerte Gitter als auch durch die Verwendung von Basisfunktionen höheren Polynomgrades, also stückweise quadratische, kubische usw. Basisfunktionen, erhöht werden. Approximationen höherer Ordnung führen insbesondere bei Wellenlösungen zu erheblich geringer numerischer Dispersion als beim Einsatz stückweise linearer Basisfunktionen. Dies wird im folgenden Abschnitt anhand eines numerischen Beispiels demonstriert.

7 Beispiel: Elektrischer Dipol

Wir betrachten einen idealen elektrischen Dipol im Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $r = 1$ m, der durch das elektrische Dipolmoment p beschrieben wird. Damit ist die Volumenquellstromdichte in Gleichungen (1) und (8) gegeben durch $J_v(\mathbf{r}) = i\omega p \delta(\mathbf{r})$, wobei $\delta(\mathbf{r})$ die diracsche Deltafunktion bezeichnet. Auf der Kugeloberfläche wird eine Ausstrahlungsbedingung angesetzt,

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{E} - i k \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = 0. \quad (16)$$

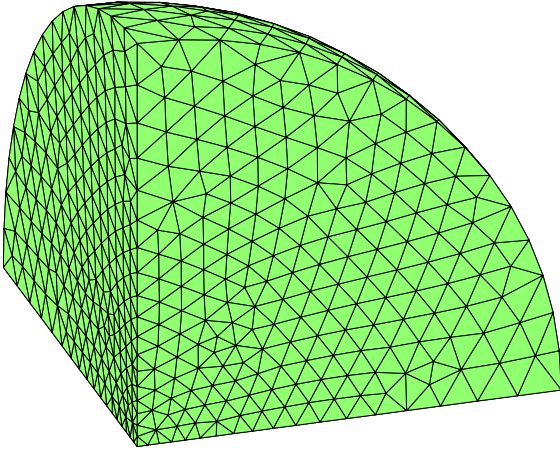


Abbildung 4: Oktant einer Kugel. Vernetzung mit 9732 Tetraedern.

Dabei ist $\mathbf{n}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor auf dem Rand und $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ die Wellenzahl. Ebene Wellen, die von innen senkrecht auf den Rand treffen, auf dem die Randbedingung (16) gefordert wird, passieren den Rand ohne Reflexion. Bei nicht-senkrechtem Einfall wird die Welle teilweise reflektiert.

Das Medium wird als isotrop und homogen angenommen mit den Materialparametern $\epsilon_r = 8$, $\mu_r = 1$ und $\sigma = 0.01 \text{ S/m}$. Aus Symmetriegründen genügt es, einen Oktanten der Kugel zu betrachten (Abb. 4), wenn die Dipolachse entlang einer der Schnittkanten gewählt wird. Auf den Schnittflächen werden entsprechend der Symmetrie der zu erwartenden Lösung homogene Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen gefordert.

Die numerische Simulation erfolgte mit einem Code, der auf der Finite-Elemente-Bibliothek FEMSTER (Castillo, Rieben und White 2003) aufbaut und diese im Wesentlichen um komplexe Arithmetik, Funktionen zur Verwaltung von Materialeigenschaften sowie den direkten Gleichungslöser aus UMFPACK (Davis 2004) erweitert. Für die Frequenz $f = 100 \text{ MHz}$ wurde auf Tetraedergittern unterschiedlicher Größe und unter Verwendung von linearen, quadratischen und kubischen Basisfunktionen die numerische Näherungslösung E^{num} berechnet und mit der exakten Lösung E^{ana} verglichen.

Für jedes Element K des Finite-Elemente-Gitters ist der relative Fehler Δ_K der numerischen Lösung durch

$$\Delta_K := \frac{\|E^{ana} - E^{num}\|_{L_2}}{\|E^{ana}\|_{L_2}} \quad \text{mit der } L_2\text{-Norm} \quad \|F\|_{L_2} := \left(\int_K \bar{F} \cdot F \, d^3r \right)^{1/2} \quad (17)$$

gegeben. Abbildung 5 zeigt Δ_K für die unterschiedlichen Gitter und Polynomgrade. Dafür wurde die Kugel in 100 Kugelschalen zerlegt. Aus den relativen Fehlern Δ_K aller Elemente, deren Mittelpunkt in der Kugelschale mit mittlerem Radius r liegt, wurden das Minimum, der Median und das Maximum bestimmt und über dem Radius aufgetragen. In der linken Spalte befinden sich die Ergebnisse mit linearen Basisfunktionen und unterschiedliche Gittergrößen, in der rechten Spalte die Resultate mit verschiedenen Polynomgraden und fester Gittergröße.

Aufgrund der Quellsingularität der gesuchten Lösung ist der Fehler in der Nähe des Koordinatenursprungs am größten und fällt zum Rand hin ab. Während bei der Gitterverfeinerung der Fehler um weniger als eine Größenordnung reduziert werden konnte, wurde die Lösung durch die Verwendung von kubischen Basisfunktionen um gut zwei Größenordnungen gegenüber den linearen Basisfunktionen verbessert. In der Nähe der Quelle zeigt der Fehler unabhängig vom Polynomgrad hohe Werte und kann hier nur durch ein erheblich feineres Gitter verringert werden. Die geometrische Approximation der Kugeloberfläche durch Tetraeder mit ebenen Randflächen schlägt sich in einem Fehler der Lösung im Randbereich nieder, der beim kubischen Ansatz in Form eines ansteigenden Fehlerniveaus bei $r > 0.9 \text{ m}$ sichtbar wird. In allen anderen Grafiken wird dieser Fehlereinfluss durch die insgesamt schlechtere Approximation überdeckt.

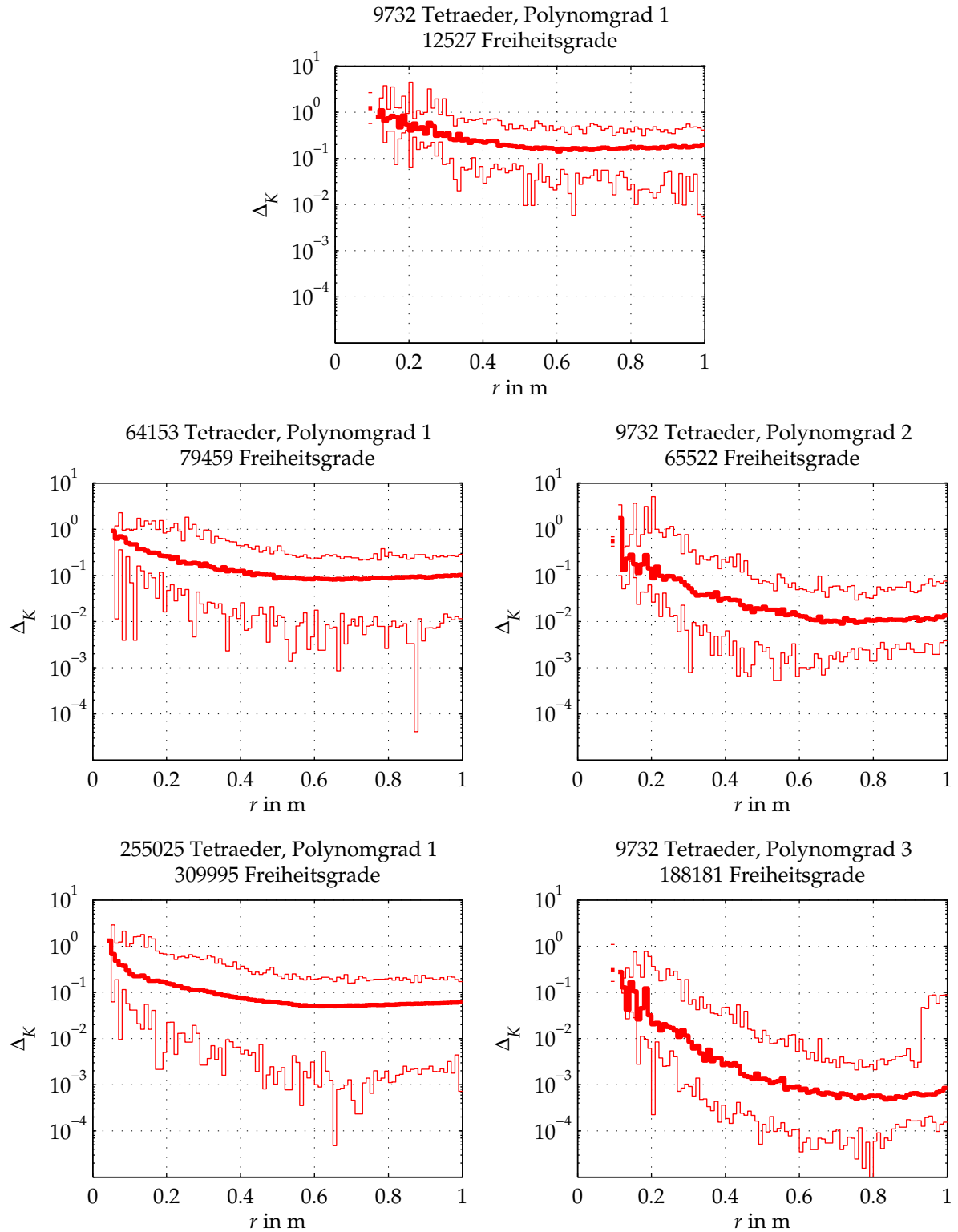


Abbildung 5: Maximum, Median und Minimum des relativen Fehlers Δ_K der Lösung $E(r)$ eines vertikalen elektrischen Dipols aufgetragen über dem Abstand des Elementmittelpunkts zum Dipol.

8 Zusammenfassung

Anhand des Vergleichs von analytischer und numerischer Lösung eines vertikalen Dipols wurde die Verbesserung der Lösung mit zunehmend feinerem Gitter (h -Verfeinerung) oder der Verwendung von Basisfunktionen höheren Polynomgrades (p -Verfeinerung) demonstriert. Dabei erweist sich in Gebieten, wo die Lösung hinreichend glatt ist, die p -Verfeinerung als erheblich effizienter. In der Nähe von Singularitäten der gesuchten Lösung und entlang gekrümmter Flächen kann eine Verbesserung der Approximation im Wesentlichen durch eine h -Verfeinerung, unter Umständen kombiniert mit einer p -Verfeinerung, erzielt werden. Es verbleibt, die Approximationseigenschaften für inhomogene Medien mit kontinuierlich oder diskontinuierlich variierenden Materialeigenschaften zu untersuchen.

Literatur

- Castillo, P., Rieben, R. N. und White, D. A. (2003). FEMSTER: An object oriented class library of discrete differential forms. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Antennas and Propagation Symposium* (Bd. 2, S. 972–976). Columbus, OH. (UCRL-JC-150238-ABS)
- Davis, T. A. (2004). Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 30(2), 196–199.
- Monk, P. (1993). An analysis of Nédélec’s method for the spatial discretization of Maxwell’s equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 47, 101–121.
- Monk, P. (2003). *Finite element methods for Maxwell’s equations*. Oxford University Press.
- Nédélec, J.-C. (1980). Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numerische Mathematik*, 35, 315–341.
- Whitney, H. (1957). *Geometric integration theory*. Princeton: Princeton University Press.
- Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14, 302–309.

3D-TEM-Simulation für axialsymmetrische Leitfähigkeitsstrukturen mit der Finite-Elemente-Methode

Ralph-Uwe Börner (TU Bergakademie Freiberg)

1 Einleitung

Die Berechnung elektromagnetischer Felder transienter Dipolquellen über dreidimensionalen Leitfähigkeitsstrukturen erfordert die numerische Lösung einer partiellen Differentialgleichung von parabolischem Typ. Als zuverlässige Lösungsmethode hat sich das Zeitschrittverfahren etabliert. Dabei wird das System der Maxwellgleichungen auf einem *staggered grid* diskretisiert. Die Stabilität des Verfahrens hängt von der Größe des gewählten Zeitschrittes ab. Die Zeitschrittweite ist proportional zu $\sqrt{\sigma_{\min} t}$, womit die Behandlung des Lufthalbraumes der Leitfähigkeit $\sigma_{\text{Luft}} = 10^{-14}$ S/m zu einem erheblichen numerischen Mehraufwand führen würde. Zur Vermeidung derartiger extrem kleiner Zeitschritte kann der Luft-Halbraum-Grenze eine integrale Randbedingung zugewiesen werden. Der numerische Aufwand wird nun jedoch durch eine 2D-FFT dominiert.

Diese Arbeit stellt einen alternativen Ansatz zur Lösung der Randwertaufgabe vor. Es werden Finite-Elemente-Lösungen im Frequenzbereich bereitgestellt, die den Transienten über eine Hankeltransformation synthetisieren. Die zur Synthese benötigten Frequenzbereichsantworten werden dabei für die zu einem speziellen Satz von Filterkoeffizienten gehörigen diskreten Frequenzen ermittelt.

Durch Verwendung eines unsymmetrischen Lanczos-Prozesses gelingt es, den numerischen Aufwand erheblich zu verringern.

2 Grundlagen

In quasistationärer Näherung lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}^e, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1d)$$

Die Gleichungen (1) werden durch die konstitutive Beziehung

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2)$$

ergänzt.

Mit der Definition des magnetischen Vektorpotentials $\mathbf{A}$ und des elektrischen Skalarpotentials V

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A} \quad (3b)$$

gelangt man zu einem System von Gleichungen für die beiden Unbekannten $\mathbf{A}$ und V :

$$\sigma \partial_t \mathbf{A} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \nabla V = \mathbf{J}^e \quad (4)$$

$$-\nabla \cdot (\sigma \partial_t \mathbf{A} + \sigma \nabla V - \mathbf{J}^e) = 0. \quad (5)$$

Mittels einer Eichtransformation der Art

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \Psi \quad (6)$$

$$\tilde{V} = V - \partial_t \Psi \quad \text{mit} \quad \Psi = \frac{V}{i\omega} \quad (7)$$

gelingt es, die Gleichungen zu reduzieren, so dass für einen harmonischen Ansatz mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ nur noch drei Unbekannte auftreten:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}) + i\omega \sigma \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^e. \quad (8)$$

3 Numerische Lösung

Die partielle Differentialgleichung (8) wird in einem Simulationsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gelöst. Ω ist berandet durch den künstlichen Rand Γ_∞ , welcher im Halbraum verläuft und der dazu dient, den zu simulierenden Bereich abzugrenzen. An diesen Rändern sind geeignete Randbedingungen an die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ und die Normalkomponente von $\mathbf{H}$ zu stellen. An den inneren Rändern gelten die Stetigkeitsbedingungen der Felder. Im betrachteten Zylinderkoordinatensystem (Abb. 1) kann das magnetische Vektorpotential aus Symmetriegründen nur eine nichtverschwindende Komponente A_φ besitzen.

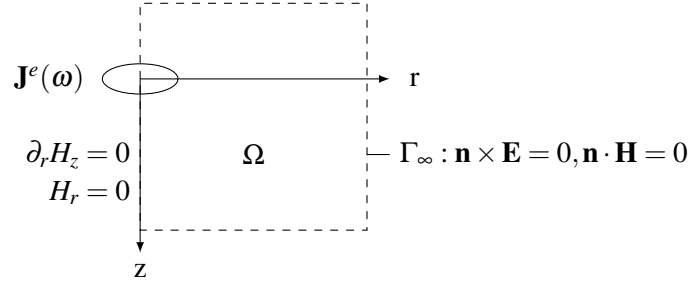


Abbildung 1: Zylinderkoordinatensystem mit magnetischem Dipol auf z -Achse.

Es ist vorteilhaft, die Axialsymmetrie auszunutzen. Das erfordert, gewisse Bedingungen an die Felder auf der z -Achse zu stellen:

$$B_r = -\partial_z A_\varphi = 0 \quad (9)$$

$$\partial_r B_z = \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r A_\varphi) \right) = \partial_r (r \partial_r u + 2u) = 0, \quad (10)$$

was automatisch erfüllt ist für $r = 0$ bzw. $\partial_r u = 0$. Die Variable u

$$u = \frac{A_\varphi}{r} \quad (11)$$

transformiert (8) in eine Form, bei der keine Singularitäten auf der Symmetrieachse auftreten können. Die genannten Randbedingungen sind somit äquivalent zu einer homogenen Neumannschen Randbedingung für die Variable u auf dem Rand $z = 0$.

Eine Diskretisierung der Gleichung (8) auf einem Finite-Elemente-Gitter führt auf ein System der Form

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (12)$$

$\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ bilden die Systemmatrix und sind unter den Bezeichnungen Steifigkeits- bzw. Massematrix bekannt. Die Lösung $\mathbf{u}$ wird für eine rechte Seite $\mathbf{f}$, welche Randbedingungen und Quellen repräsentiert, gelöst. $\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ sind schwachbesetzte und symmetrische $N \times N$ -Matrizen, wobei N die Anzahl der gesuchten Lösungen $\mathbf{u}$ in Ω bedeutet. Im vorliegenden axialsymmetrischen Fall wird eine Dreiecksvernetzung verwendet, wobei mittels einer adaptiven Gitterverfeinerungsstrategie basierend auf einem *a-posteriori*-Fehlerschätzer gesteuert wird, in welchen Bereichen des Gebietes Ω besonders fein diskretisiert werden muss, um eine möglichst exakte Lösung zu erhalten.

Das Gleichungssystem (12) kann mit einem direkten Verfahren wie z.B. UMFPACK gelöst werden.

4 Transformation der Felder in den Zeitbereich

Für ein kausales Signal $f(t)$, $t > 0$, gilt für die Spektraldarstellung der Felder nach dem Einschalten (Newman et al., 1986)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (13a)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (13b)$$

Die reellen Felder im Zeitbereich sollen über Sinus- oder Cosinustransformationen der komplexen frequenz-abhängigen Felder bestimmt werden. Ausmultiplizieren der Integranden führt unter Berücksichtigung der für reelle Signale gültigen Symmetrieeigenschaft

$$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega) \quad (14)$$

zu den Darstellungen

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Re \tilde{f}}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im \tilde{f}}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (15)$$

für die Stepresponse. Üblicherweise benutzt man in der messtechnischen Praxis Ausschaltvorgänge. Für $t \rightarrow \infty$ stellt sich ein stationärer Zustand ein. Die zu diesem Zeitpunkt beobachteten Felder sind reine Gleichstromfelder. Die Stepresponse für Ausschaltvorgänge muss daher aus der Vorschrift

$$f_{\text{off}}(t) = f(\infty) - f(t), \quad t > 0 \quad (16)$$

berechnet werden, woraus schließlich

$$f_{\text{off}}(t) = f(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Re \tilde{f}}{\omega} \sin \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im \tilde{f}}{\omega} \cos \omega t d\omega \quad (17)$$

folgt. Die Transformation in den Zeitbereich wird über eine Schnelle Hankeltransformation realisiert. Die Sinustransformierte des Imaginärteils der Vertikalkomponente von $\mathbf{H}$ ist definiert als

$$h_z(t, r, z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im H_z(\omega, r, z)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (18)$$

Darüberhinaus gilt die Identität $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, womit man zu

$$h_z(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^{\infty} \frac{\Im H_z(\omega)}{\sqrt{\omega}} J_{1/2}(\omega t) d\omega \quad (19)$$

gelangt. Gl. (19) kann mit einer Schnellen Hankeltransformation näherungsweise berechnet werden. Um den Zeitbereich von $10^{-6} \leq t \leq 10^{-3}$ s mit 5 Zeitschritten pro Dekade bei Verwendung von n_c Filterkoeffizienten abzudecken, sind $n_c + n_t - 1 = 85$ Lösungen von (12) für Frequenzen von $10^{-4} \dots 10^{13}$ Hz bereitzustellen (Abb. 2).

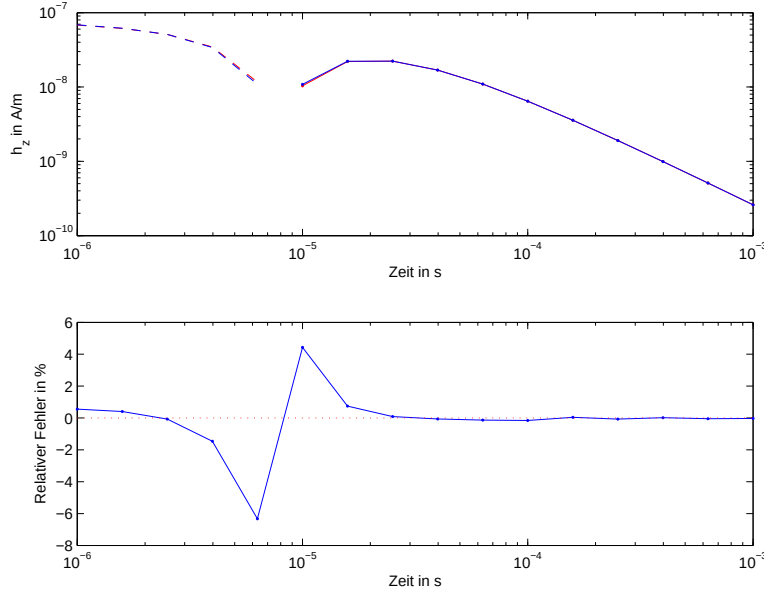


Abbildung 2: Vergleich von analytischer und numerischer Lösung (oben) und relativer Fehler (unten) für vertikalen magnetischen Dipol über homogenem Halbraum. Der Abstand zum Dipol beträgt 100 m.

5 Reduced Order Modelling

Die Bereitstellung von Lösungen des in Gl. (12) aufgestellten Gleichungssystems für viele Frequenzen ω macht die Transformation in den Zeitbereich unattraktiv. Mit $\kappa^2 = -i\omega$ ist

$$(\mathbf{K} - \kappa^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (20)$$

Gesucht ist eine effiziente Methode zur Bereitstellung von Lösungen für einen begrenzten Bereich des Gebietes Ω . Die j -te Komponente von $\mathbf{u}$ ist

$$u_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} = \mathbf{e}^T (\mathbf{K} - \kappa^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{f} \quad (21)$$

$\mathbf{e}_j$ ist hierbei der j -te Basisvektor im $\mathbb{R}^N$. Von Interesse sind Lösungen $\mathbf{u}$ für gewisse $\omega_i = 1, \dots, N_f$. Dafür ist die Inversion von (20) für jede dieser Frequenzen nötig. Diese Aufgabe ist numerisch extrem aufwendig. Mit der Einführung eines *shift*-Parameters $\sigma_i = \kappa_i^2 - \kappa_0^2$, $i = 1, \dots, N_f$ bzgl. einer Referenzfrequenz κ_0^2 kann Gl. (21) als Funktion des *shift*-Parameters ausgedrückt werden:

$$u_j(\sigma_i) = \mathbf{e}^T \underbrace{(\mathbf{K} - \kappa_0^2 \mathbf{M})}_{\mathbf{A}_0}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{e}^T (\mathbf{I} - \sigma_i \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{M})^{-1} (\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{f}) \quad (22)$$

Mit $\mathbf{L} := \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $\mathbf{R} := \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ und $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ wird

$$u_j(\sigma_i) = \mathbf{L}^T (\mathbf{I} - \sigma_i \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}. \quad (23)$$

Die Größe der Inversen ist hierbei immer noch $N \times N$. Eine Methode, die auf einem unsymmetrischen Lanczos-Prozess beruht (Wagner et al., 2003), überführt das System in die Form

$$u_j(\sigma_i) = \boldsymbol{\eta}_n^T [\boldsymbol{\Delta}_n^{-1} - \sigma_i \boldsymbol{\Delta}_n \mathbf{T}_n \boldsymbol{\Delta}_n^{-1}]^{-1} \boldsymbol{\rho}_n. \quad (24)$$

$\mathbf{T}$ ist eine Tridiagonalmatrix, welche $\mathbf{A}$ approximiert. Eine derartige Projektion ersetzt das N -dimensionale Problem (23) in $\mathbf{A}$ durch eine n -dimensionale Approximation in $\mathbf{T}_n$, wobei $n \ll N$. In den vorgestellten Untersuchungen ist N in der Größenordnung von $N \approx 2000$ und $20 < n < 50$.

Für Genauigkeits- und Effizienzuntersuchungen dient das Modell eines geschichteten Halbraums (Abb. 3), wofür analytische Lösungen zur Verfügung stehen. Für die Diskretisierung der Randwertaufgabe sowie die Assemblierung des linearen Gleichungssystems (20) wurde *COMSOL Multiphysics* benutzt.

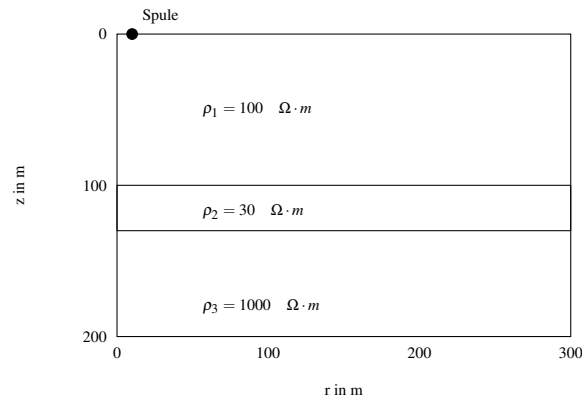


Abbildung 3: Für die Tests verwendetes Leitfähigkeitsmodell. Das simulierte Gebiet erstreckt sich von $-3550 < z < 5000$ m und $0 < r < 5000$ m.

Einen Ausschnitt der Finite-Elemente-Vernetzung zeigt Abb. 4. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich eine adaptive Gitterverfeinerungsstrategie insbesondere im Bereich der Spule auswirkt.

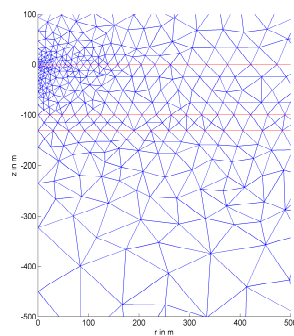


Abbildung 4: Ausschnitt des Finite-Elemente-Gitters nach adaptiver Gitterverfeinerung.

Abb. 5 zeigt einen Genauigkeitsvergleich für den vorgestellten Algorithmus. Die Übereinstimmung mit der analytischen Lösung ist über zwei Frequenzdekaden sehr gut. Für größere Bandbreiten σ ist der gesamte Prozess für eine neu zu wählende Referenzfrequenz κ_0 zu wiederholen. Da die zu erwartenden Rechenzeiten im wesentlichen durch den Lanczos-Prozess selbst, nämlich durch LU-Zerlegung von $\mathbf{A}$ und die Berechnung von $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ verursacht werden, ist die Anzahl der Frequenzshifts unerheblich (vgl. Abb. 6).

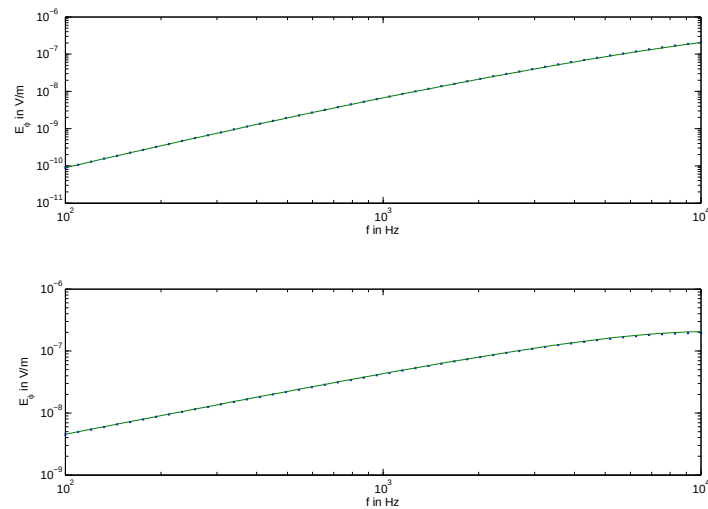


Abbildung 5: Elektrisches Feld eines vertikalen magnetischen Dipols über geschichtetem Halbraum (vgl. Abb. 3), beobachtet im Abstand von 100 m. Dargestellt sind analytische Lösung und Auswertung von Gl. (24) für 50 Frequenzen.

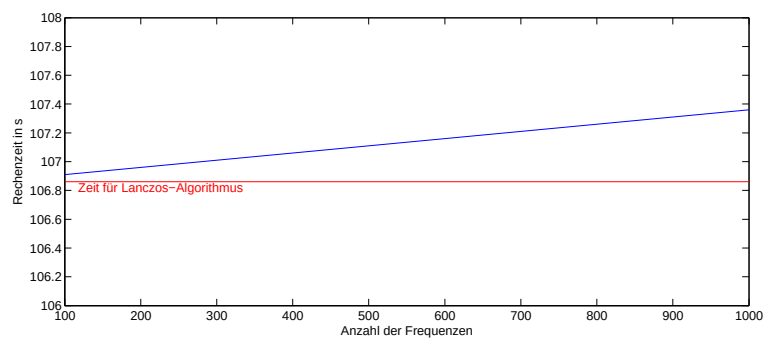


Abbildung 6: Gesamtrechnenzeit als Funktion der Anzahl der Frequenzen, für die Gl. (24) ausgewertet wird. Das Problem hat 2124 Freiheitsgrade, berechnet wurde ein Krylov-Unterraum mit der Dimension $n = 50$.

6 Zusammenfassung

Im Vergleich zu herkömmlichen Finite-Differenzen-Verfahren gewährleistet die Methode der Finite Elemente eine größere Flexibilität in der Parametrisierung von leitfähigen Strukturen und Topographie. Darüberhinaus kann durch Einsatz von adaptiven Gitterverfeinerungsstrategien die Anzahl der Lösungen im diskretisierten Modellgebiet reduziert werden. Mit der *Reduced Order Modelling* Methode kann eine erhebliche Rechenzeiteinsparung bei moderatem Genauigkeitseinbußen erreicht werden. Damit erschließt sich ein weites Feld von Anwendungen insbesondere im Hinblick auf Inversionsstrategien für TEM.

Literatur

- Newman, G. A., Hohmann, G. W. und Anderson, W. L. (1986). Transient electromagnetic response of a three-dimensional body in a layered earth. *Geophysics*, 51, 1608-1627.
- Wagner, M., Pinsky, P., Oberai, A. und Malhotra, M. (2003). A krylov subspace projection method for simultaneous solution of helmholtz problems at multiple frequencies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192, 4609-4640.

Effects of Dipping Layers on TEM 1D-Inversion

S. Hölz, T. Hiller & H. Burkhardt
Angew. Geowissenschaften, FR Geophysik
TU Berlin

Introduction

In the interpretation of central-loop or coincident-loop TEM-measurements, 1D inversion-codes are most commonly used for data evaluation. In the vicinity of 2D/3D structures, i.e. close to subvertical conductivity contrasts, 1D inversions of transients produce fictitious layers, which can lead to misinterpretations. Several authors have used 3D modeling-codes to investigate and describe the general effects, which can occur when using 1D inversions on 2D/3D data sets:

- Goldman et al. (1994) and Rabinovich (1995) use a finite difference (FD) algorithm, described in Tabarovsky et al. (1995), to calculate transient responses for the central-loop- and the long-offset-configuration (LOTEM). They investigate the transient response of a rotational symmetric body in a layered host for arbitrary receiver and transmitter locations. Because of the rotational symmetry, model bodies are confined in x- and y-direction and the resulting overall model can therefore be considered to be 3D (fig. 1, top). The authors use a 1D block-inversion-code to interpret the 3D transients.
- Toft (2001) uses the 3D code of Árnason (1999) to calculate the transient response of buried valley structures (fig. 1, middle) for a central-loop and a separate-loop configuration. The geometry of models in his work is 2D, i.e. resistivities do not change in y-direction. The calculated 2.5D transients are inverted using a 1D smooth-inversion-code. Some results of his thesis can be found in Danielsen et al. (2003).

In our study we first test the feasibility of the 3D code of Árnason (1999) to calculate transients for the coincident-loop configuration, which has been used in most of our measurements. Transients calculated with the 3D code are compared for a variety of grids with 1D-transients of homogeneous and layered halfspaces.

We then further simplify the models of Toft (2001), which now only include a dipping layer with infinite depth extent (fig. 1, bottom). We gradually change the angle of inclination for the dipping layer to study general effects of 1D inversion of 2.5D data sets and to see, if the true angle of inclination can be recovered.

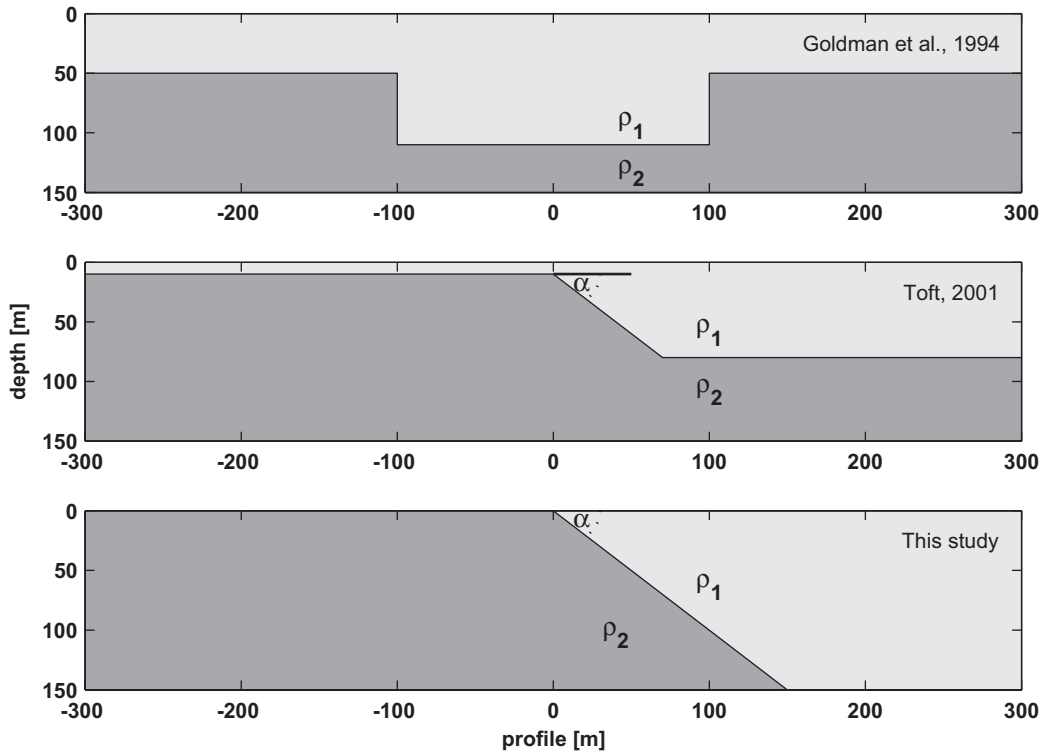


Fig. 1: Basic model types

Top: Submerged valley consisting of a rotational symmetric body in a layered host (Goldman et al., 1994).

Middle: Half of a submerged valley (Toft, 2001). The dip α is varied between 11.25° - 90° .

Bottom: Simplified model for this study. The dip α is varied between 10° - 90° .

Numerical Testing

General

In this model study the 3D modeling code TEMDDD (Árnason, 1999) is used to calculate transient responses over 2D models (fig. 1, bottom). The program uses the SLDM (Spectral Lanczos Decomposition Method (Druskin & Knizhnerman, 1988)) to solve the finite difference formulation of the transient electromagnetic problem in the time domain. A concise description of the program and suggestions for the choice of input parameters (i.e. discretization parameters and size of generalized derivative matrix) can be found in Weidelt (2000). In numerical testing the input parameters to TEMDDD are chosen and adjusted according to the following constraints:

- coincident-loop configuration, 100x100m²
- earliest time in transient: 30μs
- minimum voltage of transient: 10⁻²nV/Am²
- resistivity range of models: 1-1000Ωm
- maximum error with respect to transient of homogenous halfspace: <1%
- constant grid spacing in xy-direction for cells inside the loop
- outward increasing grid spacing in xy-direction (Δxy) outside the loop

$$(1) \quad \Delta xy_{i+1} = f_{xy} \cdot \Delta xy_i \quad f_{xy} > 1$$

- downward increasing grid spacing in z-direction (Δz)

$$(2) \quad \Delta z_{i+1} = f_z \cdot \Delta z_i \quad f_z > 1$$

The transient response for the coincident-loop configuration is calculated by numerical integration of the inloop-responses for all cells located inside the loop. The minimum time for testing is chosen corresponding to the earliest analyzable time for real measurement systems, which is determined by the minimum ramp time of ~30μs for a 100x100m² loop. In contrast to Toft (2001), who determines the input parameters to TEMDDD for a fixed time interval, we choose a variable maximum time limit ($t_{\max}$) determined by the resolution of the measurement system, which in our case is estimated as minimum normalized voltage of ~10⁻²nV/Am² for a 100x100m² loop.

The number of required time steps N_t (resp. dimension of the generalized derivative matrix for the SLDM), which controls the accuracy of the solution at late times, is coupled to the Courant-Friedrichs-Lewy criterion and has the general form:

$$(3) \quad N_t \cong \frac{f}{\Delta_{\min}} \cdot \sqrt{\frac{t_{\max}}{\mu_0 \sigma_{\min}}}$$

N_t greatly influences computational time and has to be chosen with respect to the required accuracy of solution. Estimates according to several publications are summarized in tab. 1.

Homogeneous Halfspace & Layered Halfspace

In a first step transients are calculated with TEMDDD for homogeneous halfspaces (1-1000Ωm) and compared to the transients calculated with a 1D code. The input parameters to TEMDDD are successively adjusted to find an appropriate discretization for each halfspace.

Resistivity of Halfspace	$t_{\max}$ [ms]	Oristaglio & Hohmann (1984)	Adhidjaja & Hohmann (1989)	Wang & Hohmann (1993)	Weidelt (2000)
		$f = 2$	$f = \sqrt{6}$	$f = \frac{\sqrt{6}}{\alpha}$ $\alpha = 0.1 - 0.2$	$f = \frac{1}{\alpha}$ $\alpha = 0.05 - 0.1$
1 Ωm	191	156	190	953-1905	778-1555
10 Ωm	48	247	302	1512-3025	1235-2470
100 Ωm	12	391	479	2394-4787	1954-3909
1000 Ωm	3	618	757	3785-7569	3090-6180

Tab. 1: Number of required time steps (N_t) according to (3) with factors f as specified by different authors. A minimum grid spacing of 5m is assumed. The maximum time $t_{\max}$ is determined by the resolution of the measurements system ($V_{\min} \sim 10^{-2}\text{nV}/\text{Am}^2$).

Halfspace	N_{xy}	f_{xy}	N_z	f_z	N_t	Dim [m]
1 Ωm	42	1.17	24	1.15	1000	3112x980
10 Ωm	48	1.17	27	1.15	1500	5137x1504
100 Ωm	52	1.17	29	1.15	1800	7184x2000
1000 Ωm	56	1.17	32	1.15	3000	9900x3055

Tab. 2: Final optimized parameters of input models to TEMDDD for homogeneous halfspaces. N_{xy} and N_z refer to the number of grid cells in xy- resp. z-direction.

After some testing, the factors controlling the downward and outward increasing grid dimensions are fixed to 1.15 (f_z , see (2)) and 1.17 (f_{xy} , see (1)). The $100 \times 100 \text{m}^2$ -loop is discretized with 14×14 cells to stabilize the integration for the calculation of the coincident-loop response. To keep model discretizations for input models of different half spaces comparable, larger grids are constructed by simply adding additional cells to the outer bounds of the model. The dimensions of the added cells are chosen according to (1) and (2).

When using grids as summarized in tab. 2 the error, as compared to the 1D code, is generally $< 1\%$ for all relevant times (tab. 1). Only for the lowest resistivities of $1 \Omega\text{m}$ and times $< 300 \mu\text{s}$ the relative error exceeds 1% and reaches values of up to 12%. This behavior for low resistivities and early times is due to the high frequency cut off caused by the finite discretization (Árnason, 2000) and can only be circumvented by introducing a refined grid.

For a test with three-layered halfspaces ($100 \Omega\text{m}/10 \Omega\text{m}/100 \Omega\text{m}$ and $10 \Omega\text{m}/100 \Omega\text{m}/10 \Omega\text{m}$) we use the discretization parameters found for the $100 \Omega\text{m}$ halfspace (tab. 2) and vary the interface depths. The comparison with the according transients calculated with the 1D code is still

generally <1%. Only for very early and very late times the relative error exceeds 1% and can reach values of up to 5% for a few time steps. Further comparisons of TEMDDD with other 3D TEM-codes has not been performed in this study, but can be found in Toft (2001).

Modeling of Dipping Layers

We use the discretization parameters for the 100Ωm halfspace (tab. 1) to construct dipping layer models as depicted in fig. 1, bottom. The resistivity contrast between the upper and lower layer is set to 100Ωm:10Ωm respectively 10Ωm:100Ωm and the angle of inclination is varied between 10°-90°. For cells intersected by the dipping layer (fig. 2), an average conductivity value is calculated weighted proportionally to the intersected areas to facilitate the construction of models and to minimize errors caused by the discretization:

$$(4) \quad \sigma_{\text{cell}} = \frac{\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2}{A_{\text{cell}}}$$

Transients are calculated for stations every 100m, i.e. the coincident loop configuration respectively the discretization grid is shifted along the profile. The resulting transients are then inverted using a 1D block inversion code. The number of layers used for inversion is varied according to the resulting rms-error. A maximum of three layers is sufficient to arrive at an rms-error <1.5% in the 1D inversion. Results are summarized in fig. 3.

With the resistor as top layer and small to moderate angles of inclination (fig. 3, left column, $\alpha \leq 30^\circ$) the combination of 1D inversion results closely resemble the true models. A fictitious second layer of intermediate resistivity is produced by the 1D inversion above the dipping layer of the true model (white line). For larger angles of inclination ($\alpha \geq 45^\circ$) additional

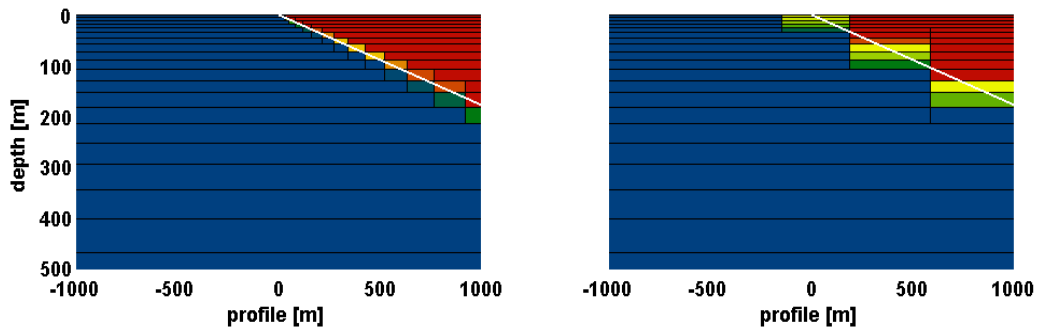


Fig. 2: Extract of example input models for TEMDDD with loops located at 0m (left) and -2000m (right). For cells intersected by the dipping layer (white line) an average conductivity is calculated (4). For the sake of clarity, cell boundaries are only displayed in x-direction for cells intersected by the dipping layer. For the color scale refer to fig. 3.

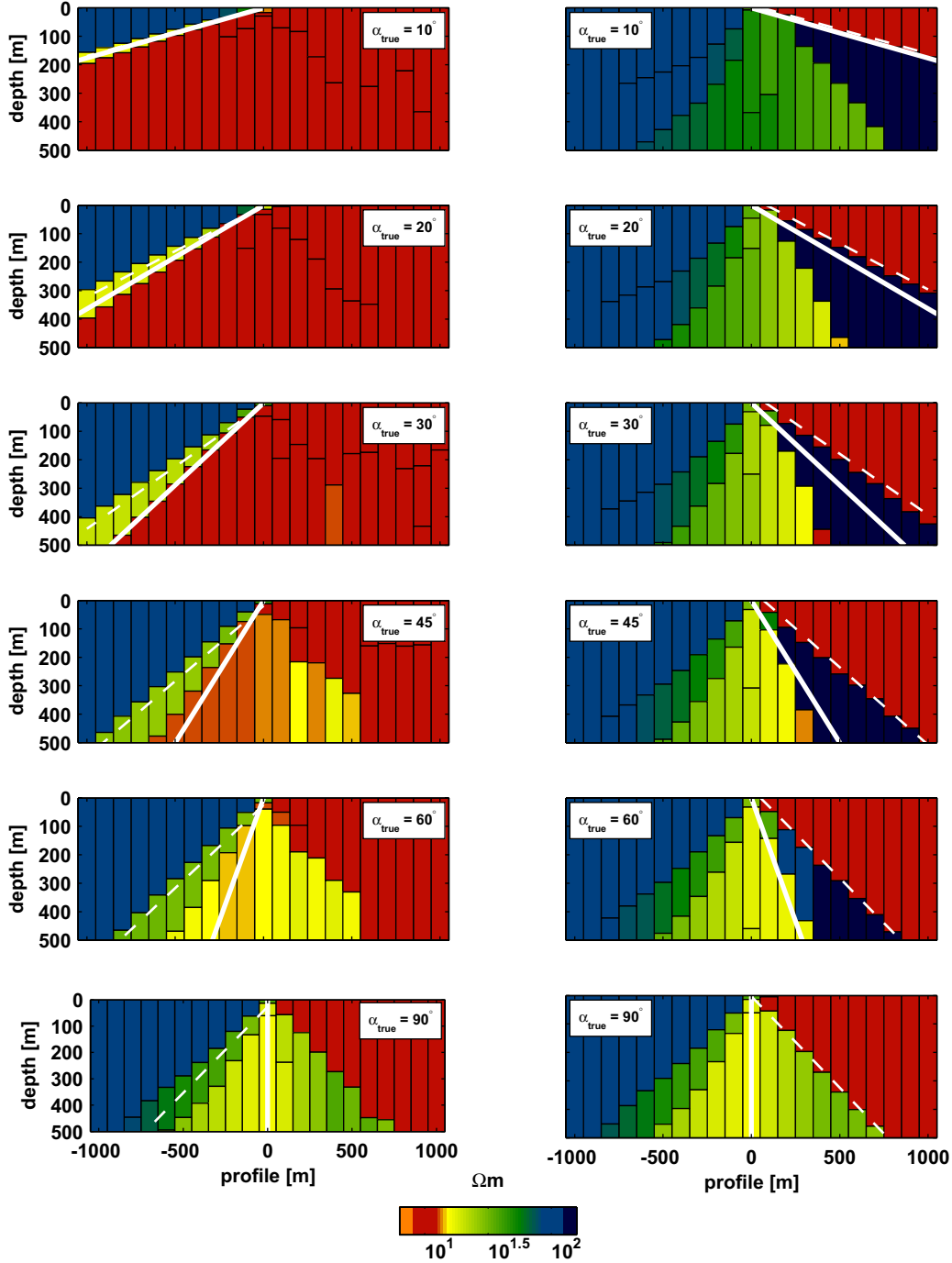


Fig. 3: Results for 1D block inversions of 2.5D transients calculated with TEMDDD (*left*: top layer is resistor (100Ωm); *right*: top layer is conductor (10Ωm)). All resistivities within 10% of the true resistivity are colored alike. At each station we chose the model with a minimum number of layers and acceptable rms (generally $\leq 1\%$). The true resp. apparent inclination of the dipping layers are represented by solid respectively dashed white lines. A model study with changed resistivity contrasts (s. text) leads to essentially the same geometry for the 1D inversion results.

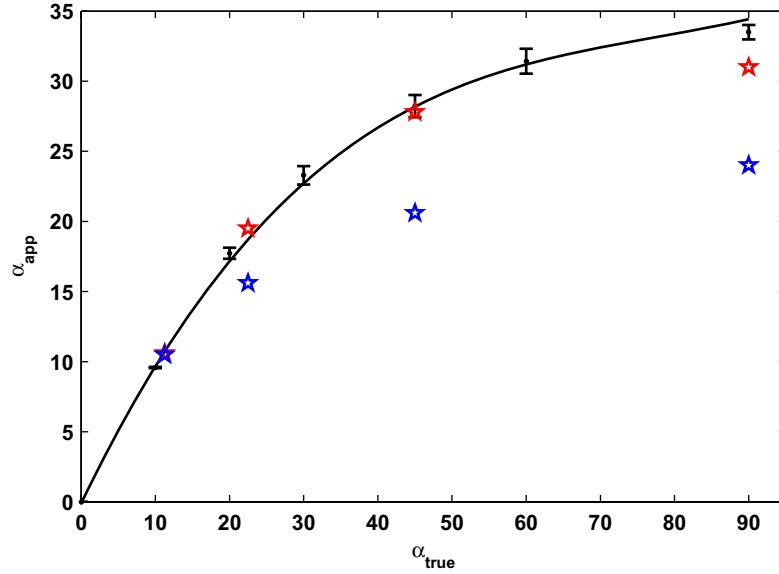


Fig. 4: Relationship between apparent and true angle of inclination (black) with a cubic polynomial fit (5). The apparent inclination refers to the white dashed line in fig. 3. Error bars represent the standard deviation of the apparent inclination for all models (resistivity contrasts: $10\Omega\text{m}:17.8\Omega\text{m}$, $10\Omega\text{m}:31.6\Omega\text{m}$, $10\Omega\text{m}:56.2\Omega\text{m}$, $10\Omega\text{m}:100\Omega\text{m}$ and vice versa). Colored pentagrams depict results as estimated from Toft (2001). For further details see discussion.

fictitious anomalies are also introduced in the homogeneous parts of the true models (i.e. for $x > 0\text{m}$). The anomalous regions have a pyramidal wedge shape.

With the conductor as top layer (fig. 3, right column) the anomalous pyramidal wedge is visible for all models, less pronounced for small angles of inclination. Below the dipping layer (i.e. for $x > 0\text{m}$) the resistivity of the second layer is overestimated. A sensitivity analysis for the 1D inversion results shows that this parameter is poorly resolved.

For all models the first layer interface above the dipping layer underestimates the true angle of inclination. When comparing models with the same angle of inclination but swapped resistivity contrast (e.g. $100\Omega\text{m}:10\Omega\text{m}$ and $10\Omega\text{m}:100\Omega\text{m}$, $\alpha = 20^\circ$) it can be seen that the depth of this first layer interface for both model types is essentially equal. Additional testing with resistivity contrasts of $10\Omega\text{m}:17.8\Omega\text{m}$, $10\Omega\text{m}:31.6\Omega\text{m}$, and $10\Omega\text{m}:56.2\Omega\text{m}$ (and vice versa) yield the same relation between the true angle of inclination and the depth of the first layer interface, which yields an "apparent inclination". In fig. 4 the relationship between true and apparent angle of inclination is shown for all resistivity contrasts. The small error bars demonstrate that the apparent inclinations for all resistivity contrasts referring to the same true inclination are similar.

Curve fitting can therefore be used to calculate the true inclination from the apparent inclination (and vice versa). Cubic polynomial fits yield (5). For steep angles of inclination ($\alpha_{\text{true}} > 60^\circ$) the apparent inclination does not change significantly any more and the errors of the estimates increase. Estimates using (5) should therefore be restricted to inclinations of $\alpha_{\text{true}} \leq 60^\circ$ respectively $\alpha_{\text{app}} \leq 30^\circ$.

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha_{\text{app}} &\approx 5.6(3) \cdot 10^{-5} \cdot \alpha_{\text{true}}^3 - 1.3(1) \cdot 10^{-2} \cdot \alpha_{\text{true}}^2 + 1.1 \cdot \alpha_{\text{true}} - 0.1 \\ \alpha_{\text{true}} &\approx 2.7(2) \cdot 10^{-3} \cdot \alpha_{\text{app}}^3 - 7.5(1) \cdot 10^{-2} \cdot \alpha_{\text{app}}^2 + 1.6 \cdot \alpha_{\text{app}} - 0.1 \end{aligned}$$

Discussion

Results for the 1D block inversions of 2.5D transients can be explained by the concept of "smoke rings" as introduced by Nabighian (1979). He shows that the diffusive current system induced by a loop into a homogeneous halfspace travels downward and outward away from the exciting loop with the maximum of the current system moving at an angle of approximately 30° with respect to the surface. This means that for a loop positioned above a dipping layer (fig. 3, $x < 0$ for left column, $x > 0$ for right column) the current system will, due to its outward propagation, always be influenced by the conductivity change, even for steep inclinations of the dipping layer. The same holds true for steep inclinations ($\alpha \geq 45^\circ$) above the homogeneous part of models (fig. 3, $x > 0$ for left column, $x < 0$ for right column). For small inclinations ($\alpha \leq 30^\circ$) and high resistivities in the homogeneous part of models (fig. 3, $x < 0$ for right column), the maximum of the current system is shifted into the conductive top layer, due to the sensitivity of the TEM-method to conductors, which causes the 1D inversion to produce fictitious layers. For small inclinations ($\alpha \leq 30^\circ$) and high conductivities in the homogeneous part of models (fig. 3, $x > 0$ for left column) the propagation of the current system is not significantly influenced by the resistive top layer and the 1D inversions thus reflect the homogeneous structure in this part of the model.

By visual comparison, the results in Toft (2001) – calculated for a slightly more complicated model type (fig. 1, middle), the central-loop configuration ($40 \times 40 \text{ m}^2$), and inverted using a 1D smooth-inversion code – compare well to our study for the case of a conductive basement (red pentagrams in fig. 4), but show significant deviations for the case of a resistive basement (blue pentagrams in fig. 4). It remains unclear, if this deviation is caused by the use of the 1D smooth inversion code, which might exhibit a different sensitivity to the lower edge of a conductive structure, or if it is simply caused by the subjective visual inspections of the color plots in Toft

(2001). The studies of Goldman et al. (1994), and Rabinovich (1995) yield smaller apparent inclination for a true inclination of 90° (with respect to (5)), but rely on a considerably different, true 3D model type (fig. 1, top).

Conclusion

In this model study we examine the effects produced by the 1D block inversion of 2.5D transients, where the basic model type is a dipping layer with varying angles of inclination. The interpretation of the 1D results generally leads to an underestimation of the true inclination and introduces fictitious layers, which is in accordance with the studies of Goldman et al (1994), Rabinovich (1995), and Toft (2001).

We show that for moderate inclinations ($\alpha \leq 60^\circ$) the true inclination can be estimated from the apparent inclination ($\rightarrow$ (5)). Further modelling suggests that within the tested resistivity range the relationship between true and apparent inclination does not depend on the resistivity contrast.

Below the dipping layer an additional fictitious homogeneous dipping layer is introduced by the 1D inversion. Especially for the case of a resistive basement additional dipping layer interfaces are also introduced in the homogeneous part of the model. These artifacts contain no additional significant information and need to be excluded from interpretation.

Acknowledgement

We wish to thank Knútur Árnason for allowing us to use his 3D code TEMDDD. This model study has been inspired by the thesis of Toft (2001).

References

- Árnason, K.: A Short Manual For The Program TEMDDD. 2000, 7p.
- Árnason, K.: Consistent discretization of electromagnetic fields and transient modeling. In Oristaglio, M. Spies, B. & Cooper, M. (ed.): Three-Dimensional Electromagnetics. SEG, 1999, pp. 103-118.
- Adhidjaja, J. & Hohmann, G.: A finite-difference algorithm for the transient electromagnetic response of a three-dimensional body. *Geophysical Journal International*, 1989, vol. 98, pp. 233-242.
- Danielsen, J., Auken, E., Jorgensen, F., Sondergaard, V. & Sorensen, K.: The application of the transient electromagnetic method in hydrogeophysical surveys. *Journal of Applied Geophysics*, 2003, vol. 53, pp. 181-198.
- Druskin, V. & Knizhnerman, L.: Spectral differential-difference method for numeric solution of three-dimensional nonstationary problems of electric prospecting. *Izvestiya, Earth Physics*, 1988, vol. 24, pp. 641-648.

Goldman, M., Tabarovsky, L. & Rabinovich, M.: On the influence of 3-D structures in the interpretation of transient electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 1994, vol. 59, pp. 889-901.

Nabighian, M.: Quasi-static transient response of a conducting half-space: An approximate representation. *Geophysics*, 1979, vol. 44, pp. 1700-1705.

Oristaglio, M. & Hohmann, G.: Diffusion of electromagnetic fields into a two-dimensional earth: A finite-difference approach. *Geophysics*, 1984, vol. 49, pp. 870-894.

Rabinovich, M.: Errors of 1-D interpretation of 3-D TDEM data in the application of mapping saltwater / freshwater contact. *Journal of Applied Geophysics*, 1995, vol. 34, pp. 23-34.

Tabarovsky, L., Goldman, M., Rabinovich, M. & Strack, K.: 2.5D-modeling in electromagnetic methods of geophysics. *Journal of Applied Geophysics*, 1995, vol. 35, pp. 261-284.

Toft, M.: Three-dimensional TEM modeling of nearsurface resistivity variations. MSc-thesis, University of Aarhus, Denmark, 2001.

Wang, T. & Hohmann, G.: A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling. *Geophysics*, 1993, vol. 58, pp. 797-809.

Weidelt, P.: Numerical modelling of transient-electromagnetic fields in three-dimensional conductors: A comparative study. *Elektromagnetische Tiefenforschung, Kolloquiumsband zur Tagung in Altenberg*, 2000, pp. 216-230.

3D Inversion transientelektromagnetischer Daten

Roland Martin¹, Carsten Scholl², Stefan L. Helwig¹, Olaf Koch¹ und Bülent Tezkan¹

Zusammenfassung

Um die Interpretation von transient elektromagnetischen (TEM) Daten von mehrdimensionalen Leitfähigkeitsverteilungen zu ermöglichen wird derzeit ein Inversionsprogramm am Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln entwickelt. Zeitersparnis wird vor allem dadurch erreicht, dass ein effektiver Gleichungslöser zur Vorwärtsrechnung benutzt wird. Ausserdem werden die Sensitivitäten explizit mit der Methode der adjungierten Green'schen Funktionen berechnet. Dies erlaubt eine schnelle Berechnung der Sensitivitäten für eine Vielzahl von Modellparametern direkt im Zeitbereich. Ein großer Vorteil den diese Berechnung der Jacobimatrix birgt, ist u.A. die Möglichkeit zu einer eingehenden Analyse der Sensitivitäten.

Einleitung

Im Gegensatz zu anderen Verfahren der elektromagnetischen Tiefenforschung (z.B. Magnetotellurik) ist bislang kein automatisches Verfahren zur iterativen Rekonstruktion mehrdimensionaler Leitfähigkeitsmodelle für die Interpretation transient elektromagnetischer (TEM) Daten vorhanden. Dies liegt größtenteils daran, dass die Vorwärtslösungen der diffusiven Felder sehr aufwendig zu berechnen sind. Die anregenden Ströme sind dreidimensional und die zeitabhängigen diffusiven Prozesse lassen sich explizit nur mit großem Rechenaufwand [Hohmann und Raiche, 1988] oder implizit nur mit komplexen linearen Gleichungssystemen [Druskin und Knizhnermann, 1988; Weidelt, 2000] lösen. Zeitabhängige Vorwärtslösungen, die auf der Grundlage der finiten Elemente (FE) basieren, fehlen bislang.

Erste mehrdimensionale TEM-Inversionen sind mit der Methode der konjugierten Gradienten von Wang et al. [1994]; Newman und Commer [2005] erfolgt. Das von Newman und Com-

mer [2005] vorgestellte Verfahren ist jedoch aufgrund des verwendeten Zeitschrittverfahrens zur Vorwärtsrechnung der EM-Felder sehr zeitaufwendig und bislang nur auf Großrechnern realisiert. Ausserdem wurde auf die explizite Berechnung der Sensitivitäten verzichtet. Daher ist die Lösung der Normalengleichung mit diesen Verfahren nur mit einer umständlichen rekursiven Berechnung der Sensitivitäten (vergl. [Haber, 2005]) möglich.

In Folgenden wird ein schneller Inversionscode zur dreidimensionalen Leitfähigkeitsrekonstruktion aus TEM-Daten vorgestellt. Zeitersparnis wird vor allem dadurch erreicht, dass ein effektiver Krylov-Löser zur Berechnung von 3D-TEM-Modellantworten benutzt wird. Das Programm wurde prinzipiell für den Einsatz auf kleineren Linux-Clustern entwickelt und die hier vorgestellten Ergebnisse zeigen das große Potential der Methode.

Grundlagen

In der üblichen Nomenklatur ist die Lösung des Optimierungsproblems ein stationärer Punkt

¹Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln

²Department of Physics, University of Toronto

der Kostenfunktion

$$\Phi(\mathbf{m}, \beta) = \phi_d(\mathbf{m}) + \beta \phi_m(\mathbf{m}) \quad (1)$$

mit

$$\phi_d(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{f})^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_d}}^2 (\mathbf{d} - \mathbf{f}) \quad (2)$$

und

$$\phi_m(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_m}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_m}} \mathbf{m} \quad (3)$$

ϕ_d ist ein Maß für die Übereinstimmung zwischen den tatsächlich gemessenen Daten $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$ mit der Fehlerwichtungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{W}_d}}$ und den berechneten Modellantworten $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ vom arbiträren Leitfähigkeitsmodell $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^M$. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Datenfehler unkorreliert und gaußverteilt sind. Demnach hat $\underline{\underline{\mathbf{W}_d}}$ Diagonalgestalt und ist mit den Standartabweichungen der Datenpunkte besetzt:

$$\underline{\underline{\mathbf{W}_d}} = \text{diag} \{ \sigma_n^{-1} \}, \quad n = 1, \dots, N \quad (4)$$

ϕ_m ist ein regulierendes Funktional, welches durch die Differentialoperatormatrix $\underline{\underline{\mathbf{W}_m}}$ "künstliche" Eigenschaften des Modells mißt (z.B. Glattheit). Diese werden dann in Form von Zwangs- oder Nebenbedingungen bei der Lösung des Optimierungsproblems berücksichtigt. β ist ein Lagrang'scher Multiplikator der das Verhältnis zwischen Regularisierung ϕ_m und Datenanpassung ϕ_d steuert.

Um eine Lösung des Optimierungsproblems von 1 zu erhalten werden i.d.R. nichtlineare iterative Inversionsverfahren im Modellraum angewendet (Newton-, quasi Newton-, Gauss-Newton- und deren spezielle Modifikationen) bei denen die Kostenfunktion für ein a-priori Modell $\mathbf{m}_{i=0}$ entwickelt wird. Dies beinhaltet, dass zu jedem Iterationsschritt i die $N \times M$ -dimensionale Jacobi- oder Sensitivitätsmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{S}_i}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m}_i)}{\partial \mathbf{m}}, \quad (5)$$

bzw. direkt der M -dimensionale Gradient der Kostenfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial \Phi(\mathbf{m}_i, \beta)}{\partial \mathbf{m}} \\ &= -\underline{\underline{\mathbf{S}_i}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_d}}^2 (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}_i)) \\ &\quad + \beta \underline{\underline{\mathbf{W}_m}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_m}} \mathbf{m} \end{aligned} \quad (6)$$

und die $M \times M$ -dimensionale Hessematrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{H}_i}} &= \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{m}_i, \beta)}{\partial \mathbf{m}^2} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{S}_i}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_d}}^2 \underline{\underline{\mathbf{S}_i}} - \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{m}_i)}{\partial \mathbf{m}^2} (\mathbf{d} - \mathbf{f}) \\ &\quad + \beta \underline{\underline{\mathbf{W}_m}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_m}} \end{aligned} \quad (7)$$

oder deren Approximation (z.B.: $\underline{\underline{\mathbf{H}}} \approx \underline{\underline{\mathbf{S}}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_d}}^2 \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \beta \underline{\underline{\mathbf{W}_m}}^\top \underline{\underline{\mathbf{W}_m}}$) berechnet werden müssen. Ausserdem muss zu jedem Iterationsschritt ein großes und dicht besetztes Gleichungssystem (Normalengleichung) der Form

$$\underline{\underline{\mathbf{H}_i}} \delta \mathbf{m}_i = -\mathbf{g}_i \quad (8)$$

zur Berechnung der Modellverbesserung $\delta \mathbf{m}_i$ gelöst werden, um ein neues Modell $\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m}_i + \delta \mathbf{m}_i$ zu finden für welches die Konvergenzkriterien

$$\Phi(\mathbf{m}_{i+1}) / \Phi(\mathbf{m}_i) < \beta' \quad \text{und} \quad \|\delta \mathbf{m}_i\| > \beta'' \quad (9)$$

gelten.

Bei der Anwendung verschiedener Newton Verfahren muss entweder Gl. 5 oder direkt Gl. 6 sowie Gl. 7 berechnet und gespeichert werden. Ausserdem muss Gl. 8 gelöst werden. Für großskalige Probleme, bei denen $M \approx 10^{5-6}$ und $N \approx 10^{4-5}$ werden kann, ist die Lösung von Gl. 8 sehr aufwendig und entsprechend rechenzeintensiv. Um dennoch eine Optimierung von 1 zu erhalten wird bei großskaligen Problemen oft auf einfachere Gradienten Verfahren zurückgegriffen [Wang et al., 1994; Newman und Commer, 2005].

Modellantwort

Das Programm zur Berechnung von $\mathbf{f}$ basiert

auf der spektralen Lanczos-Zerlegungsmethode (SLDM) von Druskin und Knizhnermann [1994]. Im folgenden wird kurz die Theorie zu diesem schnellen Gleichungslöser beschrieben, da diese nicht allgemein bekannt ist.

Es wird ein kartesisches Koordinatensystem

$$X = \{\mathbf{x}^i | i = 1, 2, 3\} \quad (10)$$

im euklidischen Vektorraum vorausgesetzt. Mit einer Vorwärtsrechnung wird die Änderung einer galvanisch oder induktiv gekoppelten Stromdichte $\mathbf{j}(X, t)$ in einem Körper der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(X)$ und magnetischen Permeabilität $\mu(X)$ simuliert. Die Änderung des Stroms als Funktion der Zeit verursacht elektromagnetische Wechselfelder im Medium, die den quasistationären Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{e}(t) + \mu \dot{\mathbf{h}}(t) = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(t) - \sigma \mathbf{e}(t) = \mathbf{j}(t) \quad (12)$$

unterliegen. Hier bezeichnet $\mathbf{e}$ und $\mathbf{h}$ die zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Feldstärken in X .

Nach Anwenden des Rotationsoperators auf Gl. 11 und einsetzen von Gl. 12 ergibt sich

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(t) + \sigma \dot{\mathbf{e}}(t) = -\dot{\mathbf{j}}(t) \quad (13)$$

Bei den hier betrachteten Transientelektromagnetischen Methoden wird die Stromdichte zum Zeitpunkt $t = 0$ s abgeschaltet. Die Stromdichtefunktion lässt sich folglich ausdrücken als

$$\mathbf{j}(t) = -\sigma \mathbf{e}_0 \eta(t) \quad (14)$$

wobei $\mathbf{e}_0$ das elektrische Primärfeld des Senders bezeichnet und $\eta(t)$ als Heavyside Funktion

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

bekannt ist. Durch einsetzen in Gl. 13 erhält man

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e} + \sigma \dot{\mathbf{e}}|_{t>0} = 0; \mathbf{e}|_{t \leq 0} = \mathbf{e}_0 \quad (16)$$

Um die zeitabhängigen und gekoppelten Maxwellgleichungen mit SLDM zu lösen müssen diese auf einem räumlich gestaffelten finite differenzen Gitter (fd-grid) [Yee, 1966] approximiert werden. Das fd-grid ist ein reguläres Gitter und wird durch das geordnete Tupel

$$X = \{x_0^i < x_1^i < \dots < x_{N^i}^i\} \quad (17)$$

mit den Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}|_{\partial X} = 0; \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}|_{\partial X} = 0 \quad (18)$$

definiert. Durch die Diskretisierung vereinfacht sich 16 zu

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} \hat{\mathbf{e}} + \hat{\sigma} \hat{\mathbf{e}}|_{t>0} = 0; \hat{\mathbf{e}}|_{t \leq 0} = \hat{\mathbf{e}}_0, \quad (19)$$

Mit der diskretisierten Form des elektrischen Feldes $\hat{\mathbf{e}}$ und der diskretisierten Form des Differentialoperators

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \hat{\nabla} \times \frac{1}{\hat{\mu}} \hat{\nabla}, \quad (20)$$

Ausserdem werden beim SLDM die Feldgrößen und alle nötigen Differentialoperatoren mit den ebenfalls diskretisierten Leitfähigkeiten und Permeabilitäten gewichtet (*“material averaging”*). Dies ermöglicht es, dass die Parameterisierung von $\mathbf{m}$ unabhängig vom fd-grid der Vorwärtsrechnung vorgenommen werden kann. Durch das *material-averaging* kann Gl. 19 zusätzlich in eine normalisierte Form gebracht werden

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}|_{t>0} = 0; \mathbf{u}|_{t \leq 0} = \mathbf{u}_0 \quad (21)$$

mit $\mathbf{u} = \sqrt{\hat{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \frac{1}{\hat{\sigma}}$. In Gl. 21 sind nun alle Größen unabhängig von der Leitfähigkeit und der Permeabilität formuliert. Nach Weidelt [2000] hat $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ die folgenden Eigenschaften:

- Symmetrisch

- Hochdimensional ($n \approx 3N^1N^2N^3$)
- nicht negative Eigenwerte
- Dünn besetzt (ausgenommen an den Randpunkten hat $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ nur 13 nichtverschwindende Einträge pro Zeile/Spalte)

Die Lösung von Gl. 21 kann nun durch Anwenden der eleganten Spektralzerlegung nach Lanczos [1950] und mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens auf die Lösung eines Tridiagonalproblems zurückgeführt werden. Hierbei wird die Lösung von Gl. 21 in dem m -Dimensionalen Lösungsraum, dem Krylov-Raum, berechnet. Der Krylov Raum ist durch die Menge der Basisvektoren

$$\begin{aligned} K^m &= \text{Span} \{ \mathbf{u}_0, \underline{\underline{\mathbf{A}}}^1 \mathbf{u}_0, \dots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{m-1} \mathbf{u}_0 \} \\ &= \text{Span} \{ \mathbf{q}_{i=1, \dots, m} \} \end{aligned} \quad (22)$$

definiert [Parlett, 1980] und Gl. 21 kann in K^m als Produkt von Matrix-Funktionalen der Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mit dem Vektor der Anfangsbedingungen beschrieben werden. Die Lanczos Spektralzerlegung erlaubt die Konstruktion einer approximierten Lösung von Gl. 21 durch die Wahl einer geeigneten Basis des Krylov Raumes, die mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{q}_i = \beta_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{q}_i + \beta_i \mathbf{q}_{i+1} \quad (23)$$

bestimmt werden. Mit der Tridiagonalen Koeffizientenmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \cdot & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \beta_{m-1} & \alpha_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

und dem Ansatz

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i v_i \quad (25)$$

wird Gl. 21 auf das wesentlich einfacher zu lösenden Tridiagonalproblem

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}|_{t>0} = 0; \quad \mathbf{v}|_{t \leq 0} = \mathbf{u}_0 \quad (26)$$

reduziert. Der Rechenaufwand zur Lösung von Gl. 25 entsteht im wesentlichen durch Matrix-Vektor-Multiplikationen und ist proportional zu m . Für EM Simulationen im Zeitbereich generieren konventionelle Zeitschrittverfahren, wie beispielsweise in Wang und Hohmann [1993] oder Newman und Commer [2005], Lösungen für eine feste Zeit t als ein Element von K^m mit viel größerem Rechenaufwand. Dieser ist aufgrund der inherenten Stabilitätsbedingung proportional zu $h^{-2}t$ wobei h der kleinste räumliche Abstand (minimale Diffusionstiefe) im fd-grid bezeichnet. Im Gegensatz dazu konvergiert das SLDM schon für $m = O \left[h^{-1} \sqrt{-\log(h)t} \right]$ [Druskin und Knizhnermann, 1989].

Sensitivitäten

Die Sensitivitätsmatrix wird mit zugeordneten (adjungierten) Greenschen Funktionen direkt im Zeitbereich berechnet. Betrachtet man eine Gitterzelle ijk , so kann nach Hördt [1998] die Sensitivität, die der n 'te Datenpunkt am Empfänger R aufgrund einer infinitesimalen Leitfähigkeitsänderung innerhalb des Volumenelements $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ erfährt, durch die Konvolutionsgleichung

$$\frac{\delta f^R(t_n)}{\delta \sigma_{ijk}} = \int_{\mathbf{v}_{ijk}} \int_0^{t_n} \mathbf{g}_{ijk}^R(t_n - t') \mathbf{e}_{ijk}^p(t') dt' \Delta V_{ijk} \quad (27)$$

berechnet werden. Gleichung 27 ist die räumlich diskretisierte Formulierung der eigentlich kontinuierlichen, von Hördt [1998] hergeleiteten Gleichung. Bei der numerischen Berechnung beziehen sich die zu errechnenden Felder auf einen Gitterpunkt der Vorwärtslösung, daher ist es zweckmäßig, eine lokale Sensitivität

$$S_{ijk}(t_n) = \int_0^{t_n} \mathbf{g}_{ijk}^R(t_n - t') \mathbf{e}_{ijk}^p(t') dt' \quad (28)$$

einzuführen. Am Gitterpunkt ijk ist $\mathbf{e}^p$ das von der Quelle angeregte elektrische Feld und

$\mathbf{g}^R$ die Impulsantwort des Empfängers. $\mathbf{g}$ verknüpft hier den Strom, der aufgrund der kleinen Leitfähigkeitsänderung bei ijk existiert, mit dem Empfänger. Die zugeordnete Impulsantwort lässt sich aufgrund des reziproken Feldverhaltens für alle Gitterpunkte berechnen, indem man die Impulsantwort am Gitterpunkt ijk berechnet, die von einer Einheits-Dipolquelle am Ort des Empfängers hervorgerufen wird. Je nach benutztem Empfänger ist die Quelle ein entsprechend orientierter elektrischer oder magnetischer Dipol. Die Impulsantwort lässt sich zusätzlich auf die Berechnung der Stufenantwort reduzieren [Hördt, 1998; Martin, 2003], was aufgrund des singulären Verhaltens der Impulsantwort in unmittelbarer Umgebung der Quellen numerische Vorteile hat [Martin, 2003].

Bei einer Inversion steht die schnelle Berechnung der Jacobimatrix im Vordergrund. Wenn keine a priori Informationen des Messgebiets vorhanden sind oder eine weitergehende Interpretation auf der Grundlage eines 1D-Modells durchgeführt wird, ist das Startmodell ein homogener oder geschichteter Untergrund. Für diese Kategorie von Startmodellen stellt die Berechnung von Sensitivitäten mit schnellen 1D-Lösungen eine sehr effiziente Methode dar, um die Berechnungszeit der Jacobimatrix erheblich zu reduzieren. Mit der diskreten Formulierung der von McGillivray et al. [1994] gezeigten Gleichung lassen sich frequenzabhängige Sensitivitäten

$$\frac{\delta f^R(\omega)}{\delta \sigma_{ijk}} = \int_{\mathbf{V}_{ijk}} \mathbf{e}_{ijk}^p(\omega) \mathbf{e}_{ijk}^R(\omega) \Delta V_{ijk} \quad (29)$$

lokal am Gitterpunkt ijk berechnen. Hier ist $\mathbf{e}^p$ das frequenzabhängige Feld der Quelle für einen homogenen Halbraum oder geschichteten Untergrund mit einer infinitesimalen Leitfähigkeitsänderung am Gitterpunkt ijk . Ein Gitter ist für eine 1D-Vorwärtslösung eher unüblich, da prinzipiell zu jedem Punkt im Raum eine sehr genaue Lösung im Frequenz-Wellenzahlbereich berechnet werden kann. Die räumliche Diskretisierung der 1D-Lösungen richtet sich im Inversionsprogramm zur Vereinfachung nach fd-grid der 3D-Vorwärtsrechnung. Das frequenzabhängige adjungierte Feld $\mathbf{e}^R$ wird berechnet in-

dem man eine dem Empfänger entsprechende Einheits-Dipolquelle am Ort des Empfängers installiert und entsprechend orientiert. $\mathbf{e}^R$ ist daher das elektrische Feld am Gitterpunkt ijk vom Empfänger als Sender. Die lokale Sensitivität des Empfängers ist das Skalarprodukt aus Hintergrund- und adjungiertem Feld. Die Frequenzabhängigkeit der Sensitivität ist impliziert. Zur Transformation der im Frequenzbereich berechneten Sensitivitäten in den Zeitbereich wird eine schnelle Hankeltransformation unter Berücksichtigung des Einschaltvorgangs der Quelle durchgeführt.

$$S(t_n) = \tau_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Im \left[\frac{\mathbf{e}^p(\omega_l) \mathbf{e}^R(\omega_l)}{i\omega_l} \right] \tilde{H}_{\frac{1}{2}}(n-l) \quad (30)$$

Mit $\tau_n = -(2/\pi)^{1/2} t_0^{-1} 10^{-n/10}$ und den Hankel-Koeffizienten $\tilde{H}_{\frac{1}{2}}$ [Anderson, 1989].

Mit den Gleichungen 27 und 29 ist es prinzipiell möglich kontinuierlich verteilte Sensitivitäten im gesamten Modellraum zu berechnen. Für die Sensitivitätsberechnung des geschichteten Untergrunds werden schnelle 1D-Vorwärtslösungen benutzt, die prinzipiell an jeder Stelle des Modellraums bestimmt werden können. Eine Beschränkung ist bei der Sensitivitätsberechnung mehrdimensionaler Leitfähigkeitsmodells nur durch das fd-grid der 3D-Vorwärtslösung gegeben, da es i.d.R. für einen speziellen Zeit-Tiefenbereich konstruiert ist.

Modellkovarianz

Um einen Einblick in die Auflösungseigenschaften der Inversion zu erlangen ist es zweckmässig die lineare Fehlerabschätzung der Modellparameter mit der Kovarianzmatrix [Menke, 1984]

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \left[\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T \underline{\underline{\mathbf{W}_d}}^2 \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right]^{-1} \quad (31)$$

durchzuführen. Da die Sensitivitäten zu jedem Iterationsschritt neu berechnet werden, jedoch die Speicherung und Inversion von $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T \underline{\underline{\mathbf{S}}}$ ein nicht-triviales Problem darstellt, verwenden wir in erster Näherung eine Vereinfachung für $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T \underline{\underline{\mathbf{S}}}$, indem die Summe der Hauptdiago-

nalelemente von $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T \underline{\underline{\mathbf{S}}}$ gebildet werden. Die normierten Überdeckung

$$c_m = \sum_{n=1}^N \frac{S_{nm}^2}{\sigma_n^2}; m = \dots, M \quad (32)$$

bzw. deren Inverses ist demnach wesentlich einfacher zu berechnen hat aber vollen Informationsgehalt für die Modellvarianz.

Lösung des Optimierungsproblems

Es sind derzeit zwei verschiedene Optimierungsstrategien realisiert. Für eine 2D-Inversion wird aufgrund des geringeren M 's die Normalengleichung 8 direkt gelöst [Scholl et al., 2004], während bei einer 3D Inversion ein einfaches gradienten Verfahren zur Minimierung der Kostenfunktion 1 implementiert ist. Die Entwicklung der Kostenfunktion um ein Startmodell wird beim Gradienten Verfahren nach der ersten Ordnung abgebrochen ($\underline{\underline{\mathbf{H}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$). Das Optimierungsproblem wird dann durch Hinzunahme des Schrittlängenparameters k gelöst. Dabei für verschiedene k und durch wiederholte Berechnung der Kostenfunktion $\Phi(\mathbf{m}_i + k\delta\mathbf{m}_i)$ deren Minimum über eine eindimensionale Suche bestimmt ("line search"). Dies ist auch als Methode des steilsten Abstiegs bekannt. Die Konvergenz der Methode des steilsten Abstiegs ist i.d.R. relativ schlecht und wird durch die Konjugierung der Gradienten eindeutig verbessert. Dabei wird der Gradient zu jeder Iteration senkrecht auf den der vorherigen Iteration projiziert (NLCG)

$$\delta\mathbf{m}_i = -(\mathbf{g}_i + \frac{\|\mathbf{g}_i\|}{\|\mathbf{g}_{i-1}\|} \mathbf{g}_{i-1}) \quad (33)$$

Dies nimmt dem Suchalgorithmus u.A. die Möglichkeit die gleiche Suchrichtung zweimal einzuschlagen und verbessert die Konvergenz deutlich.

Regularisierung

Es ist ratsam den Modellraum zu regularisieren, da das Optimierungsproblem nicht nur sehr stark vom Startmodell abhängt sondern von der Auflösung der einzelnen Parameter.

Eine geeignete Regularisierung kann beispielsweise durch die Nebenbedingung [Constable et al., 1987; Zhdanov, 2002]

$$\phi_m = \int_V |\nabla^2 \mathbf{m}|^2 dV = \min \quad (34)$$

erreicht werden. Da der Gradient der Kostenfunktion mit dieser zusätzlichen Bedingung gebildet wird, werden große Sprünge im Modell geglättet, d.h. der Lösungsraum wird künstlich verkleinert.

3D Inversion synthetischer Daten

Für erste Tests des 3D Inversionsalgorithmus zur automatischen Leitfähigkeitsrekonstruktion aus LOTEM Daten wurde in einem leitfähigen Halbraum ein gutleitender Körper mit einem Leitfähigkeitskontrast von 1/10 eingebettet. Für dieses Modell wurde ein synthetischer LOTEM-Datensatz von zwei Sender-Empfänger Konfigurationen mit dem 3D- Vorwärtslöser erzeugt und verrauscht. In Abb. 1 ist der gewählte Feldaufbau in einem Vertikalschnitt (xy-Ebene, oben) und einem Horizontalschnitt (yz-Ebene, unten) dargestellt. Eine Sender-Empfänger-Konfiguration besteht aus jeweils einem ein Kilometer langen geerdeten Bipol (T), dessen Stromsignal an jeweils 66 E_x -, H_y - und H_z -Empfängerpositionen (R) gemessen wurde. Die zum jeweiligen Sender gehörenden Empfänger wurden in der Abbildung in der gleichen Farbe (schwarz und grau) markiert. An jedem Empfänger wurde ein Transient zwischen 1 ms und 500 ms zu 10 Zeitpunkten pro Dekade simuliert (25 Datenpunkte pro Empfänger). Der gesamte Datensatz besteht demnach aus $N=9900$ Datenpunkten. In dem hier gezeigten Beispiel wurde der der Modellraum in $M=40572$ Blöcke unterteilt (Abb. 1).

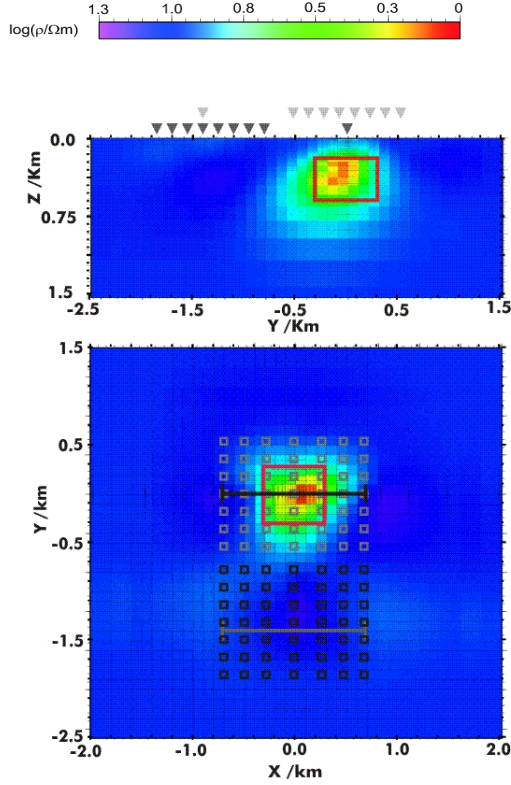


Abbildung 1: Ergebnis der 3D-Inversion mit NLCG nach 8 Iterationen (optimale Anpassung), ausgehend von einem homogenen 5Ωm-Halbraum als Startmodell. Die Sender sind als grau/schwarze Linien im unteren (Horizontalschnitt bei $z=300\text{m}$) und als Dreiecke im oberen Bild (Vertikalschnitt bei $x=0\text{m}$) markiert. Die Abmessungen des Originalmodells sind in der jew. Abbildung rot umrandet.

Für den Test an synthetischen Daten wurde der Datensatz mit NLCG invertiert. Dazu wurde ein homogener 5 Ωm Halbraum als Startmodell benutzt. In Abb. 2 ist die Entwicklung der Anpassung als fehlergewichteter RMS $\chi = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(d_n - f_n)^2}{\sigma^2}}$ dargestellt. Je kleiner der Anpassungsfehler, desto größer ist die Übereinstimmung zwischen den simulierten Daten (**d**) des Originalmodells und der Modellantwort (**f**).

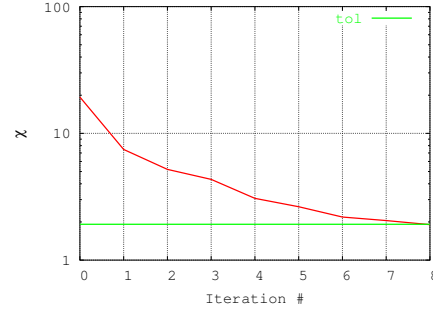


Abbildung 2: Entwicklung des Anpassungsfehlers der 3D-Inversion beim NLCG-Verfahren. *tol* ist die Anpassung, die mit dem Originalmodell erzielt wird.

Zur Berechnung der optimalen Anpassung (*tol*) wurde eine Vorwärtsrechnung mit dem Originalmodell angestellt und mit dem verrauschten Datensatz verglichen. Dass die optimale Anpassung nicht dem theoretischen Wert von 1 entspricht, ist darauf zurückzuführen, dass zur Simulation des Originalmodells ein anderes fd-grid benutzt wurde als das in der Inversion. Die große Dynamik der $\dot{H}_y$ -Signale verursachen dann u.U. große systematische Rundungsfehler in der Vorwärtsrechnung. Die Regularisierung entspricht der aus Gl 34.

2D Inversion realer Daten

Im Rahmen des DESERT-Projekts wurden LOTEM-Messungen an der Araba-Störung zwischen dem Roten und Toten Meer durchgeführt. Als Ziel der LOTEM-Messungen galt es, bereits bestehende Ergebnisse von MT-Messungen zu verifizieren und darauf aufbauend, neue Informationen über den Tiefenbereich zwischen 100 m und 3 km zu erhalten. Außerdem sollten auch Untergrundbereiche mit hohen Widerständen erkundet werden, da die MT hierfür nicht sehr sensitiv ist.

Der Feldaufbau der LOTEM-Messung bestand aus vier Sendern mit jeweils einem Kilometer Länge und 65 Empfängern (E_x , $\dot{H}_y$ und $\dot{H}_z$) die zu einem 2D Setup mit einer guten Überdeckung im Bereich der Störung zusammengefügt wurden. Die Streichrichtung der Störung liegt senkrecht zum LOTEM-Setup.

Das Ergebnis der 2D-Inversion ist in Abb. 3

dargestellt. Die Inversion wurde mit einer Modelldiskretisierung von 57×30 -Zellen durchgeführt und erreichte nach 8 Iterationen eine zufriedenstellende Anpassung. Das Ergebnis zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zu den Auswertungen der MT-Messungen von Ritter et al. [2003] und soll hier exemplarisch zeigen, dass eine 2D-Inversion mit Felddaten bereits erfolgreich durchgeführt wurde.

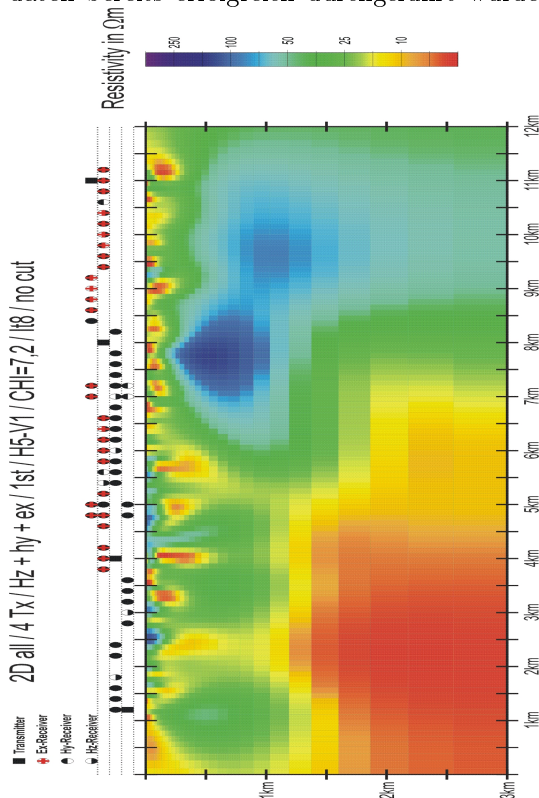


Abbildung 3: 2D-Inversionsergebnis der LOTEM-Messung im Rahmen des DESERT-Projekts. Die jew. Sender-Empfänger-Konfigurationen sind in der Kopfzeile der Abb. durch horizontale Linien voneinander getrennt und mit Symbolen kodiert. Das Regularisierungsverhältnis horizontal zu vertikal ist $h=5/v=1$ um vertikale Strukturen (insbes. die Verwerfung) deutlicher zu betonen. Als Regularisierung wurde eine Glättung erster Ordnung benutzt, um Sprünge im Modell stärker herauszuarbeiten. Der invertierte Datensatz bestand aus den gesamten Zeitreihen aller verfügbarer Empfänger ("no-cut") die alle mit einem Modell erklärt wurden. Ausgehend von einem homogenen $20 \Omega\text{m}$ -Halbraum als Startmodell wurde nach 8 Iterationen eine zufriedenstellende Anpassung von $\chi=7,2$ erreicht.

Diskussion

Da der Inversionscode primär für den Einsatz in mittelgroßen Linux-Clustern geschrieben wurde, ist der Anspruch an Speicher und Hauptprozessor im Bereich von normalen PC's anzusiedeln. Das Programm ist somit sehr gut für eine allgemeine Nutzung geeignet und nicht auf den Großrechnerbetrieb limitiert.

Die 2D/3d-Tests mit synthetischen und LOTEM-Felddaten zeigen, dass eine mehrdimensionale Inversion von TEM-Daten mit den hier vorgestellten Verfahren möglich ist. Für einen ersten Test zur 3D-Inversion diente eine stark vereinfachtes Modell, das mit dem Inversionscode zufriedenstellend rekonstruiert werden konnte. Die 2D-Inversion von realen Felddaten ist in sehr guter Übereinstimmung zu den Ergebnissen der MT-Messungen gelungen und lässt daher vermuten, dass dies mit 3D-Daten ebenfalls möglich ist.

Eine Gauss-Newton-Erweiterung bei der 3D Inversion zur Lösung der Normalengleichung mit effektiven CG-Verfahren ist prinzipiell möglich, wurde jedoch in der bisherigen Testphase noch nicht implementiert. Desweiteren wird derzeit an einer Erweiterung zur Interpretation von SHOTEM-Daten gearbeitet.

Literatur

- Anderson, W. L., 1989, A hybrid fast Hankel transform algorithm for electromagnetic modeling: *Geophysics*, **54**, no. 2, 263–266.
- Constable, S. C., Parker, R. L., und Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from em sounding data: *Geophysics*, **52**, 289–300.
- Druskin, V. L., und Knizhnermann, L. A., 1988, A spektral semi-discrete method for the numerical solution of 3d nonstationary problems in electrical prospecting: *Phys. Solid Earth*, **24**, 641–648.
- Druskin, V. L., und Knizhnermann, L. A., 1989, Two polynomial methods for computation of function of symmetric matrices: *J.*

- Comp. Math. Mathemat. Phys., **12**, in Russian.
- Druskin, V. L., und Knizhnermann, L. A., 1994, Spectral approach to solving three-dimensional maxwell's diffusion in the time and frequency domains: Radio Science, **29**, 937–953.
- Haber, E., 2005, Quasi-newton methods for large-scale electromagnetic inverse problems: Inverse Problems, **21**, 305–323.
- Hohmann, G. W., und Raiche, A. P., 1988, Electromagnetic methods in applied geophysics : Soc. Expl. Geophys., 469–503.
- Hördt, A., 1998, Calculation of electromagnetic sensitivities in the time domain: Geophys. J. Int., **133**, 713–720.
- Lanczos, C., 1950, An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators: J.Res.Nat.Bur.Standards, **45**, 225–280.
- Martin, R., 2003, Realisierung von laufzeitoptimierten Methoden zur Bestimmung der 3D-TEM-Jacobimatrix: Diplomarbeit, Universität zu Köln, Institut für Geophysik und Meteorologie.
- McGillivray, P., Oldenburg, D., Ellis, R., und Habashy, T., 1994, Calculation of sensitivities for the frequency-domain electromagnetic problem: Geophys. J. Int., **116**, 1–4.
- Menke, W., 1984, Geophysical data analysis: discrete inverse theory: Academic Press inc.
- Newman, G. A., und Commer, M., 2005, New advances in three dimensional transient electromagnetic inversion: Geophys. J. Int., **160**, 5–32.
- Parlett, B., 1980, The symmetric eigenvalue problem: Prentice Hall.
- Ritter, O., Ryberg, T., Weckmann, U., Hoffmann-Rothe, A., Abdueladas, A., und Garfunkel, Z., 2003, Geophysical images of the Dead Sea Transform in Jordan reveal an impermeable barrier for fluid flow: Geophys. Res. Lett., **30**, no. 14, 1–4.
- Scholl, C., Martin, R., Commer, M., Helwig, S. L., und Tezkan, B., 2004, 2D-Inversion von LOTEM-Daten, Dt. Geophys. Gesellschaft, Protokoll über das 20. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung.
- Scholl, C., 2001, Die periodizität von sendesignalen bei long offset transient electromagnetics: Diplomarbeit, Universität zu Köln, Institut für Geophysik und Meteorologie.
- Wang, T., Oristaglio, M., Tripp, A., und Hohmann, G. W., 1994, Inversion of diffusive transient electromagnetic data using conjugate-gradient method: Radio Science, **29**, 1143–1156.
- Wang, T., und Hohmann, G. W., 1993, A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling: Geophysics, **58**, 797–809.
- Weidelt, P., 2000, Numerical modelling of transient-electromagnetic fields in three-dimensional conductors: A comparative study *in* und J.B. Stoll, A. H., Hrsg., Elektromagnetische Tiefenforschung, 18. Kolloquium:: Dt. Geophys. Gesellschaft, 216–231.
- Yee, K. S., 1966, Numerical solutions of initial boundary problems involving maxwell's equations in isotropic media: IEEE Trans. Antennas Propag., **AP-14**, 302–309.
- Zhdanov, M., 2002, Geophysical inverse theory and regularization problems: Elsevier.

Appendix: Transformationen

Sind die aufzulösenden Parameter Widerstände, so muss berücksichtigt werden, dass mittels Gl. 27 oder Gl. 29 Sensitivitäten bzgl. der reziproken Widerstandsänderung bestimmt werden. Dabei ist

$$\partial\sigma = \partial(m^{-1}) = -m^{-2}\partial m$$

Bei der Inversion werden zudem die Transformationen $\mathbf{f} \rightarrow tr(\mathbf{f})$ und $\mathbf{m} \rightarrow ln(\mathbf{m})$ durchgeführt. Für Daten mit Vorzeichenwechsel stellte sich Area-Sinus-Hyperbolicus als geeignete Transformationsfunktion heraus [Scholl, 2001]. Die Transformationen führen i.d.R. zu einer stabileren Inversion. Die Transformation der Sensitivitätsmatrix ist dann gegeben durch:

$$\frac{\partial(tr(\mathbf{f}))}{\partial(ln(\mathbf{m}))} = -\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m}^2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma} \frac{\partial tr(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}$$

Simulation unterschiedlicher Metallobjekte zur Detektion von Landminen mit Metalldetektoren

T. Hanstein, J. Lange, S. L. Helwig

Einleitung

Metalldetektoren sind neben der Suchnadel die meist verwendeten Geräte zum Aufspüren von Landminen. Die im Einsatz befindlichen Metalldetektoren künden durch ein akustisches Signal ein leitfähiges Objekt an. Die Geräte registrieren schnell und treffsicher die kleinste Veränderung des elektromagnetischen Feldes an, das diese ausstrahlen. Nahezu alle Metallgegenstände, wie verrottete Dosenblechteile, Metallsplitter u.s.w, zeigen diese Wirkung. Daher ist die Fehlalarmrate sehr hoch. Berichten zufolge sind in einem zu untersuchenden Areal drei Landminen auf 800-1000 Fehlalarme durchaus üblich.

Das BMBF-Projekt „HuMin/MD-Minensuche mit Metalldetektoren: Entwicklungspotentiale bei Datenanalyse und Messtechnik“ hat sich zur Aufgabe gemacht, diese hohe Fehlalarmrate unter Verwendung bestehender Geräte zu reduzieren.

Hierzu soll das elektromagnetische Signal am Sensor des Detektors direkt abgegriffen und analysiert werden. In dem Projektverbund werden verschiedene Ansätze und Wege ausprobiert und getestet. Der hier verwendete Ansatz versucht die gemessenen Signale zu simulieren und mit Hilfe einer Inversion zu interpretieren und auszuwerten.

Die Modellierung der Mine und anderer kleiner Metallgegenstände soll daher möglichst schnell, effizient und sehr genau sein. Die Metallobjekte werden hier durch einfache Modellkörper simuliert, die sich mit analytischen Methoden berechnen lassen. Die Gegenstände beschränken sich zur Zeit auf Kugeln, Drahringe und magnetische oder perfekt leitende Rotationsellipsen (Prolate und Oblate).

Die Kugel

Neben dem geschichteten Untergrund gehört die Kugel zu den am meisten untersuchten Leitfähigkeitsmodellen in der Elektromagnetik. Zahlreiche Veröffentlichungen gibt es zu diesem Thema, nur einige für diese Untersuchung relevanten Arbeiten seien hier genannt Kaufman (1985), Wait (1951), Wait und Spies (1969) und Hohman (1988).

Die Prospektionstiefen für die Landminensuche sind nur die ersten 20-30 cm im Boden. In diesem oberflächennahen Bereich wird das ausgestrahlte Magnetfeld kaum verändert. Am Metallobjekt kann quasi das primäre Feld in Luft betrachtet werden. Generell gilt für diese Anwendung, dass für die Berechnung der Sekundärfelder des Metallobjektes der Untergrund als Nichtleiter betrachtet werden kann. Für die Berechnung der Totalfelder muss aber der leitende Untergrund berücksichtigt werden. Ausserdem sind die Metallobjekte im Vergleich zur Skintiefe und den anderen Längendimensionen sehr klein, so dass das Feld am Objekt als homogen betrachtet werden kann. Mit diesen Annahmen können die induzierten Ströme in der Kugel, sowie deren Magnetfelder, als Streufelder eines magnetischen Dipols approximiert werden. Das Dipolmoment ist nun eine Funktion der Frequenz, Kugelradius b , Leitfähigkeit σ und der relativen magnetischen Permeabilität μ_r der Kugel. Angeregt wird der Dipol durch das anliegende Magnetfeld H_0 , das auch die Richtung des Dipolmomentes $\vec{m}$ festlegt.

$$\vec{m} = 2\pi b^3 D(\omega) \vec{H}_0$$
$$D(\omega) = \frac{(2\mu_r + 1) - (2\mu_r + 1 + x^2)\tanh(x)}{(\mu_r - 1) - (\mu_r - 1 - x^2)\tanh(x)} \quad \text{mit} \quad x = kb = b\sqrt{i\omega\mu_0\mu_r\sigma}$$

Der Reflexionsfaktor D beschreibt den frequenzabhängigen Teil, dessen Verlauf als Funktion der Induktionszahl – Verhältnis Kugelradius b zur Skineindringtiefe - in der Abbildung 1 gezeigt wird. Die induzierten Ströme in der Kugel haben einen negativen Reflexionsfaktor, da sie nach der Lenzschen Regel dem äusseren Feld entgegen wirken.

Für hohe Frequenzen oder ideale Leiter ist der Reflexionsfaktor -1 , somit reell und zeigt keine Phasenverschiebung. Eine rein magnetische Kugel hat einen positiven Beitrag, der das anliegende Feld verstärkt. Der Grenzfall mit sehr hoher Permeabilität führt zu einem doppelten so großen Faktor 2.

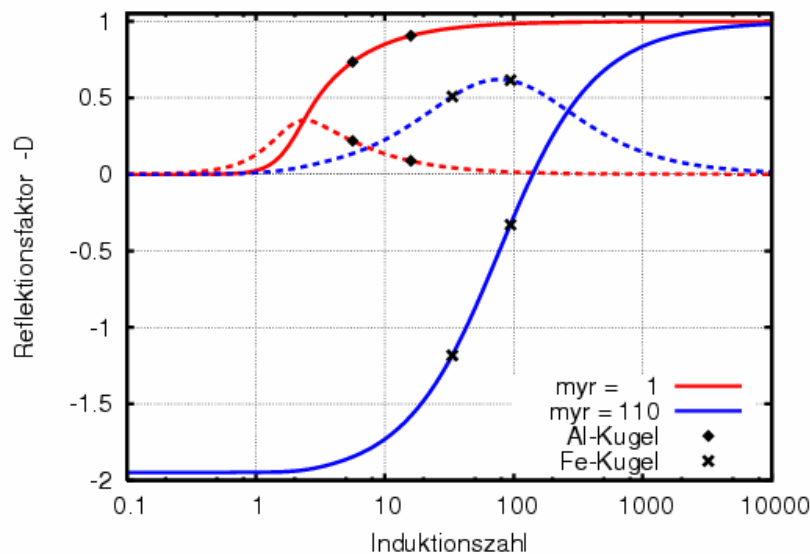


Abbildung 1: Der Reflexionsfaktor hier $-D$ als Funktion der Induktionszahl, Realteil (Linien) und Imaginärteil (gestrichelt), rote Kurve ist rein leitend, blaue Kurve mit magnetischer Permeabilität, Symbol Raute Aluminium-Kugel mit 17,02 MS/m und Kreuze zeigen Eisenkugeln 5,46 MS/m und einer relativen Permeabilität von 110 für die Frequenzen 2,4 und 19,2 kHz und einem Kugelradius von 1,4 cm

Der Drahtling

Der Drahtling ist ein noch einfacheres Modell als die Kugel. Die Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche A des Ringes induziert eine Spannung, die wiederum einen elektrischen Strom I erzeugt. Die Stromstärke ist abhängig von der komplexen Impedanz des Drahtes, d.h. innerer Widerstand R und Induktivität L des Ringes.

$$U_{ind} = -i\omega\mu_0 A H_0 = (R + i\omega L)I$$

Der Drahtling kann nun wieder als ein magnetischer Dipol dargestellt werden, angeregt durch das anliegende Feld H_0 und einem frequenzabhängigen Reflexionsfaktor $D(\omega)$

$$\vec{m} = \mu_0 A^2 \frac{1}{L} D(\omega) \vec{H}_0 \quad \text{mit} \quad D(\omega) = -\frac{i\omega}{R/L + i\omega}$$

Die Impulsantwort des Reflexionsfaktors im Zeitbereich kann hier direkt angegeben werden und zeigt ein einfaches exponentielles Abklingen

$$D(t) = -\delta(t) + \frac{R}{L} e^{-tR/L}$$

Die Deltafunktion wird nur bei einer direkten zeitlichen Variation des Senderfeldes aktiv.

Der Ring habe den Radius r , der Draht habe den Radius a und eine Leitfähigkeit σ , dann berechnet sich der Gleichstromwiderstand R , sowie die äussere und innere Induktivität des Ringes (Baum 1999)

$$R = \frac{2\pi r}{\pi a^2} \frac{1}{\sigma}, \quad L_a = \mu_0 r \left[\left(1 + \frac{a^2}{8r^2} \right) \ln \left(\frac{8r}{a} \right) + \frac{a^2}{24r^2} - 2 \right] \quad \text{und} \quad L_i = \mu_0 r \frac{\mu_r}{4}.$$

Bei höheren Frequenzen kann der Skineffekt im Draht eine Rolle spielen, die induzierten Ströme werden auf die Drahtoberfläche gedrängt. Der Widerstand und die Induktivität werden nun frequenzabhängig. Ist der Drahtdurchmesser wesentlich kleiner als der Rinddurchmesser kann der Skineffekt des Drahtes durch den Skineffekt eines geraden Leiters approximiert werden. Nach Smythe (1950) kann der Skineffekt über die Energie berechnet werden und der Widerstand R und die innere Induktivität L_i können durch Kelvin Funktionen der Ordnung 0 dargestellt werden (Abramowitz und Stegun 1970)

$$\text{ber}(q), \text{bei}(q), \text{ber}'(q), \text{bei}'(q) \quad \text{und} \quad q = a\sqrt{\omega\mu_0\mu_r\sigma}$$

$$R(\omega) = \frac{2\pi r}{\pi a^2} \frac{q}{2} \frac{\text{ber} \cdot \text{bei}' - \text{bei} \cdot \text{ber}'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2} \quad \text{und} \quad L_i(\omega) = \frac{r}{\omega a^2 \sigma} \frac{\text{ber} \cdot \text{ber}' + \text{bei} \cdot \text{bei}'}{\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2}.$$

Die Abbildung 2 zeigt den Reflexionsfaktor des Drahttringes mit (blau) und ohne (rot) Berücksichtigung des Skineffektes. Die Auswirkung des Skineffektes ist bei höheren Frequenzen im Imaginärteil gut sichtbar. Ohne Skineffekt nimmt der Imaginärteil mit ω^{-1} ab und mit Skineffekt deutlich langsamer $\omega^{-1/2}$ ab. Die Symbole zeigen die Werte für einen Drahttring mit dem Ringradius von 1,4 cm und einem Drahtradius von 0,28 cm für die Frequenzen 2,4 und 19,2 kHz. Der Einfluss des Skineffektes ist besonders deutlich im Zeitbereich. Während ohne Skineffekt die Impulsantwort nur durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, zeigt der Skineffekt zu frühen Zeiten ein $t^{-1/2}$ Verhalten, wie es auch bei einer Kugel beobachtet wird.

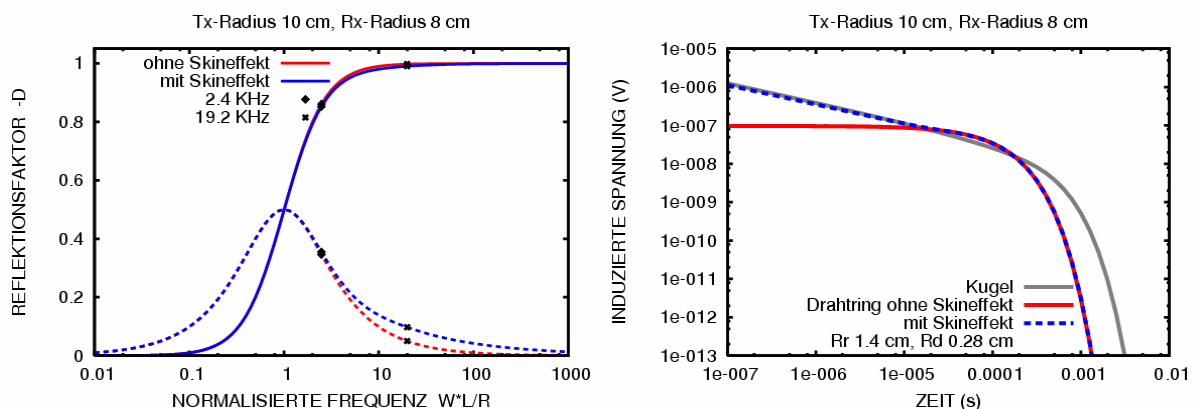


Abbildung 2: links der Reflexionsfaktor als Funktion der normierten Frequenz, Realteil (Linie), Imaginärteil (gestrichelt) mit (blau) und ohne (rot) Skineffekt. rechts: Impulsantwort des Drahttringes ohne Skineffekt (rot) ist eine Exponentialfunktion und mit Skineffekt (blau) zeigt zu frühen Zeiten ein $t^{-1/2}$ Abklingverhalten, wie die Kugel (grau).

Rotationsellipsoide

Eine komplexere Form, die reale Objekte beschreiben können, sind Rotationsellipsoide. Diese Klasse von Objekten lassen sich in Grenzfällen noch mit analytischen Methoden behandeln. Für den ersten Einstieg in diese Klasse von Modellen mit einem sphäroidalen Koordinatensystem werden hier die Fälle untersucht, bei denen sich die mathematische Beschreibung auf die Lösung der Laplace Gleichung reduziert. Das gilt für zwei Grenzfallbetrachtungen, den statischen magnetischen Fall und bei ideal leitenden Rotationsellipsoiden. Objekte mit idealer Leitfähigkeit sind zur Interpretation von realen Messdaten ungeeignet, weil hierbei keine Phasenverschiebung hervorgerufen wird. Die induzierten Ströme sind in der Lage ohne zeitliche Verzögerung direkt zu fließen. Die Phasenverschiebung aufgrund einer endlichen Leitfähigkeit und dem Skineffekt macht aber den größten Anteil des gemessenen Signals aus. Trotz dieser unrealistischen Annahme lassen sich mit diesen ideal leitenden Körpern einige wichtige Erkenntnisse gewinnen, die zum grundlegenden Verständnis beitragen, z.B. eine Richtungsabhängigkeit der Objekte.

Die Rotationsellipsoide lassen sich in zwei Gruppen aufteilen, die Kugel ist dabei ein Spezialfall. Das gestreckte Rotationsellipsoid - auch Prolate genannt - beschreibt mehr Zylinderförmige Objekt (Zigarrenform). Das abgeplattete Rotationsellipsoide - Oblate genannt - beschreibt Objekte, die eine Diskusform besitzen. Mit dieser Form sollen Münzen oder Scheiben simuliert werden.

Das sphäroidale Koordinatensystem setzt sich zusammen aus einer Schar von Hyperbeln und Ellipsen, die orthogonal zueinander sind. Die Lage der Brennpunkte c bestimmt die Form der Ellipsoide. Die Rotationshalbachse des Objektes wird mit a bezeichnet und die Achse quer dazu mit b .

Prolate: Brennpunkte $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ und Exzentrizität $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\eta_0}$

Oblate: Brennpunkte $c = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$ und Exzentrizität $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_0^2 + 1}}$

Neben den sphäroidalen Koordinate - η_0 für die Oberfläche der Prolate und ζ_0 für die Oblate - wird noch die Exzentrizität e angegeben, da mit diesem Parameter der Grenzfall $e=0$ für die Kugel besser bestimmt werden konnte.

Es werden zwei Fälle unterschieden, einmal die Anregung mit dem externen Magnetfeld parallel zur Rotationsachse und die Anregung senkrecht dazu.

Ausserhalb der Rotationsellipsoide kann das Sekundärfeld durch den Gradienten eines Dipolpotentials angegeben werden und wird wie bei der Kugel durch einen magnetischen Dipol beschrieben. Der Reflexionsfaktor wird über die Stetigkeitsbedingungen auf der Oberfläche des Rotationsellipsoides ermittelt. Für ein rein magnetisches Objekt sind das normale B-Feld und das tangentialen H-Felder stetig. Im Grenzfall einer idealen Magnetisierung braucht hier nur eine Dirichlet Randbedingung erfüllt zu werden, das Potential und die Tangentialfelder sind Null.

Bei ideal leitenden Objekten lautet die Randbedingung, dass die Normalkomponente des Magnetfeldes Null ist. Somit ist auf der Oberfläche eine Neuman Randbedingung – die Normalenableitung ist Null - zu erfüllen.

Im Folgenden werden die Dipolmomente m und die Reflexionskoeffizienten D für die unterschiedlichen Fälle angegeben. Der noch angegebene Parameter L ist für magnetische Objekte auch als Entmagnetisierungsfaktor bekannt.

Dipolmomente der magnetischen Prolate

Die Rotationshalbachse a ist größer als die Halbachse b quer dazu.

$$m_{\parallel} = 4\pi ab^2 D_{\parallel} H_0$$

$$m_{\perp} = 4\pi ab^2 D_{\perp} H_0$$

$$D_{\parallel} = \frac{1}{3} \frac{\mu_r - 1}{(\mu_r - 1)L_{\parallel} + 1}$$

$$D_{\perp} = \frac{1}{3} \frac{\mu_r - 1}{(\mu_r - 1)L_{\perp} + 1}$$

$$L_{\parallel} = (\eta_0^2 - 1) \left[\frac{\eta_0}{2} \ln \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} \right) - 1 \right]$$

$$L_{\perp} = \frac{1}{2} \left[\eta_0^2 - (\eta_0^2 - 1) \frac{\eta_0}{2} \ln \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} \right) \right]$$

$$L_{\parallel} = \frac{1 - e^2}{2e^3} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - \frac{1 - e^2}{e^2}$$

$$L_{\perp} = \frac{1}{2e^2} \left[1 - \frac{1 - e^2}{2e} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) \right]$$

$$L_{\parallel} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

$$L_{\perp} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

Dipolmomente der magnetischen Oblate

Die Rotationshalbachse a ist kleiner als die Halbachse b quer dazu.

$$m_{\parallel} = 4\pi ab^2 D_{\parallel} H_0$$

$$m_{\perp} = 4\pi ab^2 D_{\perp} H_0$$

$$D_{\parallel} = \frac{1}{3} \frac{\mu_r - 1}{(\mu_r - 1)L_{\parallel} + 1}$$

$$D_{\perp} = \frac{1}{3} \frac{\mu_r - 1}{(\mu_r - 1)L_{\perp} + 1}$$

$$L_{\parallel} = (\varsigma_0^2 + 1) [1 - \varsigma_0 \cot^{-1} \varsigma_0]$$

$$L_{\perp} = \frac{1}{2} (\varsigma_0^2 + 1) [\varsigma_0 \cot^{-1} \varsigma_0 - \varsigma_0^2]$$

$$L_{\parallel} = \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \sin^{-1} e$$

$$L_{\perp} = \frac{1}{2e^2} \left[\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \sin^{-1} e - (1 - e^2) \right]$$

$$L_{\parallel} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

$$L_{\perp} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

Dipolmomente der ideal leitenden Prolate

Die Rotationshalbachse a ist größer als die Halbachse b quer dazu.

$$m_{\parallel} = 2\pi ab^2 D_{\parallel} H_0$$

$$m_{\perp} = 2\pi ab^2 D_{\perp} H_0$$

$$D_{\parallel} = -\frac{2}{3} \frac{1}{L_{\parallel}}$$

$$D_{\perp} = -\frac{4}{3} \frac{1}{L_{\perp}}$$

$$L_{\parallel} = \eta_0^2 - (\eta_0^2 - 1) \frac{\eta_0}{2} \ln \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} \right)$$

$$L_{\perp} = (\eta_0^2 - 1) \frac{\eta_0}{2} \ln \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} \right) - \eta_0^2 + 2$$

$$L_{\parallel} = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

$$L_{\perp} = \frac{1 - e^2}{e^3} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - \frac{1 - 2e^2}{e^2}$$

$$L_{\parallel} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{2}{3}$$

$$L_{\perp} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{4}{3}$$

Dipolmomente der der ideal leitenden Oblate

Die Rotationshalbachse a ist kleiner als die Halbachse b quer dazu.

$$m_{\parallel} = 2\pi ab^2 D_{\parallel} H_0$$

$$m_{\perp} = 2\pi ab^2 D_{\perp} H_0$$

$$D_{\parallel} = -\frac{2}{3} \frac{1}{L_{\parallel}}$$

$$D_{\perp} = -\frac{4}{3} \frac{1}{L_{\perp}}$$

$$L_{\parallel} = (\zeta_0^2 + 1) \zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0 - \zeta_0^2$$

$$L_{\perp} = 1 + (\zeta_0^2 + 1) - \zeta_0 (\zeta_0^2 + 1) \cot^{-1} \zeta_0$$

$$L_{\parallel} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \sin^{-1} e - \frac{1}{e^2} + 1$$

$$L_{\perp} = 1 + \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \sin^{-1} e$$

$$L_{\parallel} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{2}{3}$$

$$L_{\perp} \xrightarrow{e \rightarrow 0} \frac{4}{3}$$

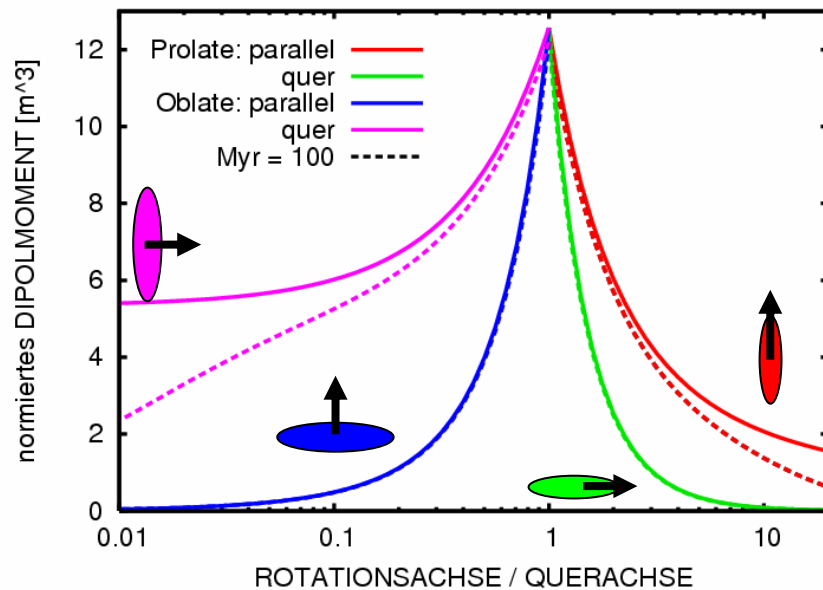


Abbildung 3: Polarisierbarkeit (Dipolmomente) der Rotationellipsoide als Funktion der Achsenverhältnisse, durchgezogene Linie sind ideal magnetisierte Objekte und gestrichelte Linien haben eine relative Permeabilität von 100. Die Pfeile zeigen die Rotationsachse an.

Normiert man die Dipolmomente durch das äussere Magnetfeld, kann dies als magnetische Polarisierbarkeit interpretiert werden, ganz analog zur Polarisierbarkeit bei einem Dielektrikum und dem elektrischen Feld. Diese normierten Dipolmomente sind in Abbildungen 3 und 4 für die verschiedenen Rotationsellipsoide mit unterschiedlicher Anregungsrichtung als Funktion der Achsenverhältnisse – Rotationachse zu Querachse – dargestellt. Magnetische und ideal leitende Rotationsellipsen reagieren nicht nur im Vorzeichen konträr. Bei einem vertikal ausgerichteten Magnetfeld liefert eine vertikale magnetische Prolate – Rotationsachse ist parallel zum H-Feld – einen wesentlich größeren Beitrag. Bei der ideal leitenden ist es genau umgekehrt, die horizontale Prolate hat eine etwa doppelt so starke Polarisierbarkeit als die vertikale. Denselben Effekt zeigt auch die Oblate,

hier erreichen im Extremfall einer dünnen Scheibe die Dipolmomente einen konstanten Grenzwert. Bei einer ideal leitenden Scheibe ist dies auch gut vorstellbar, da immer Kreisströme induziert werden können, die dem äusseren Feld entgegen wirken. Bei einer magnetischen Scheibe mit einer großen aber endlichen relativen Permeabilität von 100 erkennt man aber, dass nun mit einer immer dünner werdenden Scheibe die Polarisierbarkeit abnimmt. Ein ähnlicher Effekt ist auch für eine elektrisch leitende Scheibe mit endlicher Leitfähigkeit zu erwarten.

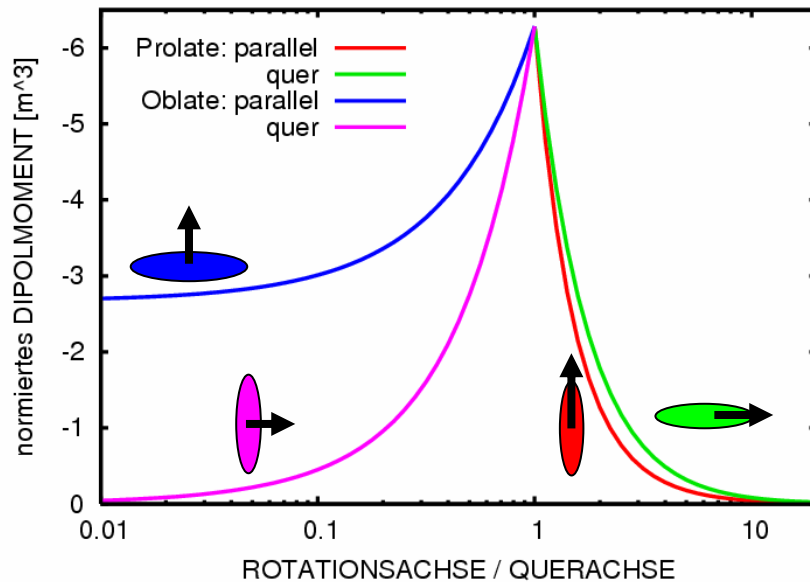


Abbildung 4: Polarisierbarkeit (Dipolmomente) ideal leitender Rotationsellipsoide als Funktion der Achsenverhältnisse. Die Pfeile zeigen die Rotationachsen an und das anliegende Magnetfeld wäre vertikal ausgerichtet.

Approximation der Prolate mit endlicher Leitfähigkeit durch Kugelmodelle

Neben der analytischen Beschreibung von Metallobjekten wurden auch numerische Modellierungen mit kommerziellen Programmpaket FEMLAB (jetzt Comsol Multiphysics) durchgeführt. Es zeigte sich, dass sich ein Zylinder durch eine Kugel approximieren lässt, deren Radius nur etwas größer als der Zylinderradius ist. Es konnte kein direkter Zusammenhang mit dem Volumen oder der Oberfläche hergestellt werden. Aber für ideal leitende Rotationsellipsen lässt sich eine äquivalente ideal leitende Kugel ermitteln. Je nachdem, ob das anliegende Magnetfeld quer oder parallel zur Rotationsachse ist, kann man einen Kugelradius bestimmen. Für diese Kugeln werden dann die Reflexionsfaktoren mit der realen Leitfähigkeit berechnet.

Die Abbildung 5 zeigt eine solche Vergleichsrechnung für eine Prolate mit variierenden Achsenverhältnisse (bis zu 1:10). Es wurde für zwei Frequenzen 2,4 und 19,2 kHz der Realteil (Inphase) und der Imaginärteil (Quadratur) berechnet. Die nun auftretende Phasenverschiebung ist nur aufgrund der endlichen Leitfähigkeit von 17,2 MS/m zu beobachten. Die Amplituden wurden durch die Frequenz normiert, damit alle Kurven in einer Grafik dargestellt werden kann. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der numerische Modellierung und der hier gemachten Approximation durch Kugeln zu beobachten.

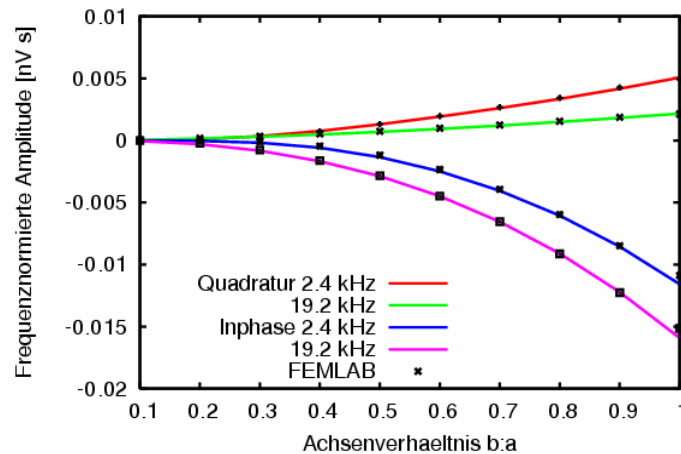


Abbildung 5: Vergleichsrechnung zwischen numerischer Modellierung einer Prolate (Symbole) und einer Approximation mit äquivalenten Kugel (Linien), die Leitfähigkeit der Objekte beträgt 17,2 MS/m.

Der Metalldetektor

Einer der im Projekt verwendeten Metalldetektoren ist das Minex 2FD 4500 von Förster, mit dem zahlreiche Labor- und Feldmessungen durchgeführt wurden. Dieses Gerät besteht aus einer Sendespule und zwei Empfängerspulen, deren Differenz gemessen wird (Abb. 6). Die Empfängerspulen sind innerhalb der Senderspule und sind so angeordnet, dass das Primärfeld und der Anteil eines homogen geschichteten Untergrundes kompensiert werden. Das Gerät arbeitet mit zwei Frequenzen 3,4 kHz und 19,2 kHz und wurde für das Projekt so modifiziert, dass anstelle des akustischen Signals der Real- und Imaginärteil aufgezeichnet wird. Bei Geräten, die im Frequenzbereich arbeiten, ist es wichtig die genaue Spulenform zu kennen. Daher wurden die Leiterbahnen der Spulen anhand eines Röntgenbildes ermittelt. Es zeigte sich, dass sich wichtigsten Anteile der Spulen durch zwei Ellipsen mit demselben Koordinatenursprung darstellen lassen. Zur Verfeinerungen wurden die Ecken noch durch Kreisbögen gerundet. Das ausgestrahlte Magnetfeld und die induzierte Spannung werden jeweils durch Wegintegrale ermittelt.

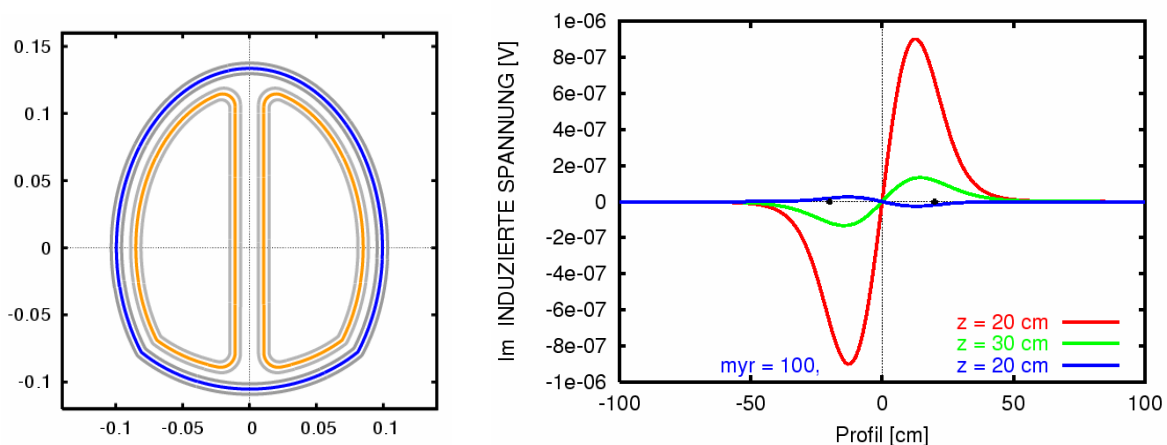


Abbildung 6: Links, Sendespule (blau) und Doppel-D Empfängerspulen des Minex 2FD 4500. Die grauen Linien deuten die mögliche Breite des Wicklungsbereiches an. Rechts: Profilverlauf für Kugeln mit einem Radius von 1,4 cm und einer Leitfähigkeit von 1MS/m in 20 und 30 cm Tiefe, die Symbole markieren die äusseren Ränder der Empfängerspulen.

Die Spulen im Gerät bestehen in Wirklichkeit aus vielen Leiterbahnen, bei der Modellierung wird aber nur eine Leiterbahn pro Spule simuliert. Ausserdem existieren noch unbekannte Verstärkungsfaktoren und die Spulen können aufgrund ihrer Induktivität eine leichte Phasenverschiebung machen. Für die Auswertung gemessener Daten wurde daher die simulierte Spulenform noch kalibriert anhand von Messungen an Kugeln mit bekannten Eigenschaften. Durch Inversion der Spulenparameter konnte eine Spulenform und die dazugehörigen Geräteeigenschaften ermittelt werden, die die Messdaten ausgezeichnet beschreiben.

Die Induktion in einem Drahtring besitzt eine starke Richtungsabhängigkeit des anliegenden Magnetfeldes des Metalldetektors. Somit ist die Orientierung des Ringes ausschlaggebend für den Profilverlauf. Die Abbildung 7 links zeigt den Vergleich zwischen Kugel und Drahtring. Für den horizontalen Drahtring fallen die Flanken etwas stärker ab. Aber wie bei der Kugel sind zwei Extrema mit unterschiedlichen Vorzeichen zu beobachten, je nachdem ob der Ring unter der linken oder rechten Empfängerspule liegt. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse zeigt der vertikale Drahtring mehrer Vorzeichenwechsel. Bei einer Schräglage zeigen die Profile einen unsymmetrischen Verlauf. Der Nulldurchgang liegt nicht mehr über dem Objekt, sondern ist deutlich verschoben und bei einer Neigung von 60 Grad am stärksten (Abbildung 7 rechts).

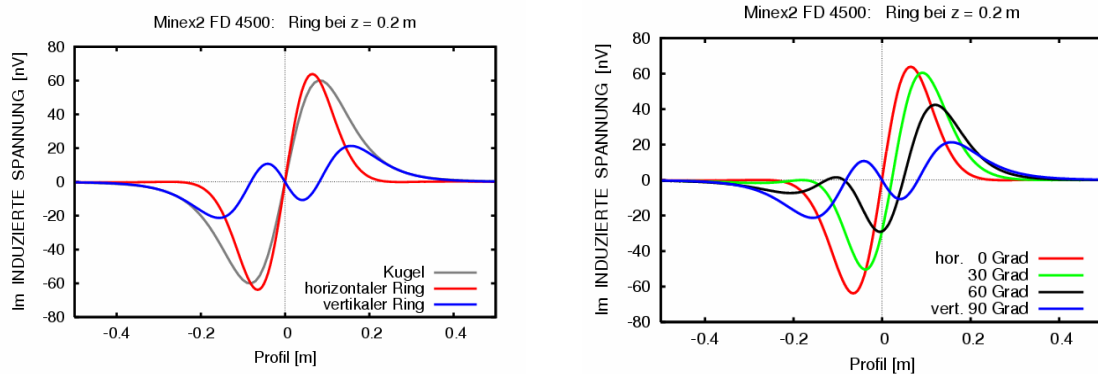


Abbildung 7: Links, Profilverlauf für Kugel, horizontalen und vertikalen Drahtring in 20 cm Tiefe. Rechts, Profilverlauf über einen Drahtring mit verschiedenen Neigungen.

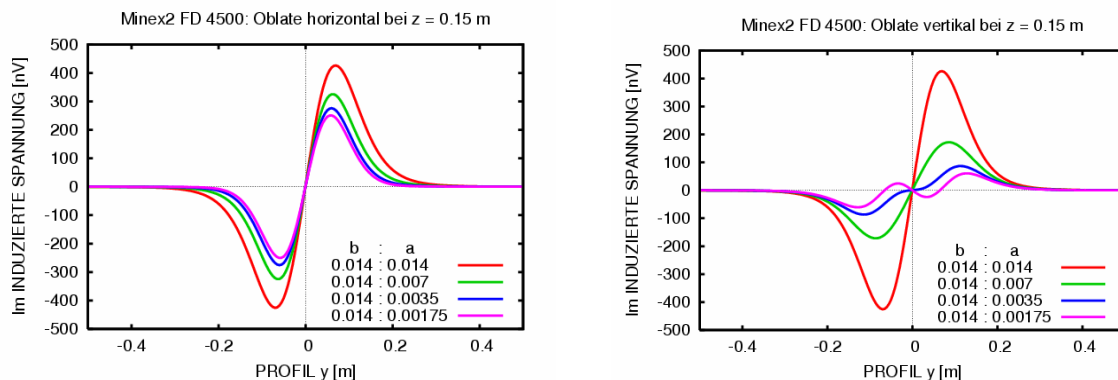


Abbildung 8: Profilverläufe für eine ideal leitende Oblate in einer Tiefe von 15 cm, links horizontal (Rotationsachse ist senkrecht) und rechts vertikal (Rotationsachse ist waagerecht). Die Achsenverhältnissen sind (1:1, 2:1, 4:1, 8:1), die Angaben in der Graphik sind in m.

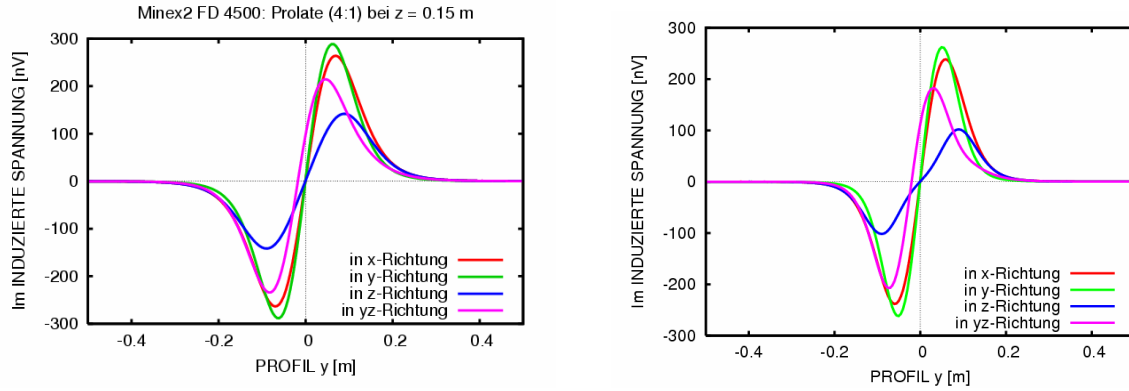


Abbildung 9: Profile über Prolaten mit einem Achsenverhältnis 4:1 mit verschiedenen Ausrichtungen der Rotationsachse. Links eine ideal leitende Prolate und rechts eine Prolate mit einer Leitfähigkeit von 1 MS/m, die durch unterschiedliche Kugeln je nach der Anregungsrichtung approximiert wurde.

Das Minex 2 FD 4500 zeichnet Realteil und Imaginärteil auf, in den hier gezeigten Profilen sind nur Imaginärteil gezeigt worden, da ideal leitende und rein magnetische Objekte nur einen reellen Reflexionsfaktor haben. Die induzierte Spannung in der Empfängerspule ist daher rein imaginär. Bei Objekten mit einer endlichen Leitfähigkeit ist auch ein Realteil zu beobachten, der im Prinzip die gleichen Kurvenverläufe zeigt.

Für dieses Gerät werden die Messdaten oft in der komplexen Zahlenebene als Argand Diagramme dargestellt. In solchen sogenannten Ortskurven wird für die unterschiedlichen Positionen des Objektes bzw. des Detektors der Realteil gegen den Imaginärteil aufgetragen. Für Objekte wie Kugeln und Drahringe zeigen diese Ortskurven immer einen linearen Zusammenhang. Die Phasenlage ist dann im Wesentlichen durch die Materialeigenschaften abhängig. Bei den Prolaten mit einer endlichen Leitfähigkeit sind nun die induzierten Ströme sehr verschieden von der Anregungsrichtung. Der lineare Zusammenhang zwischen induziertem Dipolmoment des Objektes und dem erzeugendem Magnetfeld kann durch einen Polarisierbarkeitstensor beschrieben werden. Auf Hauptachsen transformiert, d.h. die Rotationsachse ist parallel zu den kartesischen Koordinaten, ist der Tensor diagonal

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix} \vec{H}_0$$

Ist die Rotationsachse beliebig orientiert, so ist der Tensor gedreht und voll besetzt. Die Elemente des Tensors wurden hier mit den Reflexionsfaktoren D^K der Kugeln approximiert deren Radien aus den ideal leitenden Prolaten abgeleitet wurde. Die Radien unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen Anregungsrichtung.

$$P_{\parallel} = 2\pi r_{\parallel}^3 D_K \quad \text{mit} \quad r_{\parallel} = (-ab^2 D_{\parallel})^{1/3} \quad \text{und} \quad P_{\perp} = 2\pi r_{\perp}^3 D_K \quad \text{mit} \quad r_{\perp} = (-ab^2 D_{\perp})^{1/3}$$

Dieser tensorielle Zusammenhang führt zu einem wesentlich komplizierteren Verlauf der Ortskurven, der sehr von der Orientierung der Rotationsachse abhängt. Solche Verläufe werden in den Messungen auch beobachtet und können nicht durch einzelne Kugeln oder Drahringe erklärt werden.

Für leitende Objekte mit magnetischen Eigenschaften konnte im Frequenzbereich keine zufrieden stellende Approximation mit Kugeln gefunden werden. Äquivalente Kugeln für ideal leitende Oblaten führen zu dem prinzipiellen Problem, dass eine dünne Scheibe immer einen viel zu großen Beitrag hat. Die numerischen Modellierungen zeigen, dass mit einer endlichen Leitfähigkeit die Polarisation wesentlich stärker reduziert wird.

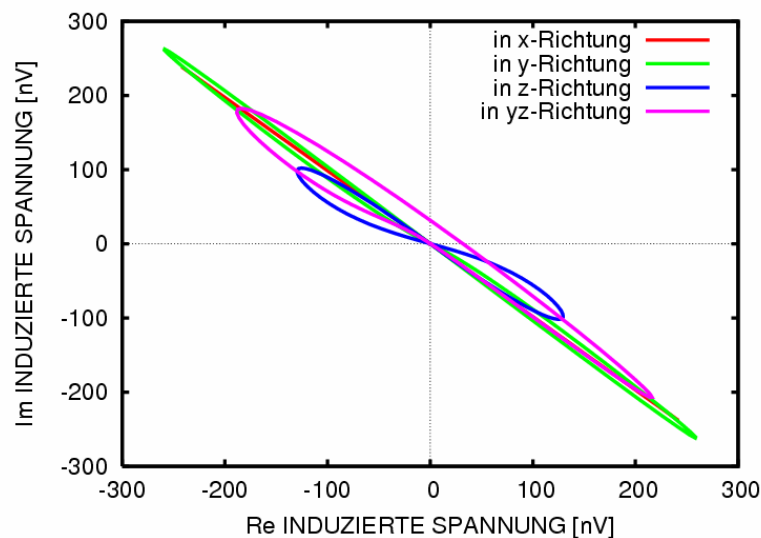


Abbildung 10: Ortsphasenkurven über einer Prolate mit dem Achsenverhältnis 4:1 und einer Leitfähigkeit von 1 MS/m für verschiedene Orientierungen der Rotationsachse.

Bei der Fertigstellung dieses Beitrages erschien in Geophysics eine Arbeit von Smith und Morrison (2006) über die Approximation des Induktionseffektes in Rotationsellipsoiden durch Kugeln. Hier werden ähnliche Techniken angewendet um die magnetische Polarisierbarkeit von Rotationsellipsoiden zu behandeln.

Die zahlreichen Feld- und Labormessungen von komplexeren Objekten zeigen solche Phasenverläufe in den hier simulierten Ortskurven.

Literatur:

- Abramowitz, M. und Stegun, I. A., 1964, Handbook of mathematical functions: National Bureau of Standards.
- Baum, C.E., 1999, Detection and identification of visually obscured targets: Taylor and Francis.
- Kaufman, A. A., Keller, G. V., 1985, Inductive Mining Prospecting, Part I Theory: Elsevier, Amsterdam.
- Parkinson, W. D., 1983, Introduction to Geomagnetism: Scottish Academic Press, Edinburgh and London.
- Smith, J. T. And Morrison, H. F., 2006, Approximating spheroid inductive responses using spheres: Geophysics, 71, G21-G25.
- Smythe, W. R., 1950, Static and Dynamic Electricity: McGraw-Hill, New York.
- Wait, J. R., 1951, A conducting sphere in a time varying magnetic field: Geophysics, 16, 666-672.
- Wait, J.R. and Spies, K. P., 1969, Quasi-static transient response of a conducting permeable sphere: Geophysics, 34, 789-792.
- Ward S. T. and Hohman, G. W., 1988, Electromagnetic theory for geophysical applications: in Nabighian, M. N. : Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 1, Theory, Society of Exploration Geophysics.

Numerische Simulation von Metalldetektordaten in 2D und 3D

J. Lange, T. Hanstein und S. L. Helwig

Institut für Geophysik und Meteorologie, Universität zu Köln

Zusammenfassung

Die numerische Simulation des Metalldetektor-Signals hilft die auftretenden elektromagnetischen Vorgänge besser zu verstehen und erlaubt die Modellierung komplexer Geometrien, als dies mit analytischen Methoden möglich ist. Der Vergleich beider Methoden für eine Kugel zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Spannungen in 2D und 3D. Die gezeigten Beispiele veranschaulichen die Unterschiede für Kugel und Zylinder, diskutieren den Effekt der Gegeninduktion und eines Isolators und geben einen Ausblick auf weitere Möglichkeiten der Modellierung hinsichtlich dreidimensionaler Simulationen von Minenattrappen.

Einleitung

Als Hinterlassenschaften bewaffneter Konflikte gefährden Landminen in vielen Ländern die Bevölkerung. Die rasche und vollständige Beseitigung der weltweit etwa 100 Millionen vergrabenen Landminen ist eine große technische Herausforderung. Eines der dabei am häufigsten eingesetzten Geräte ist gegenwärtig der Metalldetektor. Die verwendeten Geräte funktionieren nach dem Prinzip der elektromagnetischen Induktion, ähnlich den TDEM- und FDEM-Systemen in der Geophysik. Der geringe Metallanteil des Zündmechanismus¹ ist ausreichend, einen Alarm auszulösen und ermöglicht so das Auffinden der wenige Zentimeter unter der Erdoberfläche verborgenen Landminen. Das vom Metalldetektor ausgegebene akustische Signal liefert jedoch keine Information über Tiefe, Form oder

Materialeigenschaften des gefundenen Objektes. Eine Unterscheidung der Landminen von anderen im Boden vorliegenden metallischen Teilen, wie Patronenhülsen oder Schrott ist daher nicht möglich und eine hohe Fehlalarmrate ist so die Folge. Das BMBF-Projekt „HuMin/MD - Minensuche mit Metalldetektoren: Entwicklungspotentiale bei Datenanalyse und Messtechnik“ hat zum Ziel diese Fehlalarmrate zu mindern, indem mit verschiedenen Ansätzen möglichst viele Informationen über den Störkörper aus dem Detektorsignal gewonnen werden. Der Ansatz der Kölner Arbeitsgruppe ist die Simulation und Inversion der Metalldetektordaten. Für die Inversion werden schnelle analytische Simulationen benutzt, bisher jedoch nur für Kugeln und Ringe. Für die Simulation von komplexeren, für Landminen typischen Geometrien werden numerische Simulationen

mit der kommerziellen Software FEMLAB durchgeführt. Sie erlauben es, verschiedene physikalische Fragen zu untersuchen wie die nach der Gegeninduktion zwischen den Metallteilen oder dem Effekt eines Nichtleiters um das Metall. Zudem lassen sich so unabhängige Datensätze für die Inversion gewinnen. FEMLAB löst beliebige partielle Differentialgleichungen auf einem Finite-Elemente-Gitter in 2D und 3D. Wegen der geringen Eindringtiefe der elektromagnetischen Felder im Metall bedarf es bei der Berechnung vor allem einer sehr hohen Diskretisierung des Modellraums im Körper.

Simulationen in 2D mit Axialsymmetrie

Zunächst werden Modellierungen im Zeitbereich für rotationsymmetrische Körper im Boden unter zwei koinzidenten Spulen

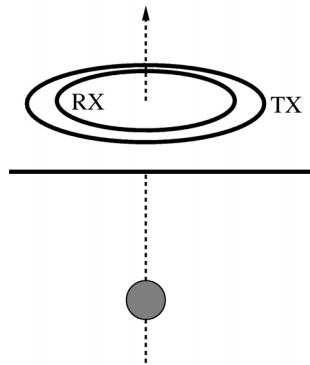


Abbildung 1: Die Kugel befindet sich auf der Sender- und Empfängerspulenachse.

Gezeigt (Abbildung 1 und 2). Das Sendesignal entspricht einer Stufenfunktion. Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie

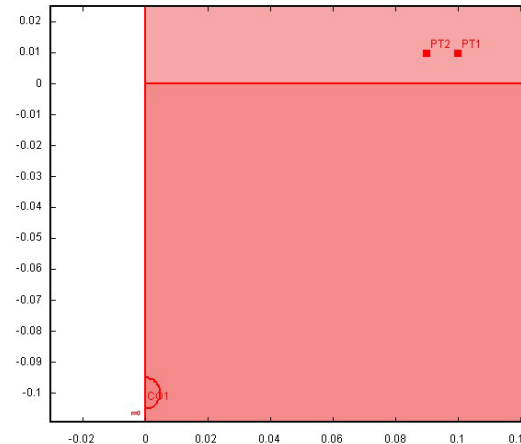


Abbildung 2: Modellraum. Durch die Anwendung der Randbedingung der Rotationssymmetrie (vertikale Rotationsachse bei 0) wird die 2D-Geometrie in eine 3D-Geometrie überführt. Die Skala beschreibt die vertikalen und horizontalen Maße in m.

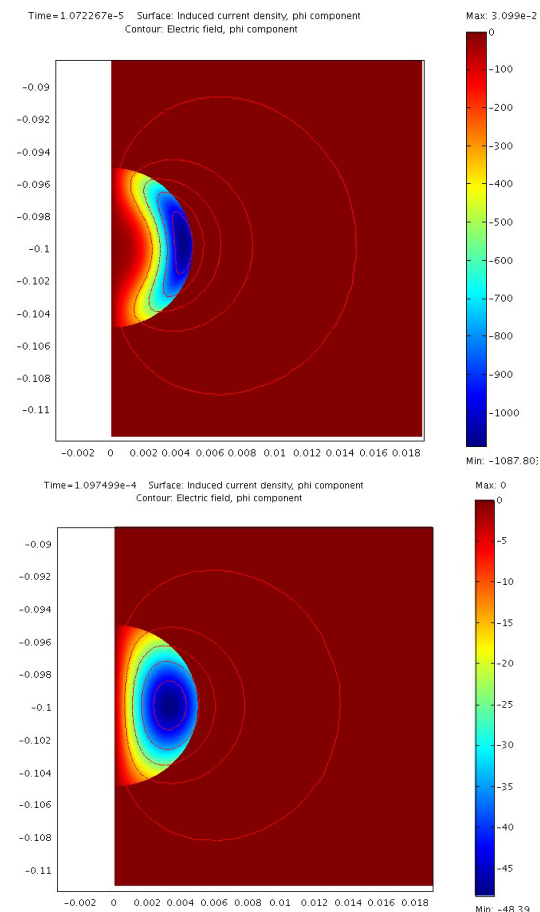


Abbildung 3: Induzierte Stromdichte in A/m^2 und elektrische Felder in der Kugel bei 10 und 100 μs . Die Achsen beschreiben die vertikalen und horizontalen Abmessungen in m.

kann das Modell in ein 2D-Modell überführt und der Rechenaufwand so deutlich verringert werden. Der Modellraum sollte mindestens doppelt so groß sein wie die maximale Diffusionstiefe. In diesem Fall sind dies 200 m. Als Randbedingung wurde gewählt, dass das magnetische Potential auf dem Rand verschwindet.

Abbildung 3 zeigt die induzierten Stromdichten und elektrischen Felder 10 und 100 μs nach abschalten des Stroms. Deutlich zu erkennen ist das tiefere Eindringen des Stromsystems zu späteren Zeiten.

Vergleich der Simulationsergebnisse mit der analytischen Lösung

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Ergebnisse wurden die in der Empfängerspule induzierten Spannungen mit den Ergebnissen der analytischen Lösungen verglichen. Der Zeitbereich wurde etwas größer als der für Metalldetektoren typische Messbereich von 10 μs – 1 ms gewählt. Die Beispiele in Abbildung 4 zeigen das simulierte und analytisch berechnete Signal einer magnetischen und einer unmagnetischen Metallkugel mit 1 cm Durchmesser in 15 cm Tiefe im leitfähigen Halbraum, sowie das ungestörte Bodensignal. Man erkennt eine gute Übereinstimmung zwischen den Lösungen.

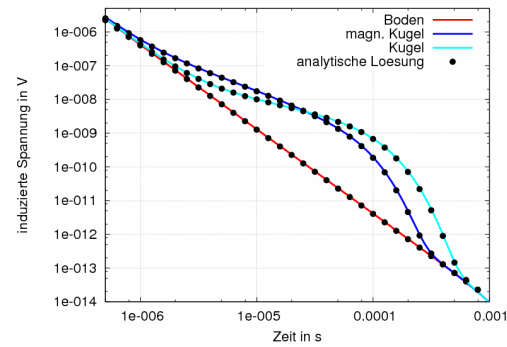


Abbildung 4: Vergleich der in der Empfangsspule induzierten Spannungen der analytischen und der numerischen Modellierungen.

Die hohe Genauigkeit wird zu frühen Zeiten durch eine feine Diskretisierung der Kugel und zu späten Zeiten durch eine große Anzahl von Zeitpunkten pro Dekade erreicht.

Simulation von Landminen ähnlichen Modellen

Die Simulation komplexerer Modelle ermöglicht es bestimmte Annahmen zu überprüfen. Die in Landminen verbauten Metallteile stehen in der Regel nicht in direktem Kontakt mit dem Erdboden. Um sie herum sind ein

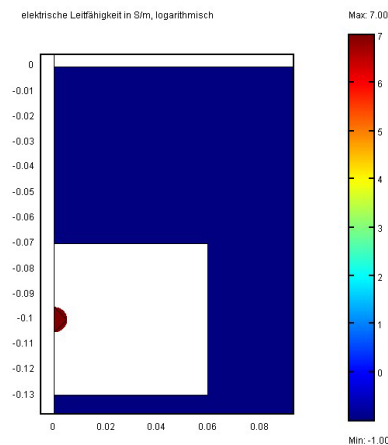


Abbildung 4: Modell einer Kugel im elektrisch nicht leitenden Gehäuse. Die Farbskala beschreibt den Logarithmus der Leitfähigkeit in S/m.

Gehäuse und eine Sprengstoff-füllung, die elektrisch isolieren. In den analytischen Modellen werden Gehäuse und Sprengstoff vernachlässigt, zudem wird die galvanische Kopplung zwischen Metallteil und Boden nicht berücksichtigt. Durch die Modellierung einer Kugel im nicht leitenden Zylinder (Abbildung 4)

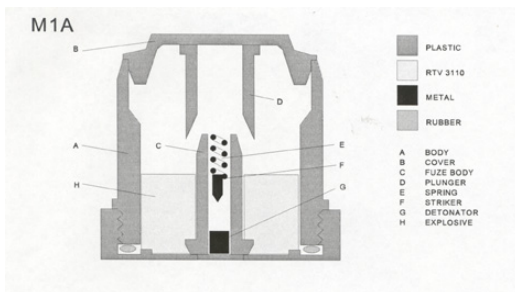


Abbildung 5: Skizze der Minenattrappe M1A

können diese Annahmen überprüft werden. Die in Abbildung 6 gezeigten Ergebnisse zeigen, dass beide Annahmen gerechtfertigt sind. Unabhängig davon ob ein nichtleitendes Gehäuse

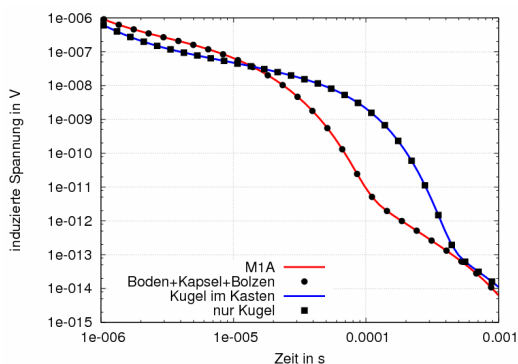


Abbildung 6: Induzierte Spannungen für die im Text besprochenen Modelle.

um die Kugel herum ist oder nicht erhält man identische Spannungen. Das zweite in Abbildung 6 dargestellte Beispiel zeigt eine Simulation der Minensurrogate M1A. Das Signal ist

wegen der kleineren Teile deutlich geringer.

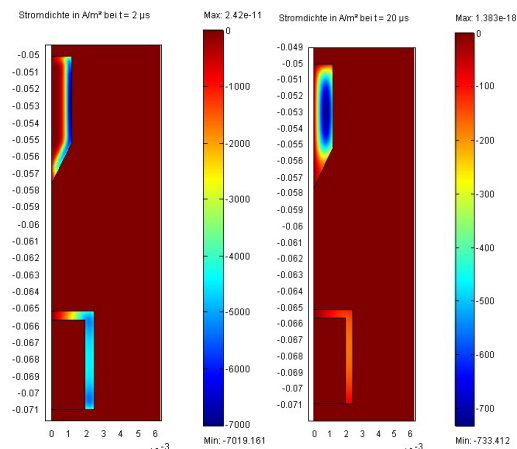


Abbildung 7: Induzierte Stromdichte im Schlagbolzen und in der Zündkapsel bei 2 und 20 µs. Die Einheiten der Ordinate und Abszisse sind Meter.

Zusätzlich zur Modellierung der gesamten Mine wurden Schlagbolzen und Zündkapsel einzeln simuliert und die Ergebnisse addiert. Da sie mit den für die gemeinsame Simulation erhaltenen Spannungen übereinstimmen, spielt hier die Gegeninduktion keine Rolle. Die induzierten Stromdichten zeigt Abbildung 7. Die Feder konnte aufgrund der Symmetriebeschränkung nicht modelliert werden.

3D Simulationen im Frequenzbereich

3D Simulationen sind bei FEMLAB bisher nur für eine harmonische Anregung möglich. Gezeigt werden Modellierungen für die Metalldetektor typischen Frequenzen, 2,4 kHz und 19,2 kHz. Der Modellraum ist 2 m x 2 m x 4 m groß. Die Sendespule entspricht der Empfängerspule

($R = 15 \text{ cm}$). Die induzierten Spannungen werden durch Flächenintegration der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses berechnet. Um die nur

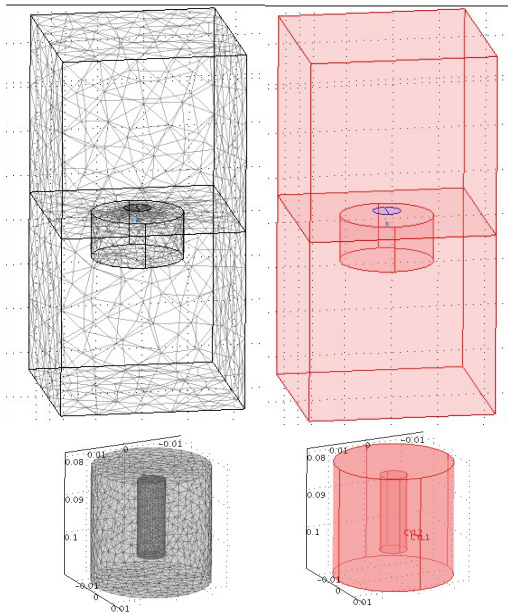


Abbildung 8: Modellraum und Gitter für die gekoppelten Geometrien. Der eingebettete Zylinder ist im großen Modellraum blau dargestellt. Die Einheiten der Achsenbeschriftungen ist Meter.

wenige Zentimeter großen Metallteile in einem möglichst großen Modellraum diskretisieren zu können, wurden zwei Modellräume miteinander gekoppelt. Abbildung 8 zeigt beide Modellräume und die Gitter. In dem größeren Modellraum wurde ein 3 cm hoher Zylinder mit 1,5 cm Radius eingefügt (Abb. 8 oben). In einem zweiten ebenso großen zylindrischen Modellraum (Abb. 8 unten) können nun sehr kleine Teile ausreichend fein durch finite Elemente diskretisiert werden. Beide Modellräume werden über die Bedingung gleicher magnetischer und elektrischer Potentiale auf der Zylinderober-

fläche miteinander gekoppelt. Durch diese Form der Modellraumteilung ist gewährleistet, dass die Metallteile für verschiedene Positionen im Raum das gleiche Gitter benutzen und so die Daten für ein Profil von vergleichbarer Qualität sind.

Profile über eine Kugel und einen Zylinder

Für die Inversionsverfahren werden synthetische Daten für verschiedene Positionen zwischen Objekt und Detektor benötigt. Die Beispiele zeigen Daten für ein Profil über eine Kugel mit 5,1 mm Radius und einen Zylinder mit 2 cm Höhe und 2,97 mm Radius. Beide Objekte

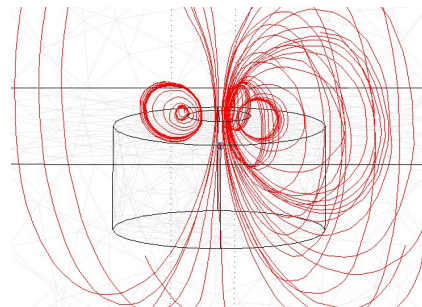


Abbildung 9: Magnetische Flussdichte in Realteil.

befinden sich mit ihrem Mittelpunkt 13,35 cm tief unter der Spule. Simulationen mit 2D-Axialsymmetrie ergeben für beide Körper direkt unter der Spule gleich große induzierte Spannungen bei 19,2 kHz. Bei 2,4 kHz sind die durch die Kugel hervorgerufenen Spannungen größer. Zum Vergleich werden jeweils die analytisch berechneten Werte für die Kugel gezeigt.

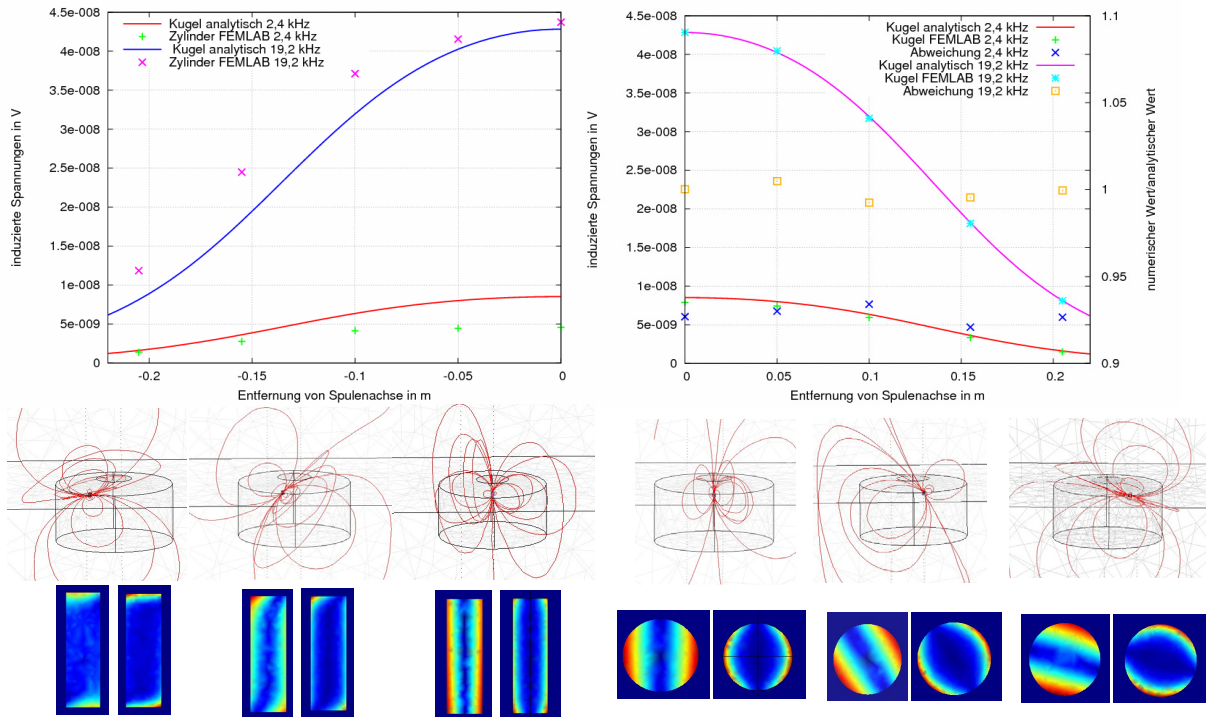


Abb. 10: Profil über eine Kugel und einen Zylinder für 2,4 und 19,2 kHz. Oben: Induzierten Spannungen im Vergleich zu den analytischen berechneten Werten. Mitte: Imaginärteil der magn. Flussdichte. Unten: induzierte Stromdichte im Objekt (rot: hohe, blau: niedrige) für 2,4 kHz (je links) und 19,2 kHz (je rechts) an den Positionen 0 cm, 10 cm und 20,5 cm.

Ausblick

Ziel ist es möglichst genaue Simulationen typischer Metallanordnungen in Minen zu berechnen. Anhand dieser kann untersucht werden wie die aus der Inversion erhaltenen Ergebnisse zu interpretieren und welche Bauteile der Mine wesentlich für die Signalbildung sind. Wegen der kleinen Abmessungen, wie zum Beispiel bei der dünnen Wand einer Zündkapsel, sind jedoch wesentlich mehr und deutlich kleinere Gitterelemente nötig. Bei dem in Abbildung 11 gezeigten Beispiel kommt es wegen einer zu geringen Elementdichte bei einer Achsensymmetrischen Anordnung zu unsymmetrischen Stromsystemen.

Eine Verbesserung kann durch einen besseren Gittergenerator oder höhere Rechnerkapazitäten erreicht werden. Eventuell kann sich sogar durch neuere Gittergeneratoren die Notwendigkeit der Modellraumzerlegung erübrigen und so die Anzahl der Freiheitsgrade weiter minimiert werden.

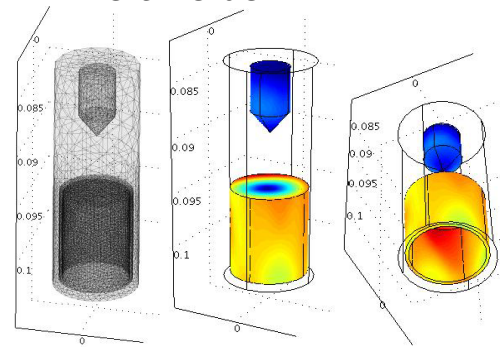


Abbildung 11: Gitter und induzierte Stromdichte für eine Simulation der Minenattrappe M1A. Die Achsenbeschriftung ist Meter.

Inversion von Metalldetektordaten im Zeit- und Frequenzbereich

J. Lange, T. Hanstein und S. L. Helwig

Institut für Geophysik und Meteorologie, Universität zu Köln

Zusammenfassung

Die hohe Fehlalarmrate bei der Minensuche mit Metalldetektoren verlangsamt das Räumen verminter Gebiete enorm. Daher ist es wünschenswert möglichst genaue Angaben über das gefundene Objekt zu erhalten um eine Identifizierung zu erleichtern. Zu diesem Zweck wird versucht das gemessene Signal des Detektors analytisch für einfache Körper wie Kugeln zu berechnen und basierend auf dieser Vorwärtsrechnung, Inversionen durchzuführen. Die Inversion von im Labor gemessenen Daten über einer und auch über mehreren Kugeln gelingt gut. Auch Felddaten von Objekten im Boden, wie zum Beispiel der Minenattrappe M1A lassen sich mit der Inversion auswerten. Es gibt jedoch auch von Minen erzeugte Signale, die sich nicht durch Kugelmodelle beschreiben lassen.

Einleitung

Die Räumung von Landminen, die als Hinterlassenschaft kriegsgerischer Auseinandersetzungen ganze Landstriche unnutzbar machen, ist sehr Zeit- und Arbeitsintensiv. Um die im Erdreich versteckten oder von Bewuchs verdeckten Minen zu finden nutzt man die geringe Metallmenge die in den meisten Exemplaren verbaut ist. Diese lässt sich gut mit Metalldetektoren orten. Zum Leitwesen der Minenräumer verursacht jedoch auch jedes weitere im Boden befindliche Metallteil ein Alarmsignal, dem dann mit aller Sorgfalt nachgegangen werden muss. Auf jede Mine kommen so je nach Gebiet um die 700 Fehlalarme. Die Reduzierung dieser Quote ist das Ziel des Projektverbundes HuMin/MD-„Minensuche mit Metalldetektoren:

Entwicklungspotentiale bei Datenanalyse und Messtechnik“. Mit Methoden der Tomographie und Signalanalyse sollen dem Metalldetektorsignal mehr Information über das geortete Objekt entnommen werden um eine Identifizierung der Minen zu ermöglichen.

Die Arbeitsgruppe an der Universität Köln versucht, dass Signal der Metalldetektoren für einfache Störkörper, wie Kugeln, Ringe oder Rotationsellipsoide, analytisch zu berechnen, um so die Daten invertieren zu können (Helwig et al., 2005). Voraussetzung ist jedoch, dass auch komplexere Geometrien durch diese einfachen Körper oder Kombinationen dieser beschrieben werden können. Überprüfbar ist dies mit numerischen Simulationen oder durch Test an Messdaten. Diese werden für den Projektverbund vom Institut

für Elektrotechnik der Universität Rostock (Labormessungen) und dem Fraunhofer Institut für zerstörungsfreie Prüfung in Saarbrücken (Feldmessungen) zur Verfügung gestellt. Zunächst wurde das Signal für eine Metallkugel erfolgreich simuliert und invertiert. Im Folgenden sollen nun die Inversionsergebnisse für Messungen über mehreren Kugeln und von Felddaten gezeigt werden. Bei letzteren ist vor allem der Einfluss des magnetischen Bodens zu beachten.

Labormessungen mit einem Metalldetektor im Frequenzbereich

Der benutzte Metalldetektor ist in Abbildung 1 und 3 gezeigt. Er besitzt eine mehrfach gewickelte Sendespule (Abbildung 1, rechts blau) und zwei innen liegende entgegengesetzt gewickelte Empfangsspulen (gelb). Die doppel-D förmige differentielle Anordnung der Spulen hat den Vorteil, dass das starke Primärfeld kompensiert wird und nur inhomogene Leitfähigkeits- und Permeabilitätsstrukturen ein Signal erzeugen. Veranschaulichen lässt sich das Messprinzip

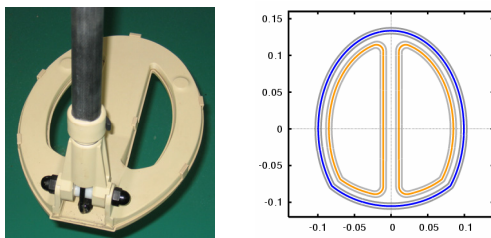


Abbildung 1: Bild und Skizze des Detektorkopfes.

an Abbildung 2. Für die beiden verwendeten Frequenzen, 2,4 kHz und 19,2 kHz, sind hier Real- und Imaginärteil für eine Profilmessung über eine Kugel gezeigt. Das Objekt ist eine Aluminiumkugel in 5 cm Abstand zum Sensorkopf mit 1,4 cm Durchmesser bei y-Position 0,3 m. Wird der Detektor über die Kugel bewegt, wird zunächst in der einen Empfangsspule mehr Spannung induziert als in der anderen und so eine messbare Spannungsdifferenz erzeugt. Über der Kugel ist das induzierte Signal in beiden Spulen gleich groß und somit die Differenz null. Wird der Detektor weiter bewegt, kehrt sich das Vorzeichen um, da nun in der entgegengesetzt gewickelten Spule eine größere Spannung erzeugt wird. Man erhält also direkt über dem Objekt einen Nulldurchgang, wobei der Kreuzungspunkt der Signale der Real- und Imaginärteile gleichzeitig ein Punktsymmetriezentrum ist.

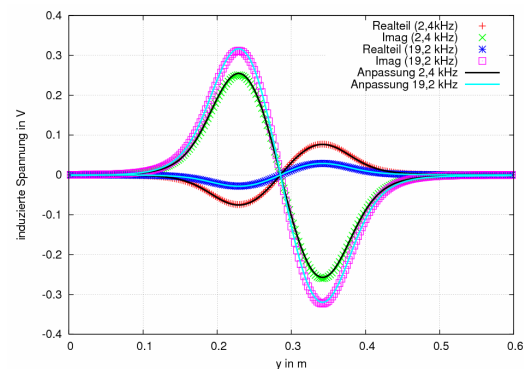


Abbildung 2: Gemessene (Symbole) und berechnete Spannungen (Linien) für ein Profil über eine Alukugel ($R=1,4$ cm) in 5 cm Abstand zum Detektor.

Die hier gezeigten Labordaten wurden vom Institut für Elektrotechnik der Universität Rostock aufgezeichnet die innerhalb des Verbundes für die Messungen im Labor verantwortlich sind. Der Messaufbau ist in Abbildung 3 gezeigt. Die Objekte, wie Kugeln, Zylinder oder Minenattrappen, werden innerhalb der grünen Wanne platziert. Diese wird entweder mit Böden verfüllt oder luftleer gelassen. Oberhalb der Wanne, separiert durch ein Holzgestell, befindet sich ein Drei-Achsen-Scanner der eine automatisierte Messwerterfassung in der Fläche und für verschiedene Höhen ermöglicht.

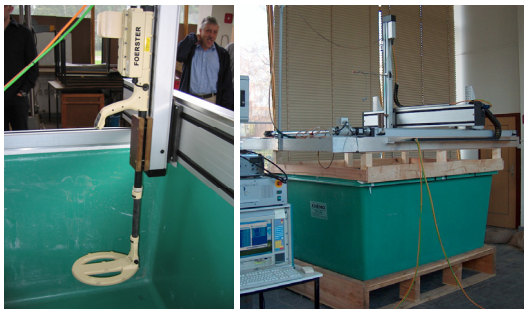


Abbildung 3: Messaufbau. Der Detektor wird mit einem Drei-Achsen-Scanner über ein in der Wanne platziertes Objekt bewegt.

Das Bild, das so bei einem Flächenscan über ein Objekt entsteht, zeigt Abbildung 4. Es handelt sich hierbei um die gleiche Alukugel wieder in 5 cm Abstand. Die x-Richtung ist durch die Mittelachse des Detektors bestimmt. Durch die kleine Entfernung zwischen Kugel und Detektor zeichnet sich die Empfangsspulenform deutlich in allen vier Komponenten ab. Die im Realteil der ersten Frequenz

(2,4 kHz) erkennbare Unsymmetrie wird durch einen geringen Gleichstromwert erzeugt, der auf jedem Kanal zum eigentlichen Signal hinzukommt.

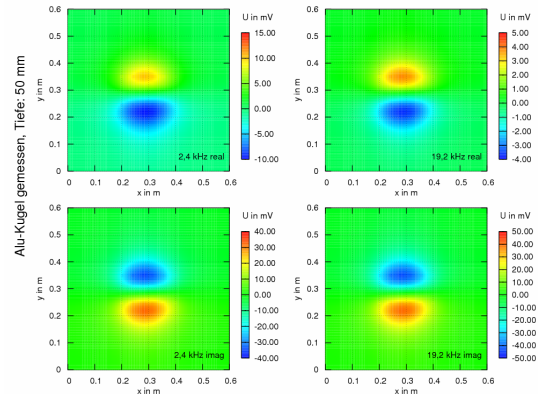


Abbildung 4: Flächenscann über eine Aluminiumkugel in 5 cm Abstand. Dargestellt sind Real- (oben) und Imaginärteil (unten) der induzierten Spannungen für 2,4 kHz (links) und 19,2 kHz (rechts).

Inversion von Labordaten im Frequenzbereich

Die Inversion der Daten wird mit einem Marquardt-Levenberg-Verfahren durchgeführt. Die verwendete Vorwärtsrechnung berechnet das Metaldetektorsignal für eine Kugel in Luft. Eine weitere Beschreibung findet man bei Helwig et al., 2005. Besonders wichtig für eine genaue Berechnung ist dabei die Berücksichtigung der exakten Spulenform. Abbildung 1 rechts zeigt den von uns gewählten Weg bei der numerischen Integration der einzelnen Spulenelemente. Die durch die Inversion zu bestimmenden Modellparameter sind Radius und Position der Kugel, sowie deren Leitfähigkeit und magnetische Permeabilität. Weiterhin

sind die genaue Anzahl der Wicklungen und die internen komplexen Signalverstärkungsfaktoren unbekannt, ebenso wie der Gleichspannungswert, der auf jedem Kanal aufaddiert wird. Insgesamt müssen also 13 Modellparameter und die genaue Spulengeometrie bestimmt werden. Da jedoch die Abmessungen des Sensorkopfes und die Verstärkungsfaktoren für alle Messungen gleich sind, wurden diese separat berechnet und im Folgenden nicht mehr variiert. Abbildung 2 zeigt die Anpassung der Daten aller vier Kanäle durch die Inversion eines Profils über eine Aluminiumkugel mit 14 mm Radius in 5 cm Tiefe. Der durch die Inversion bestimmte Radius beträgt 13,6 mm und die Tiefe 4,82 cm. Beide Größen sind also sehr genau bestimmt. Die Werte für die Leitfähigkeit ergeben 15,2 MS/m und die der magnetischen Permeabilität 0,87 und weichen nur wenig von den in der Literatur publizierten Werten ab. Anhand des Inversionsergebnisses wurden daraufhin die indu-

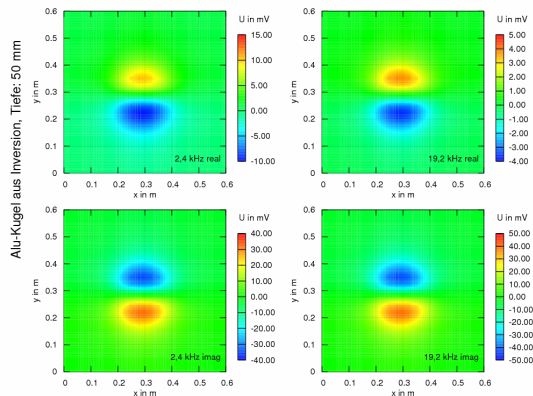


Abbildung 5: Simulation der Daten aus Abbildung 4 anhand des Inversionsergebnisses.

zierten Spannungen an allen Messpunkten berechnet. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5. Auch hier ist die Übereinstimmung mit den Messdaten sehr gut.

Inversion von Messungen über mehreren Körpern

Landminen beinhalten oft mehr als nur ein Metallteil. Zumindest eine Zündkapsel und ein Schlag-

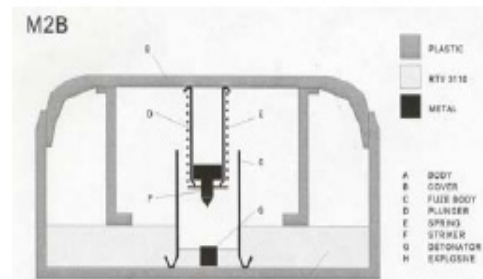


Abbildung 6: Skizze der Mienenattrappe M2B

bolzen sind meistens in den Minen verbaut. Hinzu kommen Federn oder Gehäusebauteile (Abbildung 6). Jede Kombination der Metallteile ist zum einen typisch für eine bestimmte Minenart und zum zweiten ein künstliches Arrangement von Metallobjekten, das so außer in Minen im Boden nicht vorkommt. Wenn es gelingt diese Bauteil-Kombinationen mittels Signalauswertung zu identifizieren, ist die Möglichkeit gegeben die Fehlalarmrate zu deutlich zu reduzieren.

Zunächst sollen die Inversionsergebnisse für eine Messung über drei Kugeln gezeigt werden. Bei der Messung lagen drei gleich große Kugeln ($R=1,4$ cm)



Abbildung 7: Metallkugeln für die Inversion

aus Stahl, Aluminium und Kupfer in einer Ebene 2,5 cm vom Detektor entfernt. Die Kugeln wurden mit 10 cm Abstand auf einem zur y-Achse parallelen Profil bei $x = 28,25$ cm platziert. Der durch die Inversion zu bestimmende Modellvektor setzt Aus drei Positionen im Raum, drei Leitfähigkeiten und drei magnetischen Permeabilitäten zusammen. Insgesamt sind 18 Modellparameter zu bestimmen.

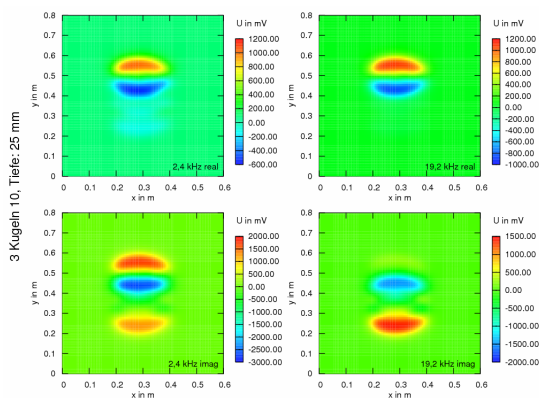


Abbildung 8: Messung über die drei in Abbildung 7 dargestellten Kugeln.

Die gemessenen Daten sind in Abbildung 8 zu sehen. An den mehrfachen Vorzeichenwechseln in allen vier Komponenten ist zu erkennen, dass es sich um mehrere Objekte handelt.

Das Inversionsergebnis ist in Tabelle 1 gezeigt. Invertiert wurden fünf zur y-Achse parallele Profile. Wie in den Modellparametern zu sehen ist konnten die Positionen und Größen der Kugeln genau bestimmt werden.

Elektrische Leitfähigkeit und magnetische Permeabilität lassen sich über Literaturwerte eindeutig den drei verschiedenen Metallen zuordnen.

Kugel	1	2	3
μ_r	1,21	1,36	67,4
σ [MS/m]	51,6	19,2	4,4
R [cm]	1,48	1,38	1,49
x [cm]	28,4	28,3	28,2
y [cm]	29,7	39,7	49,5
z [cm]	2,43	2,21	2,32

Tabelle 1: Inversionsergebnis der Daten aus Abbildung 8.

Die zugehörigen berechneten Daten zeigt Abbildung 9. Die Bestimmung der Position und des Metalls aus Messdaten ist also auch für mehrere Objekte möglich, obwohl natürlich die Abhängigkeit von einer guten Wahl des Startmodells zunimmt. In dem gezeigten Beispiel wurden drei in einem gleichseitigen Dreieck angeordnete magnetische Kugeln mit 1 cm Radius und 1 cm Abstand zueinander angenommen.

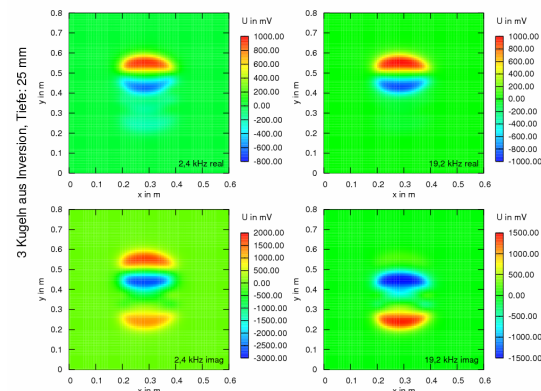


Abbildung 9: Berechnete Daten durch die Inversion für die drei Kugeln.

Des Weiteren wurde versucht Messdaten von der Mienenattrappe M2B (Abbildung 10) mit mehreren Kugeln auszuwerten.

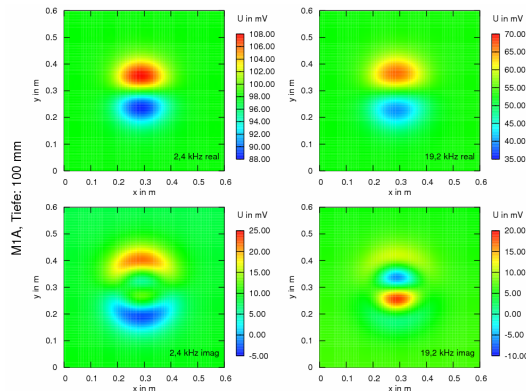


Abbildung 10: Messdaten der Mienenattrappe M2B.

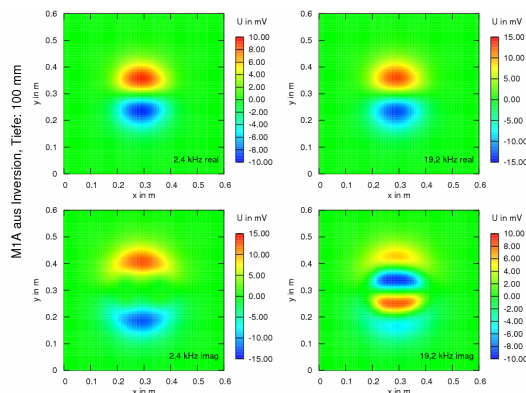


Abbildung 11: Berechnete Daten aus der Inversion der in Abbildung 10 gezeigten Messdaten.

Wiederum wurden aufgrund der mehrfachen Vorzeichenwechsel in den Daten drei Kugeln als Startmodell angenommen (gleiches Modell wie zuvor). Die Oberkante der an Position $x = 28,25 \text{ cm}$ / $y = 29,75 \text{ cm}$ liegenden M2B befand sich 10 cm vom Detektor entfernt. Die erhaltenen Modellparameter zeigt Tabelle 2, die zugehörigen berechneten Daten findet man in Abbildung 11. Prinzipiell ist es gelungen die Hauptmerkmale,

wie die mehrfachen Vorzeichenwechsel des gemessenen Signals im Imaginärteil der 2. Frequenz zu qualitativ zu rekonstruieren.

Es sind jedoch auch klare Unterschiede zu sehen, zum Beispiel im Imaginärteil der ersten Frequenz. Die in den Messdaten zu erkennende Sichelform der Anomalie ist bei den berechneten Daten deutlich runder. Vergleicht man die erhaltenen Modellparameter mit den tatsächlichen Abmessungen, fallen vor allem die falschen Tiefen auf, die deutlich niedriger sind als die Tiefe der Mine (10 cm). In diesem Fall kann das Signal der Mine also nicht durch ein Kugelmodell erklärt werden.

Kugel	1	2	3
μ_r	0,6	266	50
$\sigma \text{ [MS/m]}$	249	1,2	0,4
R [cm]	0,84	0,87	1,11
x [cm]	28,3	28,2	28,3
y [cm]	29,8	28,8	31,1
z [cm]	6,3	9,8	11,1

Tabelle 2: Inversionsergebnis der Daten aus Abbildung 10.

Inversion von Felddaten

Im Rahmen des Projektes werden auch Messungen auf einem Testfeld für Minendetektoren in Ispra/Italien durchgeführt (Abb. 12). Verantwortlich dafür ist das Fraunhofer Institut für zerstörungsfreie Prüfung in Saarbrücken. In Ispra sind in verschiedenen Böden systematisch Minenattrappen, Testkörper wie Kugeln und Metallschrott wie Coladosen im Boden vergraben. Ein Zwei-Achsen-Scanner ermöglicht den Detektor automatisch über das Testfeld zu bewegen. Abbildung 13 zeigt die Anordnung der Objekte, die Messdaten der vier Komponenten, sowie die dem akustischen Signal zu Grunde liegende Spannung. Der Boden ist ein Sandboden. Während im Realteil



Abbildung 12: Testfeld in Ispra/Italien.

beider Frequenzen die meisten Objekte gut zu erkennen sind, ist das im Imaginärteil nicht der Fall. Hier wird das von den Metallobjekten verursachte Signal von einem Störsignal überlagert. Die Ursache hierfür ist, dass es sich um einen magnetischen Boden handelt, der Boden also eine von 1 verschiedene Suszeptibilität hat.

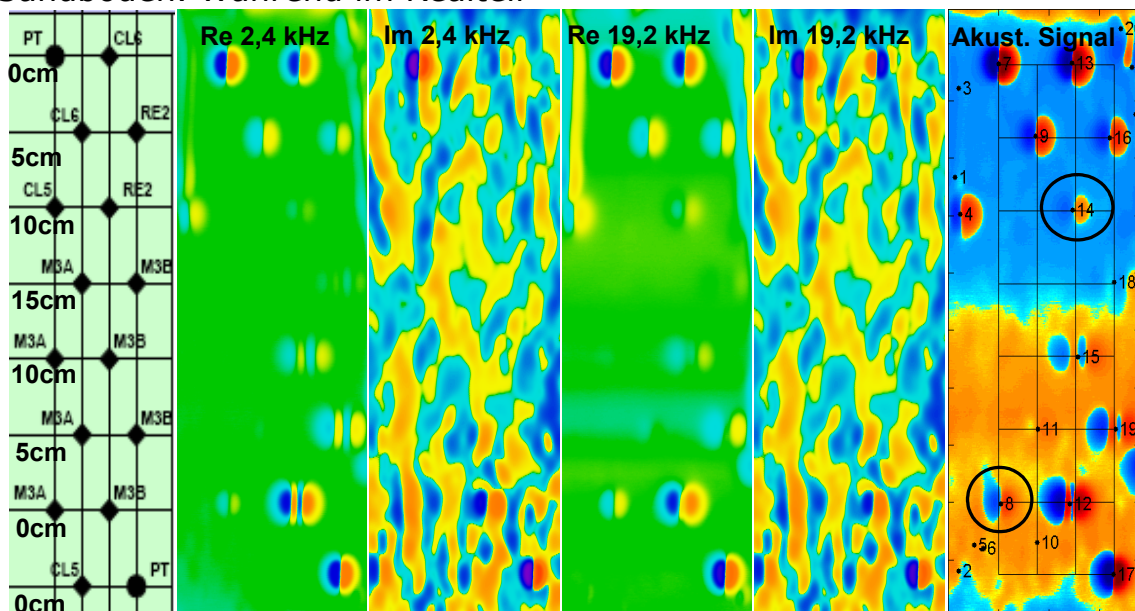


Abbildung 13 von links nach rechts: Bezeichnung, Position und Tiefe der im Boden platzierten Objekte, Real- und Imaginärteil der induzierten Spannungen bei 2,4 kHz und bei 19,2 kHz. Rechts: dem akustischen Signal des Detektors zu Grunde liegende Spannung. Die Kreise markieren die genauer untersuchten Daten. Die nummerierten Punkte beschreiben das Ergebnis des Pinpointing-Algorithmus des Fraunhofer Instituts für Produktionstechnik und Automatisierung.

Diese führt zu einer Verstärkung des anliegenden Magnetfeldes, das wiederum proportional zu der benutzten Frequenz ist. Da sich diese Eigenschaft nicht homogen über den ganzen Boden verteilt kommt es zu den beobachteten Mustern.

Eine einfache Methode die Imaginärteile dennoch auswerten zu können, ist die Bildung der entsprechend den Frequenzen gewichteten Differenz.

$$\text{Signal} \propto \text{Im}(\omega_1) - \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{Im}(\omega_2) \quad (1)$$

Dies wäre eine Möglichkeit, dass in Abbildung 13 gezeigte akustische Signal zu erzeugen.

Um nun bei der späteren Anwendung im Feld die Daten automatisiert auswerten zu können, muss zuerst digital das Objekt in den Daten lokalisiert werden. Eine Möglichkeit ist der Pinpointing-Algorithmus des Fraunhofer IPA, der automatisch mögliche Objekte im Signal findet und kennzeichnet. In Abbildung 13 rechts ist das Ergebnis durch nummerierte Punkte illustriert. Im Folgenden sollen die Funde 8 und 14 genauer untersucht werden. Über beiden wurden je fünf parallele Profile ausgeschnitten und invertiert.

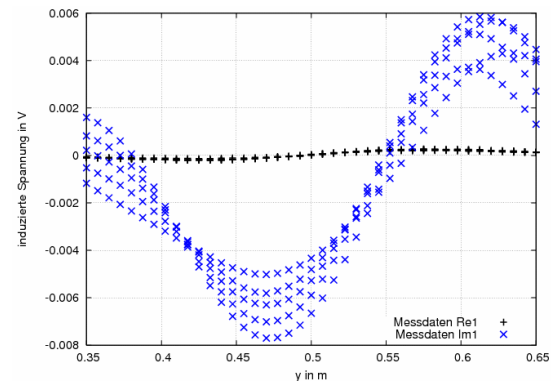


Abbildung 14: Real und Imaginärteil der Frequenz 2,4 kHz von 5 parallelen Profile über Objekt 14.

Abbildung 14 zeigt die gemessenen Daten über Objekt 14. Deutlich zu sehen ist die wesentlich größere Amplitude des Imaginärteiles, die durch den magnetischen Boden verursacht wird. Zudem ist die über dem Objekt (an Position 0,5 m) erwartete Punktsymmetrie nicht gegeben. Bildet man nun die gemäß Gleichung 1 gewichteten Differenzen der Real- und Imaginärteile ist die Punktsymmetrie wieder zu erkennen (Abbildung 15).

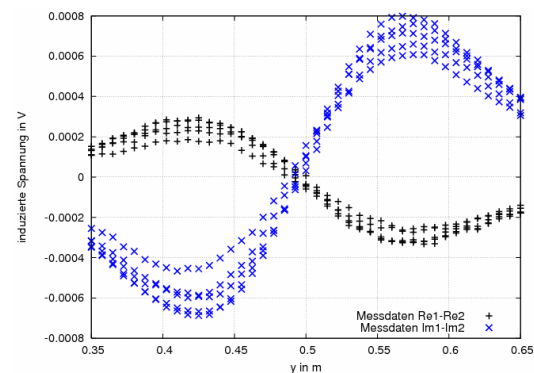


Abbildung 15: Nach Gleichung 1 gewichtete Differenz der Real- und Imaginärteile der Daten von Objekt 14.

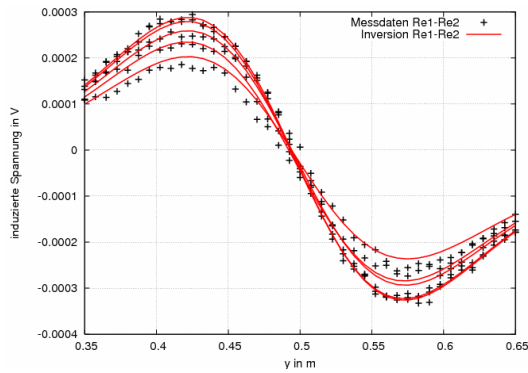


Abbildung 16: Anpassung der gewichteten Differenz der Realteile der Messung über Objekt 14.

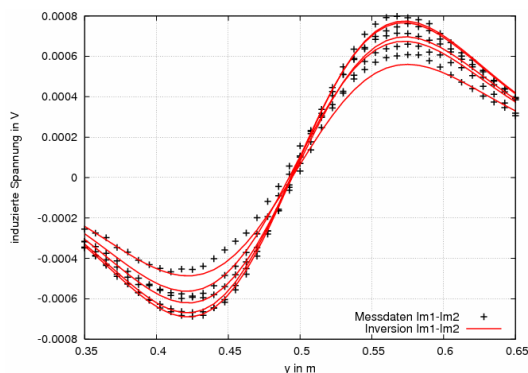


Abbildung 17: Anpassung der gewichteten Differenz der Imaginärteile der Messung über Objekt 14.

Um möglichst vom Bodeneinfluss bereinigte Daten auszuwerten wurden im Folgenden die Inversionen an den Differenzen der Daten durchgeführt. Die Abbildungen 16 und 17 zeigen die Anpassung der Daten durch die Inversion. Objekt 14 ist eine in einem Silikonzylinder eingelassene Stahlkugel mit Radius 9,5 mm. Sie befindet in 10 cm Tiefe, wobei der Detektor zusätzlich weitere 6 cm vom Boden entfernt ist.

Unsere Inversion bestimmt die Tiefe der Kugel mit 9,1 cm und den Radius mit 8,6 mm. Dieser ist also bis auf 1 mm genau bestimmt. Der Wert der elektri-

schen Leitfähigkeit beträgt 2,3 MS/m und der der magnetischen Permeabilität 81. Beides sind typische Werte für Stahl. Bei dem Objekt 8 handelt es sich um die Minenattrappe M3A. Abbildung 18 zeigt eine Skizze. Die Metallteile sind schwarz dargestellt. Das Gehäuse ist 4 cm hoch und hat einen Durchmesser von 11 cm.

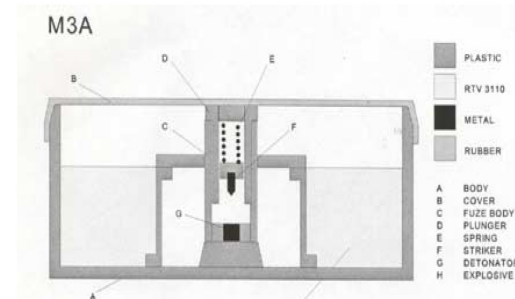


Abbildung 18: Skizze der Minenattrappe M3A.

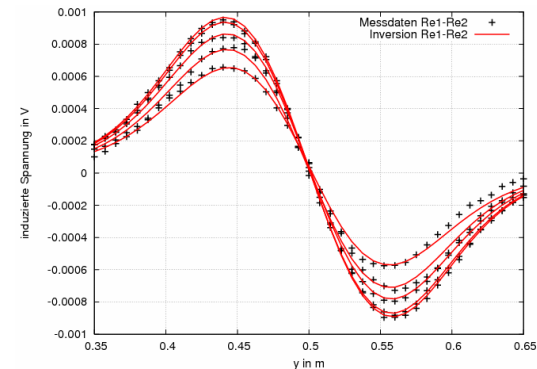


Abbildung 19: Anpassung der gewichteten Differenz der Realteile der Messung über Objekt 8.

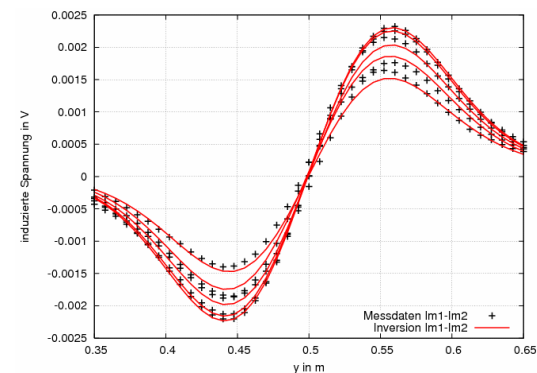


Abbildung 20: Anpassung der gewichteten Differenz der Imaginärteile der Messung über Objekt 8.

Die gemessenen Daten und deren Anpassung durch die Inversion sind in Form von gewichteten Differenzen in den Abbildungen 19 und 20 dargestellt. Die Oberkante der Attrappe befindet sich in der Tiefe 0 cm, also auf gleicher Höhe wie der Boden. Der Abstand zum Detektor beträgt wieder 6 cm. Auch hier gelingt wieder eine gute Anpassung der gemessenen Daten. Als Modell wurde eine einzelne Kugel gewählt. Die Inversion ergibt für den Radius 4,7 mm, für die Tiefe 1,9 cm, für die Leitfähigkeit 7,3 MS/m und für die magnetische Permeabilität 76. Da der Stahlbolzen in der Mine in etwa 2 cm Tiefe liegt, kann vermutet werden, dass das gemessene Signal hauptsächlich durch ihn verursacht wird. Numerische Simulationen zur Verifizierung dieser Annahme sind in Arbeit.

Ausblick

Die Anpassung von Labor- und Felddaten für Kugeln funktioniert gut. Es wurde gezeigt, dass allerdings allein mit Kugeln das Metalldetektorsignal über einigen Minen nicht reproduziert und somit ausgewertet werden kann. Eine Erweiterung der Inversion um Vorwärtsrechnungen für Ringe und Rotationsellipsoide ist daher in Arbeit. Weiterhin sollen mit numerischen Simulationen Modellstudien durchgeführt werden, die helfen die Inversionsergebnisse

richtig zu interpretieren. Ein weiterer Arbeitsbereich ist schließlich die Übertragung der Ergebnisse in den Zeitbereich. Innerhalb des Projektes werden zusätzlich zu dem gezeigten Continuous Wave Metalldetektor auch Messungen mit Pulse Induction Metalldetektoren durchgeführt. Diese senden Pulse ähnlich wie in der der Transient-Elektromagnetik und werten im Anschluss Zeitreihen aus.

Literatur:

S. L. Helwig, T. Hanstein, A. Hördt, J. Lange, H. Ewald, H.-W. Glock, H. Krüger, Th. Krüger, S. Schulze, U. van Rienen: Inversion von orts aufgelösten Wirbelstrommessdaten zur Bestimmung der Lage und Geometrie von Landminen, Tagungsband DGZfP Jahrestagung 2005 in Rostock

Resolution and depth of investigation studies of Magnetic Resonance Sounding (MRS) using SVD

Mike Müller, Marian Hertrich, Ugur Yaramanci*

Introduction The question of resolution and depth of investigation for the ill-posed MRS inverse problem has been presented in few different ways. Most of them focused on analysing inversion result either changing modeling parameters [6, 5] or using independent inversion runs [1]. A direct estimation of maximum investigation depth for different loopsizes and resistivity cases can be achieved if the maximum depth is defined as a $\frac{1}{e}$ decreased sensitivity (respectively kernel function) value. All of which listed above are more or less subjective and therefore a objective method of analysing model resolution using singular value decomposition (SVD) is presented. Within this we derive a strong dependency of loopsize, resistivity and resolution for a homogenous half space.

Quantifying resolution, depth penetration and image quality As shown in [3] the MRS forward problem can be described as

$$\begin{aligned} V_R(q) = & \omega_L \int d^3\mathbf{r} \left| \mathbf{M}_N^{(0)}(\mathbf{r}) \right| \sin(q\mathbf{B}_T^+(\mathbf{r})) \\ & \times \mathbf{B}_R^-(\mathbf{r}) \cdot e^{i[\zeta_T(\mathbf{r}) + \zeta_R(\mathbf{r})]} \\ & \times \left[\hat{\mathbf{b}}_R(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{b}}_T(\mathbf{r}) + i\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \hat{\mathbf{b}}_R(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{b}}_T(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

and furthermore summarized to

$$V_R(q) = \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{K}(q, \mathbf{r})$$

where $\mathbf{K}$ is the kernel or sensitivity function. This means the forward problem of MRS can easily be written as a linear mapping without any kind of linear approximation

$$y = Ax \quad (2)$$

while using mathematical standard descriptions A is the kernel or sensitivity function, x the water content of the subsurface and y the measured signal. Following denotation of [2] singular value decomposition to A can be written as

$$A = U\Lambda V^T = [U_p \ U_0] \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p^T \\ V_0^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

*Technical University Berlin, Ackerstrasse 71-76, Berlin

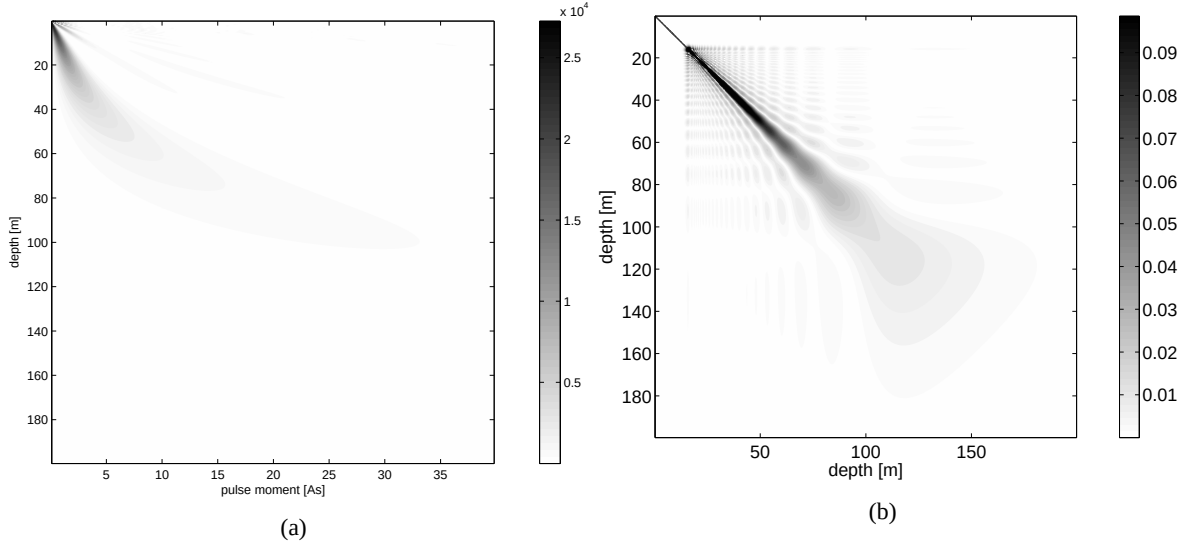


Figure 1: a) Kernel function of 100 m loop diameter and 100 Ωm homogeneous half space resistivity. b) Model resolution R^m for this kernel function

Λ_p is diagonal and contains the singular values in decreasing order $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p \geq \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q = 0$, $q = \min(m, n)$, p rank of A . $U \in \mathbb{C}_1^{n \times n}$ and $V \in \mathbb{C}_2^{m \times m}$ denote unitary¹ matrices formed by the complete set of Eigenvectors of A . The pseudo (or generalized) inverse $A^\dagger$ is then

$$A^\dagger = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T \quad (4)$$

Owing to the ill-posedness of the problem the inverse operator $A^\dagger$ can resolve only $x^{est} = A^\dagger d$ which is not exactly the true subsurface water content because $A^\dagger \neq A^{-1}$. Hence an operator mapping between x and x^{est} describes the difference between the real water content x in the subsurface and the invertible noise free water content x^{est} . For our depth and resolution studies we focus at this model resolution operator R^m

$$x^{est} = A^\dagger y = A^\dagger A x = R^m x \quad (4)$$

$$R^m = A^\dagger A \quad (5)$$

or in term of SVD

$$R^m = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T U_p \Lambda_p V_p^T = V_p V_p^T \quad (6)$$

It is obvious that $V V^T = V_p V_p^T = \delta_{i,j}$ is valid only for vanishing null-space ($V_0 = \text{empty}$) and for this particular case $x^{est} = x$. For every non vanishing null-space R^m acts as a weighting operator

$$x_i^{est} = \sum_{j=1}^m R_{i,j}^m x_j \quad (7)$$

¹A is unitary if and only if $A^{-1} = A^T$

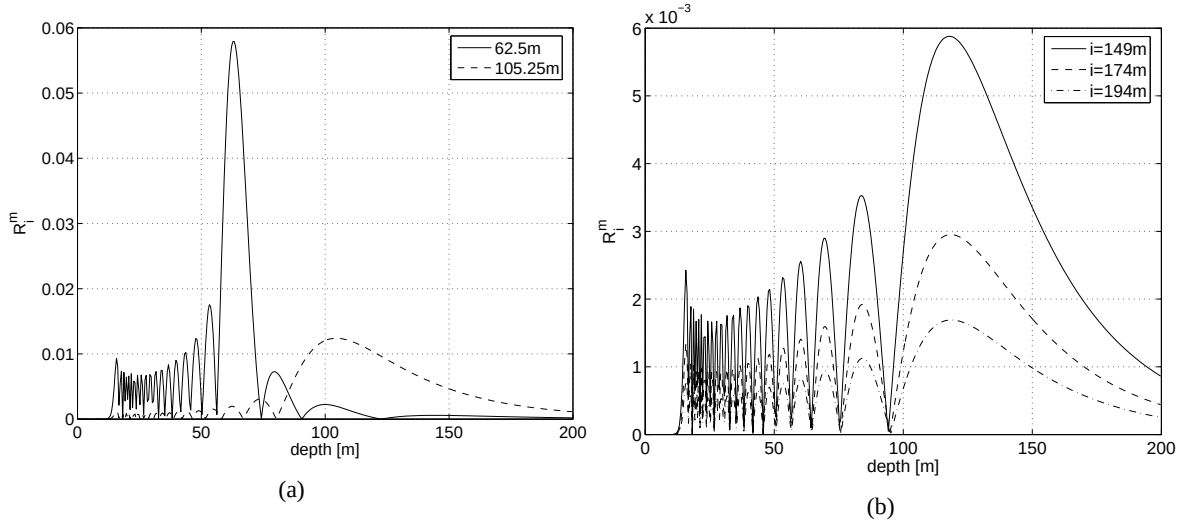


Figure 2: Slice through model resolution matrix at various depth for calculated kernel function of 100 m loop diameter and 100 Ωm homogeneous half space resistivity. The inverted water content at these depth is a weighted (by the function shown above) average of the complete real water content distribution.

that means every nonzero off-diagonal element of $R_{i,j}^m$ is decreasing model resolution for a specific x_i^{est} because parts of the true water content x are mapped into one single x_i^{est} . Analysing R^m row by row one can achieve detailed information on resolution for every x_i^{est} and furthermore for any depth since the index of x_i^{est} is identified with depth. In Fig. 2 selected rows of R^m are plotted. With decreasing resolution the peak width increases and stronger side lobes appear. Following this interpretation of R^m as weighting operator the resolution (or resolution radius) at any depth can be defined as full width at half maximum for the main peak as long as the maximum of side lobes is small compared to the main peak (Fig. 2 a). For larger depth the increasing influence of side lobes is shown in Fig. 2 b. In this case it is no longer reliable to assign x_i^{est} to a closed part of x (resolution radius), but there is still sensitivity for monitoring changes within deep structures. Thus two different ways are proposed to derive this maximum penetration depth of one specific configuration (loop size and resistivity distribution). First the position of the main peak maximum appears to be constant and can be defined as the maximum penetration depth (Fig. 3 b). Second, as shown above for a vanishing null-space

$$V_p V_p^T = \delta_{ij} \quad (8)$$

and furthermore

$$\sum_{j=1}^m R_{i,j}^m = 1 \quad (9)$$

As a result of this (see Fig. 3 a) for any non vanishing null-space

$$\sum_j R_{i,j}^m \leq 1 \quad \forall j \in [\max(\text{peakwidth}) \max(\text{peakwidth})/2] \quad (10)$$

which means for a significant increasing value in Equation 10 the side lobes influence decreases. Both approaches show similar results for the maximum penetration depth.

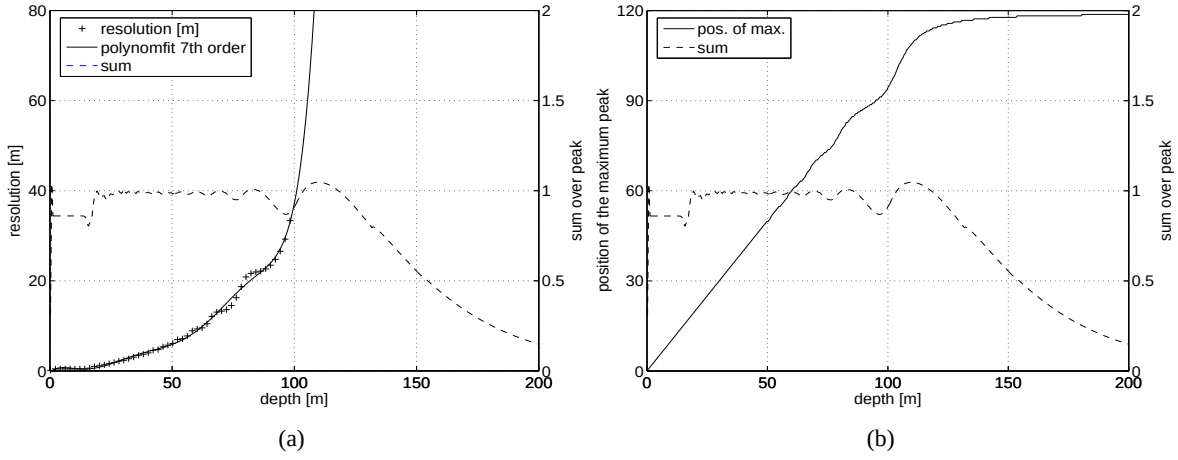


Figure 3: a) Position of the main peak maximum (main influence to the water content in one specific depth) compared to sum over peak (see eq. 10)
b) Resolution (peak width) and polynomial fit (due to numeric model border effects) compare to sum

Resolution and depth penetration considering noisy conditions Taking real data into account noise has to be included. After triangle inequality in Hilbert space the stability of the solution is directly connected to ill-posedness of the Inverse Problem and the noise level of your data (for detail see [4])

$$\|x_n^{est} - x\| \leq \|x_n^{est} - x_n\| + \|x_n - x\| \quad (11)$$

$$\leq \|A_n^\dagger\| * \|y^{est} - y\| + \|A_n^\dagger y - x\| \quad (12)$$

$$\|x_n^{est} - x\| \leq \|A_n^\dagger\| \delta + \|A_n^\dagger A x - x\| \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^\dagger\| = \infty \quad (14)$$

$$\|A_n^\dagger A x - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (15)$$

where δ denotes the noise level, y^{est} the noisy data and n the number of singular values taken into account (truncated SVD). Obviously n has to be chosen in a way to satisfy both stability (eq. 14) and approximation of the solution (eq. 15). Furthermore if δ increases n has to be chosen smaller ($n \ll p$) and consequently the model resolution decreases.

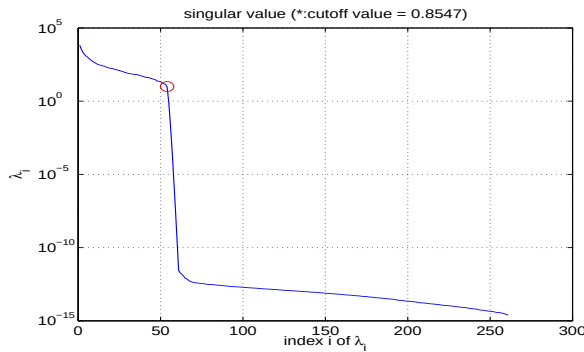


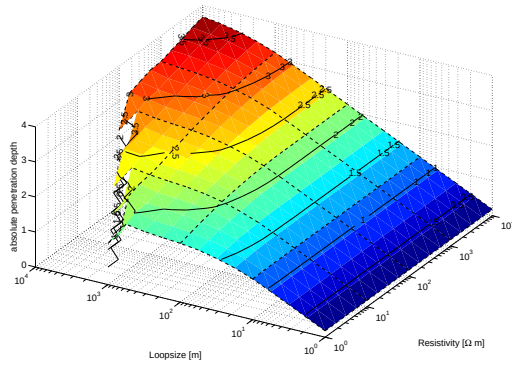
Figure 4:

Spectrum of singular value for calculated kernel function of 100 m loop diameter and 100 Ωm homogeneous half space resistivity. The red circle marks the maximum index of singular values considered for resolution studies.

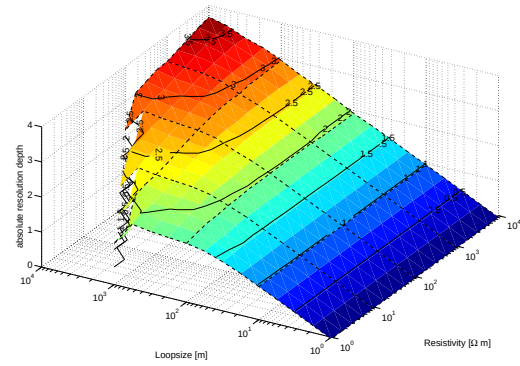
Conclusion Based on the developed strategies we use the maximum penetration depth and a resolution depth defined as $\frac{1}{10}$ loop diameter resolution radius to evaluate the influence of different loop sizes from 1m to 10000m and resistivities from 1 Ωm to 10000 Ωm for noise free conditions, therefore $n = p$ can be set (Fig. 4 show the spectrum of singular value). But it has to be remarked that this is the best case scenario and for any other noisy case lower resolution has to be expected. Fig.5 now illustrates the dependency of resolution from loop size and resistivity. One can see that the influence of resistivity increases for increased loop sizes and penetration depth is strongly dependent on resistivity even for small loop sizes. The functional relationship for the penetration depth normalized to loop size appears to be quadratic. Now it can be derived that the MRS technique reaches physical limits of penetration depths in general when considering limited space for very large loops. But since exploration of water saturated layers is one of the basic tasks of MRS, geological relevant resistivities of sedimentary formations have to be taken into account. In this case even large loops seem to be limited to shallow investigations.

References

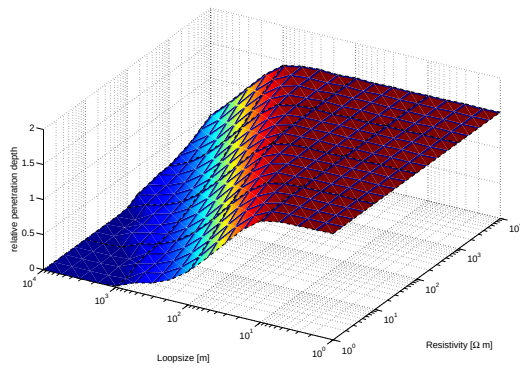
- [1] Martina Braun, Marian Hertrich, and Ugur Yaramanci. Complex inversion of MRS data. *Near Surface Geophysics (accepted)*, 2004.
- [2] Sven Friedel. Resolution, stability and efficiency of resistivity tomography estimated from a generalized inverse approach. *Geophysical Journal International*, 153:305–316, 2003.
- [3] Marian Hertrich, Martina Braun, and Ugur Yaramanci. Magnetic resonance soundings with separated transmitter and receiver loops. *Near Surface Geophysics*, 3(3):141–154, August 2004.
- [4] Bernd Hofmann. *Mathematik inverser Probleme*. B.G. Teubner Stuttgart Leipzig, 1999.
- [5] A. Legchenko, Jean-Michel Baltassat, Alain Beauce, and Jean Bernard. Nuclear magnetic resonance as a geophysical tool for hydrogeologists. *Journal of Applied Geophysics*, 50(1-2):21–46, 2002. Special Issue.
- [6] A. Legchenko and O. Shushakov. Inversion of surface NMR data. *Geophysics*, 63(1):75–84, 1998.



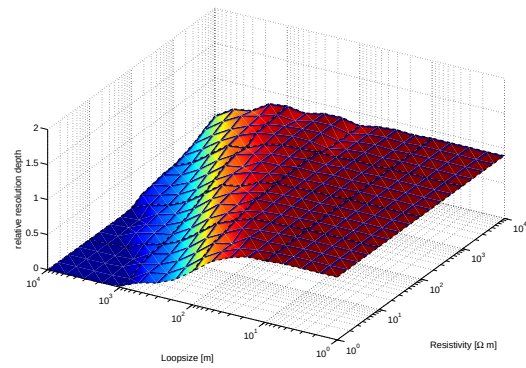
(a) penetration depth



(b) resolution depth



(c) relative penetration depth



(d) relative resolution depth

Figure 5: Influence of different loop sizes and resistivities to maximum penetration and resolution depth where relative means normalized to the loop diameter.

Zeitreihenauswertung von NMR Messungen im Erdmagnetfeld

Tino Radić (Berlin)

www.radic-research.de

Einleitung

Die NMR (Nuclear Magnetic Resonance) Methode ist in den letzten 10 Jahren zum festen Bestandteil des geophysikalischen Messrepertoires geworden. Nicht zuletzt weil sie eine zerstörungsfreie Bestimmung von Porenradienverteilungen und Wassergehalten von Gesteinen des Untergrundes ermöglicht.

Dabei haben sich zwei Haupteinsatzfelder haben sich etabliert:

1. Messungen an Laborproben bei mittleren und hohen Magnetfeldstärken (0.01 - 7 T)
2. Tiefensondierende (SNMR) Feldmessungen im schwachen Erdmagnetfeld (50 μ T)

Interessanterweise klafft zwischen beiden Einsatzfeldern eine große Lücke. So fehlten bisher Messgeräte für:

- SNMR Messungen mit Spulendurchmesser <10 m,
- Messungen an Probenmaterial im Erdmagnetfeld

Hiermit ließen sich:

- Probenmaterialien bei der gleichen Feldstärke vermessen wie der Untergrund (SNMR)
- Probenmaterialien im Gelände vermessen, ohne Transportschäden zu riskieren
- die vadosen Zonen des oberflächennahen Untergrundes erkunden

Verantwortlich für diese Situation sind vor allem messtechnische Probleme. So sind in diesen Fällen einerseits die Signalamplituden sehr klein und andererseits die natürlichen und, vor allem in dicht besiedelten Gebieten, technischen Störsignalpegel vergleichsweise sehr groß.

Bedauerlicher Weise erlauben die verfügbaren NMR Messgeräte (NUMIS, HydroScope) keine Aufzeichnung der primären Zeitreihen, so das eine gezielte Störsignalanalyse und Unterdrückung bisher nicht möglich ist. Im Folgenden wird daher eine neu entwickelte NMR Messapparatur vorgestellt, die es erlaubt solche Zeitreihen im Erdmagnetfeld aufzuzeichnen und eine NMR spezifische Zeitreihenanalyse durchzuführen. Das modulare Messgerät kann sowohl zu Messungen an Probenmaterialien (Radić, 2005), als auch zu SNMR Messungen mit kleinen Spulendurchmessern verwendet werden. Letzteres stellt besonders hohe Anforderungen an die Messtechnik und die Zeitreihenverarbeitung und ist Gegenstand nachfolgenden Erfahrungsberichtes.

Grundprinzip der NMR Messung

Grundlage der NMR Methode sind die kernmagnetischen Spins der Atome. In der Geophysik spielen vor allem die ^1H Wasserstoffprotonen eine dominante Rolle, da sie wichtiger Bestandteil des Porenraumfluids (Grundwasser evtl. mit Kohlenwasserstoffen kontaminiert) sind. Die Spins sind im Ruhezustand parallel zum Erdmagnetfeld B_E orientiert. Mittels eines zusätzlichen künstliche Feldes können sie jedoch ausgelenkt werden. Wird dieses Feld abgeschaltet, dann benötigen sie bis zu einigen Sekunden um in ihre Ruhelage zurückzukehren. Dieser Relaxationsvorgang ist begleitet von einer Präzessionsbewegung der Spins im Erdmagnetfeld. Die charakteristische (Larmor) Frequenz f_0 ist nur von der Feldstärke abhängig und beträgt im Erdfeld etwa 2 kHz (Gln. 1).

$$2\pi f_0 = \gamma_p B_E \quad \gamma_p = 0.267 \cdot 10^9 \text{ Hz/T} \quad ^1\text{H Larmor Frequenz} \quad (1)$$

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2^*}} \quad \text{Free Induction Decay (FID)} \quad (2)$$

Mit Gleichung 2 kann der FID mathematisch beschrieben werden. Das Signal kann mit einer Induktionsspule gemessen werden. Seine Anfangsamplitude E_0 ist direkt proportional zur Protonendichte und damit zum Wassergehalt im Boden bzw. im Probengestein. Freies

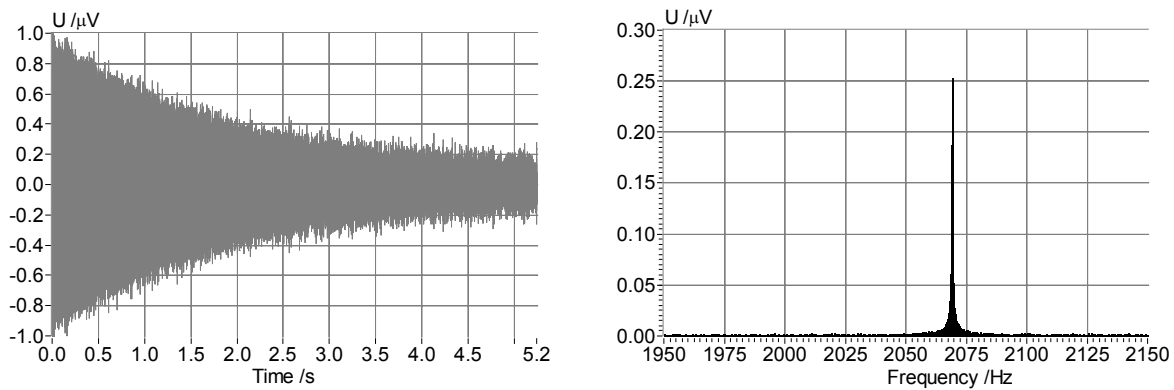


Abb. 1: Im Erdmagnetfeld an 120 ml Wasser gemessener FID. Links: Zeitreihe, rechts: Spektrum. Technische Information zum Messgerät: www.radic-research.de/nmr-mini.html.

Wasser weist eine Relaxationszeit von bis zu 3 Sekunden auf. Befindet sich das Wasser hingegen in einem engporigen Gestein, dann ist die Relaxationszeit (T_2) vermindert und lässt so Rückschlüsse auf die Porenradienverteilung zu (Mohnke et al., 2004). Allerdings beeinflusst auch die Viskosität, sowie der Gehalt an gelösten paramagnetischen Salzen (meist Schwermetallsalze) die Relaxationszeit (Radić, 2005).

Abbildung 1 zeigt exemplarisch den an einer Wasserprobe registrierten Relaxationsvorgang.

Tiefensondierende SNMR Methode

Die NMR Methode kann auch im Feldmaßstab eingesetzt werden. Abbildung 2 zeigt die hierbei am häufigsten verwendete Spulenkonfiguration. Die Anregungs- (rot) und die Empfangs Loop (schwarz) werden ebenerdig ausgebracht und haben bisher einen Durchmesser von 20-100 m. Bei Stromstärken von bis zu 200 A werden Anregungsfeldstärken von $\sim 1 \mu\text{T}$ erreicht, was 2%

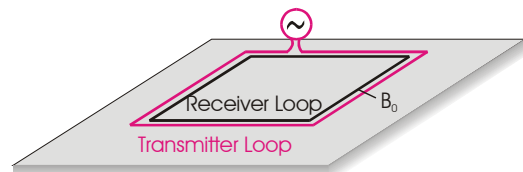


Abb. 2: Typische SNMR Messkonfiguration.

der Stärke des Erdmagnetfeldes entspricht. Die Protonenauslenkung erfolgt mittels resonanter Anregung. Hierzu wird ein vertikal orientiertes monofrequentes magnetisches Feld erzeugt, dessen Frequenz mit der aktuellen, lokalen Larmor Frequenz übereinstimmen muss. Nach etwa 40 ms (~ 80 Perioden) sind ein Teil der Protonen des Untergrundes um 90° aus ihrer ursprünglichen Richtung ausgelenkt. Dieser Teil liefert den größten Beitrag zum FID Signal, das nach dem Ende der Anregung registriert werden kann. Bei einer hohen Anregungsstromstärke liegt der Bereich mit 90° Auslenkung in einer größeren Tiefe, als bei einer niedrigen Stromstärke. Diese Eigenschaft der SNMR Methode erlaubt es, in Verbindung mit einer Inversionsrechnung, eine quantitative Tiefenaussage zu treffen.

Die Anfangsamplitude E_0 des FID ist mit einigen 10 fT etwa um 8 Größenordnungen kleiner als die Anregungsamplitude. Setzt man diesen Pegel in Relation zu den bei ~ 2 kHz auftretenden natürlichen und technisch bedingten meist räumlich kohärenten Störsignalpegeln, dann gelangt man häufig zu S/R-Verhältnissen $\ll 1$. Die Datenqualität ist in diesen Fällen unbefriedigend.

Minderung kohärenter Störsignale

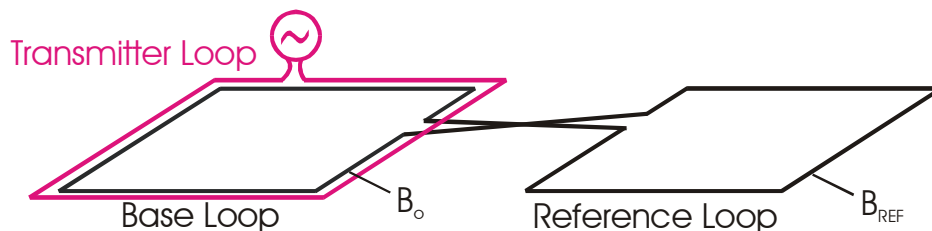
Zur Erhöhung des S/R Verhältnisses empfiehlt der Hersteller der NUMIS Apparatur (IRIS Instruments) eine „8 shaped loop“ (Abb. 3a) zu verwenden. Hiermit lässt sich ein homogenes Störfeld vollständig unterdrücken. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass der Grad der Verbesserung nicht selten trotzdem noch unzureichend ist, zeitlich variiert und zudem von Messpunkt zu Messpunkt sehr unterschiedlich ausfällt.

Erklären lässt sich dies, wenn man die Eigenschaften von elektromagnetischen Feldern in Gegenwart eines elektrisch leitenden Untergrundes berücksichtigt.

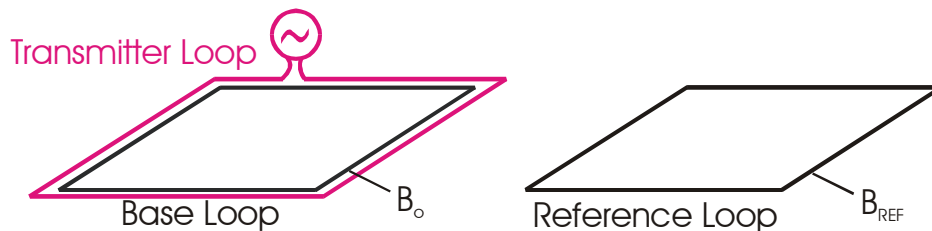
- Ein Störsignal am Ort der Basis Loop ist im allgemeinen nicht identisch mit dem am Ort der Referenz Loop. So verzerren Leitfähigkeitsinhomogenitäten im Untergrund das ursprünglich evtl. homogene Störfeld. Im Nahfeld nimmt zudem die Geometrie der Störquelle Einfluss auf die Störfeldgeometrie.
- Ein Störsignal am Ort der Basis Loop muss nicht zwingend trivial mit dem am Ort der Referenz Loop korreliert sein. Häufig setzt sich das Störfeld aus mehreren unabhängigen Komponenten zusammen. Im allgemeinen sind die Beiträge der einzelnen Störkomponenten an der Basis- und an der Referenz Loop unterschiedlich groß und heben sich daher nicht wechselseitig auf. In ungünstigen Fällen kann sich sogar der Pegel des Störsignals, bei Verwendung einer „8 shaped loop“, erhöhen.

Offensichtlich muss die Referenztechnik flexibler angewandt werden, um den in der Praxis auftretenden komplexeren Verhältnissen gerecht zu werden. In Abbildung 3b wird der Fall einer unabhängigen Referenz Loop wiedergegeben. In Verbindung mit einem zusätzlichen eigenständigen Messkanal eröffnet dies die Möglichkeit auch dann ein Störsignal effektiv zu unterdrücken, wenn sich die Amplituden und Phasen an beiden Orten unterscheiden. Hierzu ist eine univariate Ausgleichrechnung erforderlich, die im Ergebnis die Übertragungsfunktion des Störfeldes zwischen den beiden Orten ermittelt. Noch universeller ist die Verwendung zweier Referenz Loops die die beide Komponenten des horizontalen Magnetfeldes messen (Abb. 3c).

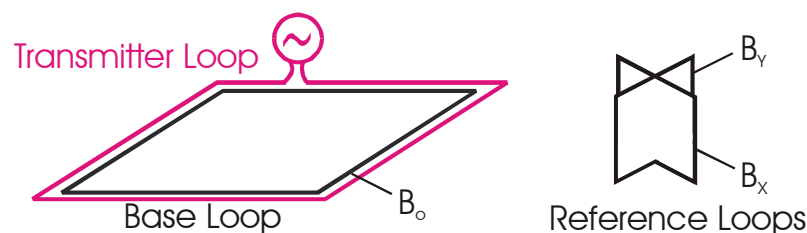
Man könnte die Übertragungsfunktion vor der NMR Messung bestimmen und dann bei der nachfolgenden NMR Messung verwenden um, wieder mit Hilfe der Referenzkanäle, das Störsignal an der Basis vorherzusagen und abzutrennen. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass die Übertragungsfunktion zumindest für diesen Zeitraum konstant ist. Entsprechende Versuche wurden erfolgreich durchgeführt. Eine etwas schnellere Methode besteht darin, die Übertragungsfunktion allein aus der NMR Messung zu bestimmen. Grundlage hierfür sind die



(a) 8 shaped loop (NUMIS)



(b) Unabhängige Referenz Loop



(c) Allgemeine Referenztechnik

Abb. 3: Spulenkonfigurationen zur Unterdrückung räumlich kohärenter Störsignale.

B_0 :	Gemessenes Gesamtsignal an der Basis Loop
B_0^N :	Vorhersagbarer Signalanteil in B_0
δB_0 :	Nicht vorhersagbarer Signalanteil in B_0
B_{FID} :	NMR Signal in B_0
B_X :	X-Komponente des Störsignals an der Referenz Loop
B_Y :	Y-Komponente des Störsignals an der Referenz Loop
T_X :	X-Komponente der Übertragungsfunktion des mag. Störfeldes
T_Y :	Y-Komponente der Übertragungsfunktion des mag. Störfeldes

synchron registrierten Zeitreihen: $B_0(t)$, $B_X(t)$, $B_Y(t)$. Von $B_0(t)$ erwarten wir, dass es sich aus drei Anteilen zusammensetzt:

1. dem gesuchten NMR Signal B_{FID} ,
2. einem räumlich kohärenten Störsignal B_0^N und
3. einem nicht vorhersagbaren Störsignal δB_0

Die an den beiden Referenzstationen registrierten Signale sollten sich idealer Weise nur aus Anteilen des räumlich kohärenten Störsignals zusammensetzen. Zur Vorhersage der Störsignalanteile an der Basis bietet sich die bivariate Ausgleichsrechnung an. Die bivariate Ausgleichsrechnung wird in der magnetotellurischen Zeitreihenanalyse häufig genutzt, daher sei hier der verwendete lineare Ansatz nur skizziert (Gln 3).

$$B_0 = T_X B_X + T_Y B_Y + \delta B_0 \quad (3)$$

Die Übertragungsfunktion (T_X , T_Y) des Störsignals ist eigentlich nur ein Nebenprodukt, dass zwar mit dem magnetotellurischen Tipper identisch ist, im Zusammenhang mit der NMR-Messung jedoch nicht von unmittelbarer Bedeutung ist.

Im nächsten Schritt werden die vorhersagbaren Störsignalanteile von B_0 abgetrennt (Gln. 4).

$$B_{FID} + \delta B_0 := B_0 - (T_X B_X + T_Y B_Y) \quad (4)$$

Der verbleibende Rest enthält das gesuchte, mehr oder minder verrauschte, Nutzsignal B_{FID} . Damit diese Vorgehensweise zulässig ist, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Das NMR Signal muss an der Referenz Loop vernachlässigbar klein sein,
2. Das NMR Signal muss an der Basis Loop klein gegen das Störsignal sein.

Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn die Referenz Loop hinreichend weit von der Basis Loop entfernt ist. Die zweite Bedingung ist meistens erfüllt, wenn a) die technische Störfelder gegenüber den natürlichen dominieren und b) die Registrierung deutlich länger andauert als das exponentiell abklingende NMR Signal. Typische T_2^* Abklingzeiten betragen einige 100 ms. Sollten die Bedingungen nicht erfüllt sein, dann ist die NMR Amplitude systematisch verfälscht.

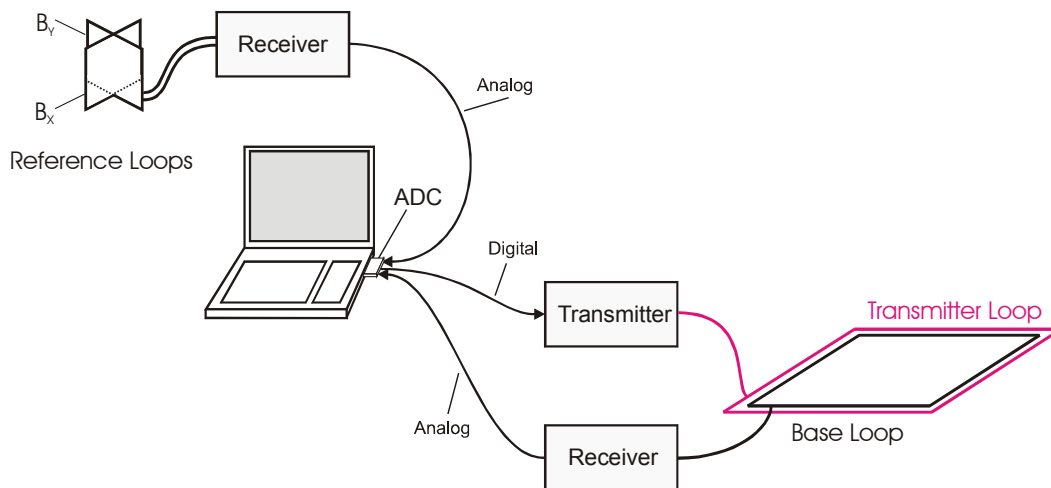


Abb. 4: Blockbild der für die Feldversuche benutzten Hardware (NMR-MIDI).

„NMR-MIDI“ - Hardware zur SNMR Tiefenerkundung

Das Blockbild in Abbildung 4 zeigt die von uns für die SNMR Messungen verwendete Hardware. Das modulare Messsystem besteht aus einem Steuerrechner (Notebook), einem SNMR Transmitter, sowie drei eigenständige Messkanäle. Jeder dieser Messkanal verstärkt, filtert und digitalisiert die Signale einer angeschlossenen kernlosen Induktionsspule. Zur Digitalisierung wird eine PCMCIA AD-Wandlerkarte mit 16 Bit Auflösung und je 60 kHz Abtastrate eingesetzt.

Die quadratische Basis Loop weist eine Kantenlänge von 10 Metern auf. Bei 10 Windungen ergibt sich so eine Empfangsfläche von 1000 m². Entsprechend Abbildung 3c sind die beiden Referenzspulen (Abb. 5) so orientiert, dass sie die beiden Horizontalkomponenten des Störsignals empfangen. Sie verfügen derzeit über je 105 Windungen und messen 1 m x 1 m. Der Abstand zwischen der Basis und der Referenz Loops beträgt derzeit 30 Meter.

Feldtest am Standort Nauen

Für den im folgenden vorgestellten Feldtest wurde der etwa 40 km westlich von Berlin gelegene Standort Nauen gewählt. Der Standort wird seit mehreren Jahren vom geophysikalischen Institut der TU Berlin (Arbeitsgruppe Prof. Yaramanci) für vielfältige methodische Untersuchungen genutzt. Seit etwa 2004 werden die SNMR Messungen (NUMIS Apparatur) jedoch durch die angestiegenen Störpegel der nur 3 km entfernten ICE Bahntrasse stark erschwert.

Abbildung 6 zeigt exemplarisch die bei einer NMR Messung registrierten drei Zeitreihen. Während der ersten 40 ms ist das Messsignal vom Anregungssignal (hier 2092.93 Hz) überlagert. Da für die Zeitreihenanalyse nur der Zeitraum nach dem Ende der Anregungsphase bedeutsam ist, können die ersten 55 ms der Registrierungen entfernt werden. 15 ms hiervon dienen als Sicherheitsabstand zum Anregungssignal, um zu gewährleisten, dass dieses vollständig abgeklungen ist.

Die Darstellungen in Abbildung 6 geben die Spannungspegel an den drei Loops wieder. Berücksichtigt man, dass die Basis Loop eine 10-fach größere Empfindlichkeit aufweist als die Referenz Loops, dann folgt

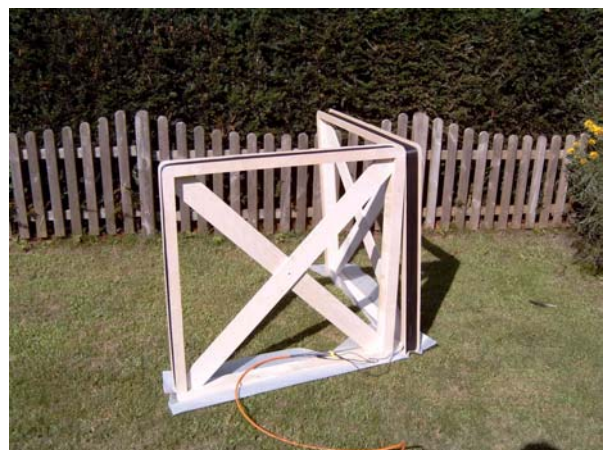


Abb. 5: Referenz Spulen zur Messung der beiden Horizontalkomponenten des magnetischen Störfeldes.

hieraus, dass das Störfeld (wie erwartet) nahezu horizontal orientiert ist.

Abbildung 7 (unten) gibt das Amplitudenspektrum des mit der Basis Loop gemessenen Signals wieder. Es zeigt sich, dass es sich vor allem aus technische Störspannungen zusammensetzt - erkennbar an den charakteristischen Oberwellen von 50 Hz und $16^{2/3}$ Hz. Ein analoger Bandpass Filter unterdrückt Signalanteile unterhalb von 1 kHz und oberhalb von 3 kHz.

Das Ergebnis der bivariaten Ausgleichsrechnung ist in Abbildung 7 (mitte) als Zeitreihe und darunter als Amplitudenspektrum (rot) wiedergegeben. Dieses Signal ist etwa 20-fach kleiner als das ursprünglich gemessene Signal. Offensichtlich setzte es sich zu mindestens 95 % aus kohärentem Noise zusammen.

Leider war der Störsignalpegel immer noch zu hoch um das Nutzsignal erkennen zu können. Aus diesem Grund wurde die Messung mehrfach wiederholt und die mittels der Referenztechnik verbesserten Zeitreihen gestapelt. Ein Stapeln ist möglich, da das NMR Signal im Gegensatz zu den Störsignalen zeitlich konstant und mit dem Anregungssignal synchronisiert ist. Die Larmor Frequenz variierte während der gesamten Messung in Nauen um weniger als 0.5 Hz. Eine vier Sekunden andauernde Einzelmessung, einschließlich der zugehörigen Ausgleichsrechnung, dauert etwa 10 Sekunden (Toshiba Tecra, 2.0 GHz).

Abbildung 8 (rot) zeigt das Ergebnis nach 16-fachem Stapeln. Tatsächlich kann bei der Larmor Frequenz jetzt ein eindeutiges Amplitudenmaximum beobachtet werden. Zum Vergleich ist das Amplitudenspektrum einer unbearbeiteten Einzelmessung dargestellt. Da das NMR Signal (FID) exponentiell abklingt, ist es in diesem Fall nur während der ersten 400 ms nachweisbar. Abbildung 9 zeigt diesen Zeitabschnitt nach einer Bandpassfilterung. Erst die BP-Filterung lässt das exponentiell abklingende NMR Signal (FID) auch im Zeitbereich sichtbar werden.

Der letzte Bearbeitungsschritt dient der quantitativen Auswertung des NMR Signals. Mittels einer Abschnittweisen Kreuzkorrelation mit einem larmorfrequentem Sinussignal wird dessen zeitabhängige Amplitude berechnet. Die sich so ergebende Hüllkurve kann mit einer Exponentialfunktion angepasst werden. Hierzu wurde ein Levenberg Marquardt Algorithmus verwendet. Die ermittelten NMR Parameter (Abb. 9) stimmen in etwa mit den von der TU-Berlin in Nauen gemessenen überein (Yaramanci, 2004). Abweichungen, wie die niedrigere Amplitude und die kürzere Relaxationszeit, rühren wahrscheinlich daher, dass ein kleinerer Loop Durchmesser verwendet wurde und die Schwerpunktstiefe folglich flacher lag, nämlich teilweise schon in der vadosen Zone.

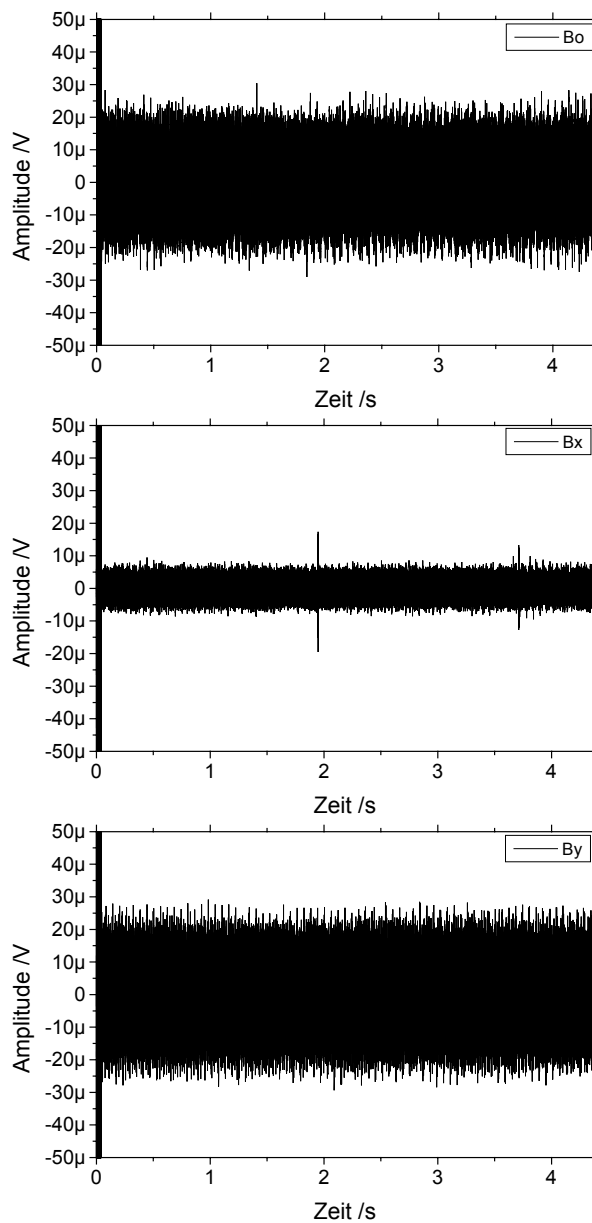


Abb. 6: Registrierbeispiel vom Standort Nauen. Die ersten 40 ms sind vom Anregungssignal (2092.93 Hz) überlagert.

Datum: 22.2.2006
 Datensatz: m3.dat
 Messwerte: 262144

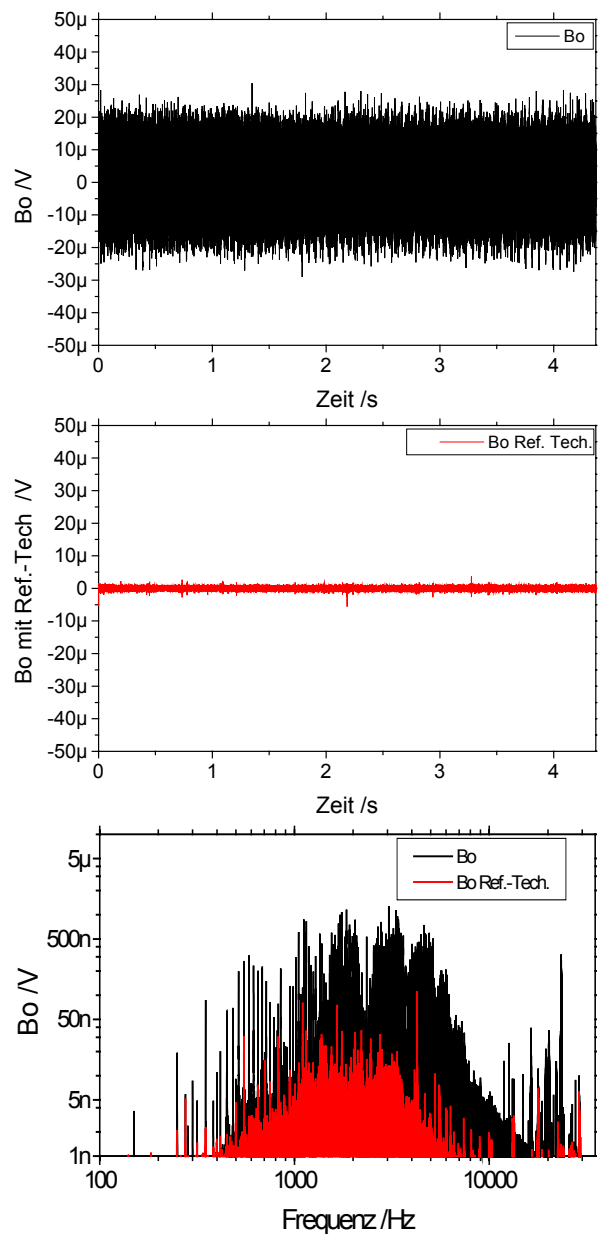


Abb. 7: Analyse der Zeitreihen aus Abb. 6. Mitte: Zeitreihe der Basis nach Beseitigung der mittels der Referenzkanäle vorhersagbaren Störsignalanteile. Unten: Amplitudenspektren der oberen und mittleren Zeitreihe.

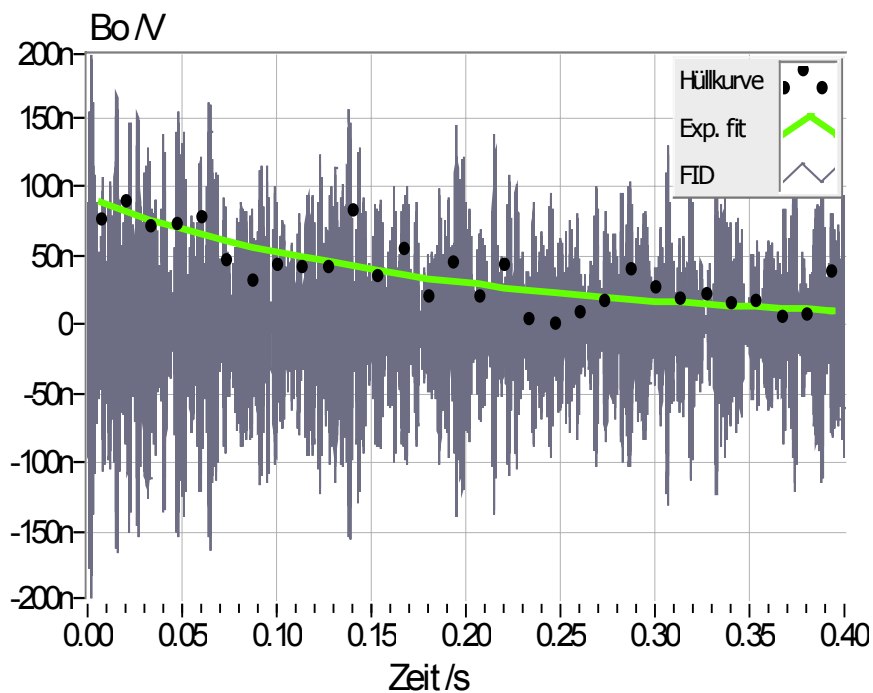
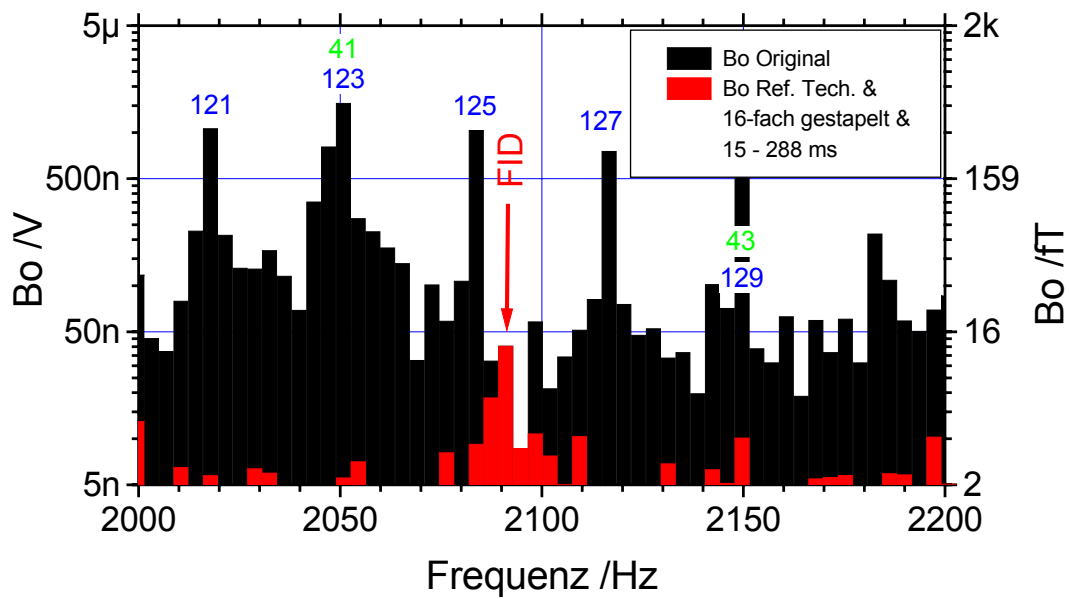


Abb. 9: FID aus Abbildung 8. Die Messdaten wurden bandpassgefiltert: 1.8-2.4 kHz. Die Parameter der am besten angepassten Exponentialfunktion (Gln.2) lauten:

$E_0=101$ nV, $T_2^*=180$ ms.

Diskussion und Ausblick

Einerseits verbessert die Referenztechnik die Datenqualität ohne zusätzlichen Messzeitaufwand um 1-2 Größenordnungen, andererseits stellt sie aber auch einen erheblichen Eingriff in die an der Basis gemessene Zeitreihe dar. So kann die versehentliche Missachtung der genannten Voraussetzung für die Anwendung der hier beschriebenen Referenzmethode zu erheblichen systematischen Fehlern und damit zu völlig unsinnigen Ergebnissen führen. Es ist, aufgrund des sehr hohen Zeitbedarfs, leider nur ausnahmsweise möglich das Ergebnis allein mit Hilfe des viel übersichtlicheren Stapelns zu verifizieren. Zur Überprüfung könnte aber die etwas zeitaufwendigere Referenztechnik dienen, bei der die Störsignalübertragungsfunktion vor der NMR Messung bestimmt wird.

Bisweilen überlagern sehr amplitudenstarke Gewitter-Spikes die Zeitreihen, und stören sowohl die Referenztechnik als auch den Stapelungsprozess erheblich. Ein Selektionsalgorithmus der gestörte Zeitreihen sicher erkennt erscheint daher zukünftig unverzichtbar.

Als nächstes Ziel wird natürlich die Messung von Sondierungskurven angestrebt. Sondiert wird, indem die FID Messung, bei konstanter Loop Konfiguration, mit verschiedenen q-Werten (Produkt aus Stromstärke und Anregungsdauer) wiederholt wird. Dieser Datensatz muss dann invertiert werden. Hierzu stehen mittlerweile ein- und mehrdimensionale Inversionsprogramme zur Verfügung (Mohnke 1999, Hertrich 2005). Das Inversionsergebnis erlaubt dann eine tiefenabhängige lithologische Aussage.

Notwendig erscheint es auch, die Messergebnisse an einem sehr genau bekannten Objekt zu verifizieren. Ein Süßwassergewässer (geringer Skineffekt) mit hinreichender Wassertiefe wäre hierfür bestens geeignet. So beträgt die Wassersättigung bekanntermaßen 100%, die Relaxationszeit 2-3 Sekunden und es ist keine Inversionsrechnung erforderlich, da der Untersuchungsgegenstand hinreichend homogen ist.

Literatur

- Hertrich, M. (2005): Magnetic Resonance Sounding with separated transmitter and receiver loops for the investigation of 2D water content distributions. Dissertation, Inst. für Geophysik, TU Berlin.
- Mohnke, O. (1999): Entwicklung und Anwendung eines neuen Inversionsverfahrens für Oberflächen-NMR Sondierungen. Diplomarbeit, Inst. für Geophysik, TU Berlin.
- Mohnke, O., Braun, M. and Yaramanci, U. (2004): Inversion of decay time spectra from Surface-NMR data. Proceedings of 7th European Meeting on the Environmental and Engineering Geophysics. Birmingham, Great Britain, ed. EEGS-ES.
- Radić, T. (2005): Mobile instrument for NMR measurements on samples in the Earth's magnetic field. Extended Abstracts of the 11th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, P034, Palermo, Italy.
- Weichmann, P.B., Lavelly, E.M. and Ritzwoller, M.H. (2000): Theory of surface nuclear magnetic resonance with applications to geophysical imaging problems. Physical Review E, Vol. 62, Number 1, 1290-1312.
- Yaramanci, U. (2004): New technologies in groundwater exploration. Surface Nuclear Magnetic Resonance. Geologica Acta, Vol. 2, No2, 2004, 109-120.

Applications of the Triple-grid Technique to the Inversion of DC Resistivity Data

Thomas Günther¹ & Carsten Rücker²

¹Leibniz Institute for Applied Geosciences, Hannover, Germany

²Institute of Geophysics and Geology, University of Leipzig, Germany

Abstract

We present our triple-grid technique for the inversion of direct current (dc) resistivity data from a users point of view. It makes use of unstructured tetrahedral or triangular meshes and the finite element method. Three meshes are used: a parameter mesh describes the modeling domain. The forward calculation is done on the secondary field mesh, whereas the primary potentials are obtained by a nonrecurring simulation on a refined primary mesh. By the latter we are able to separate the effect of the topography and the subsurface. We exemplify this by a 2-d profile measurement across a waste dump.

Unstructured grids prove to be particularly efficient for geometry or large geometry contrasts. The Plesse castle shows heavy topography in form of an altitude jump. On the Cuxhaven site a lot of dc soundings have been made with electrode separations varying from 0.5 m to 5000 m. We show that the technique can also be applied to closed geometries in form of a tree section. All these problems cannot be treated by structured grids since the geometry would cause the inverse problem too big.

An important issue is the incorporation of a-priori information into the inversion. The inversion of underwater data shows how the existing geometry can be involved in the technique. A second example treats the combination of different methods. The knowledge of a layer boundary from refraction seismics is used to obtain a much clearer image of the subsurface.

Introduction

The rapid development of multi-electrode devices allows for efficient investigation of the subsurface in three dimensions. 3-d inversion algorithms have been presented by Park and Van (1991) or Ellis and Oldenburg (1994) using the Gauss-Newton method or conjugated gradients, respectively. The forward calculation is done by finite differences (Zhang et al., 1995) or finite elements (Sasaki, 1994). The latter is able to involve topography (Yi et al., 2001; Pain et al., 2003). However, the use of structured grids restricts the complexity of the surface. Moreover, it produces unnecessarily much free parameters.

We present an approach using unstructured tetrahedral or triangular meshes. Firstly it allows for a resolution-dependent parameterization which helps to keep the problem small. The forward calculation is done by a secondary potential method (Coggon, 1971) with finite elements. For details on the forward and inverse procedure we refer to (Rücker et al., 2006) and Günther et al. (2006), respectively.

The generalized inversion scheme is displayed in Fig. 1. We used the topographical information for generating the three meshes. First, the primary potentials are calculated and used to derive the apparent resistivities. In the inversion loop (rectangle) the model is changed until convergence is reached.

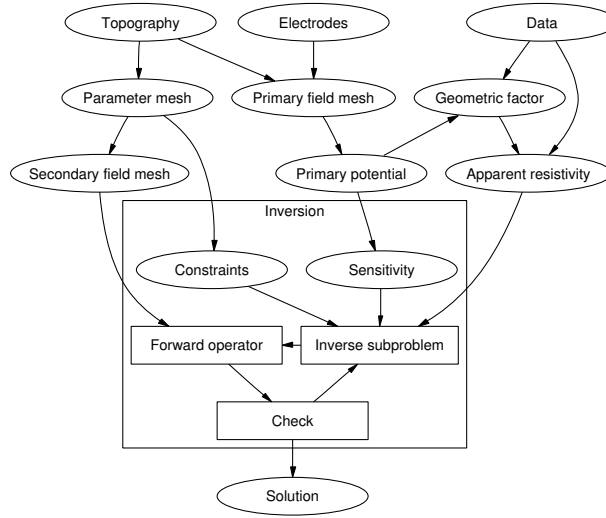


Figure 1: Inversion scheme of the triple-grid inversion

Demonstration of the technique

The following data are descended from the investigation of an abandoned mining dump. We regard one of the profiles across the dump with 5 m electrode distance. A Wenner pseudo-section has been measured to investigate the function of the hard pan as sealing layer and the interior of the dump.

Figure 2 shows the three meshes used in inversion. They all describe the topography of the 14 m high and 65 m broad dump. The parameter mesh (a) is included in the secondary field mesh (b), whereas the primary field mesh (c) is an independently obtained refined mesh.

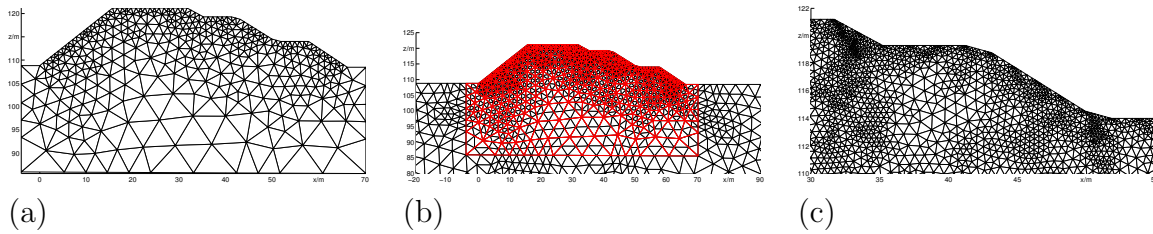


Figure 2: The three meshes of inversion, (a) the parameter mesh, (b) the secondary field mesh and (c) a section of the primary field mesh

In Fig. 3 we study the effect of the topography. First we use the analytical (flat-earth) geometric factor for determining the apparent resistivities (a). We see anomalies but can not distinguish if they are due to topography or subsurface. In (b) the pure topography effect is displayed showing similar structures as in (a), particularly at the topographical edges. Finally, (c) displays the apparent resistivities obtained by simulated geometric factors. The anomalies are much weaker and not affected by the topography anymore.

The final inversion result is imaged in Fig. 4. We observe a resistive hard pan with varying thickness. In the interior the dump body shows up with low resistivities.

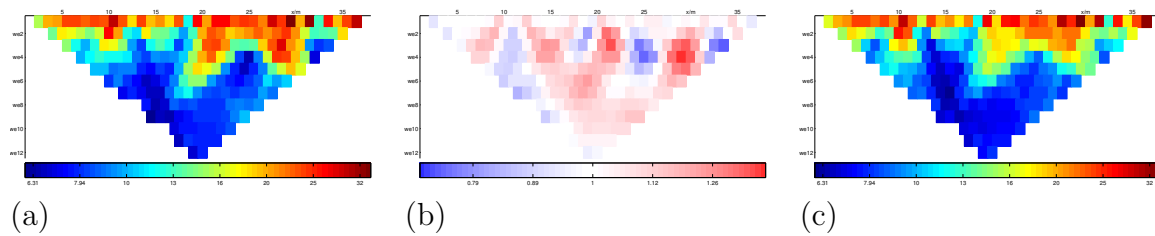


Figure 3: Topography effect: apparent resistivities with analytical geometric factors (a), simulated geometric factors (c) and pure topography effect (b)

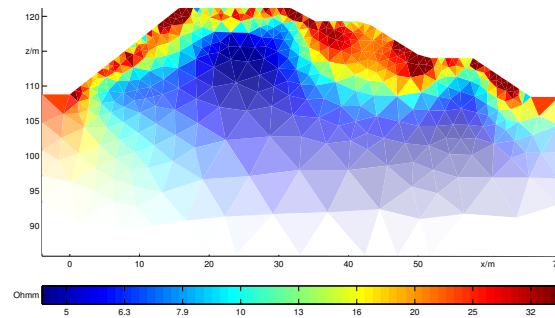


Figure 4: Inversion result showing the resistive hard pan and the conductive interior of the dump

Geometric flexibility

Steep topography - Plesse Castle

The Plesse Castle is a popular castle near Göttingen. Archaeologists search for an ancient well in the inner ward which is investigated by dc resistivity measurements. Figure 5 shows a photograph and the profile layout. The particular difficulty is a jump of up to 4 m in the topography on the ascent that cannot be handled by block-oriented grids.

All 9 profiles have an electrode distance of 1 m. As a compromise between resolution and signal strength we chose a combination of Wenner- α and - β data. The topography inside and outside the measuring area was recorded accurately. In Fig. 6 the final inver-

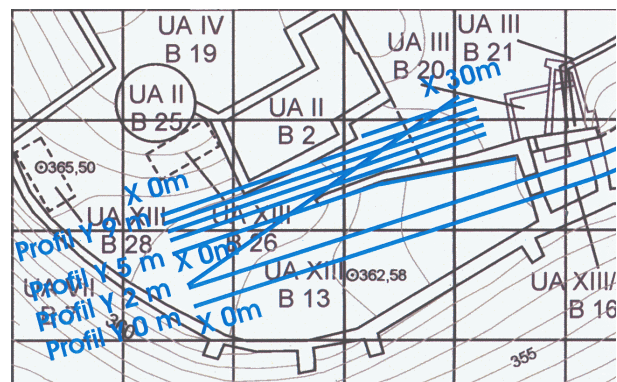


Figure 5: Photo (left) and profile layout (right) of the survey

sion result is shown in form of two iso-bodies of < 50 and $> 250\Omega\text{m}$. The walls at the boundaries and the existing vault behind the central wall show up by high resistivities. Also, beneath the tree on the upper plateau high resistivities are to be seen. Behind we see a large anomaly of low resistivity that we interpret as the well filled with loose material and a higher water content.

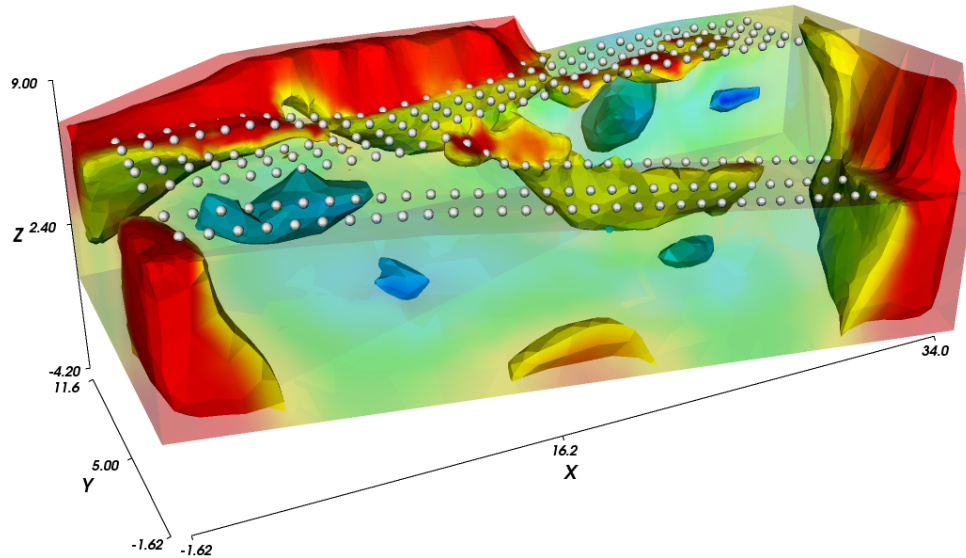


Figure 6: 3-d model of the inversion result

Geometry contrasts - Cuxhaven site

In the North Sea region glacial channels are present that have been built up by floated melting water. Since later being filled up with sediments the so-called Buried Valleys are important for groundwater questions. In the recent decades many geophysical investigations were made in order to investigate the structure of the valleys. So a lot of dc resistivity soundings with the (full or half) Schlumberger array have been measured in the region of a known buried valley near Cuxhaven. However, a one-dimensional interpretation is difficult because the underground is three-dimensional.

The problem of a 3-d inversion routine are the large geometric contrasts, generated by logarithmically growing electrode distances from 0.5 m up to 5000 m. Thus the huge area of $10 \times 12\text{ km}$ is covered very irregularly. A block-oriented discretization would create lots of parameter cells that can not be handled by a standard pc. With the presented approach the number of parameters could be restricted to 60 000.

The final model can be seen in Fig. 7 showing several sections and an iso-surface of $13\Omega\text{m}$. The cell sizes vary from a few meters at the sounding positions to kilometers near the boundary. At the surface, higher resistive sediments are present. In northeastern direction we see the conductive salt-water intruding from the north sea. In the southwestern part the course buried valley can be tracked.

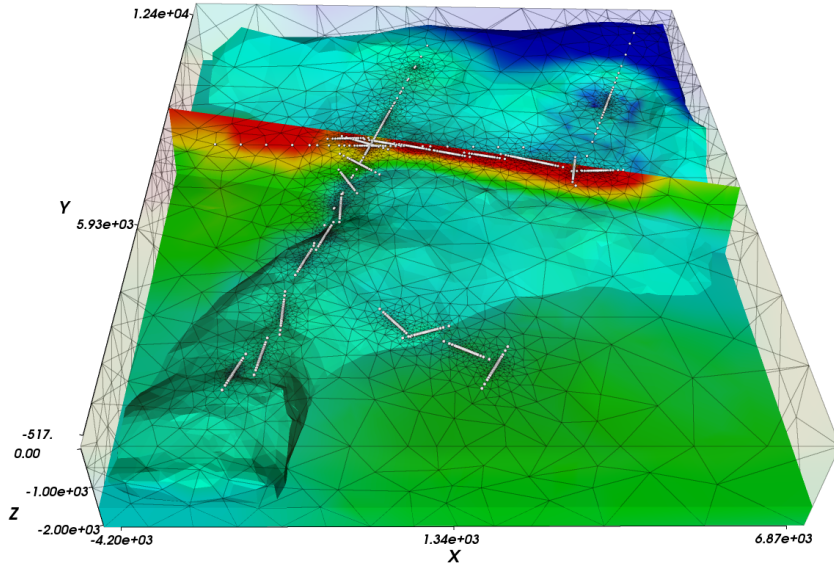


Figure 7: 3-d model of the inversion result

Tree tomography

Direct current resistivity measurements can also be applied to objects of closed geometry. A typical application is the investigation of trees by nondestructive impedance measurements. The resistivity can provide valuable information on the interior, e.g. about decay or damages.

Often the tree shape deviates from a simple circle and has thus to be incorporated. Figure 8 shows an example of a hollow lime tree that has been cut after the measurements. Thus, we are able to validate the inversion results.

The inversion may be extended to 3-d inversion by measuring on different levels. For example, it may be investigated how precipitation affects the resistivity in ground probes or a model tank.

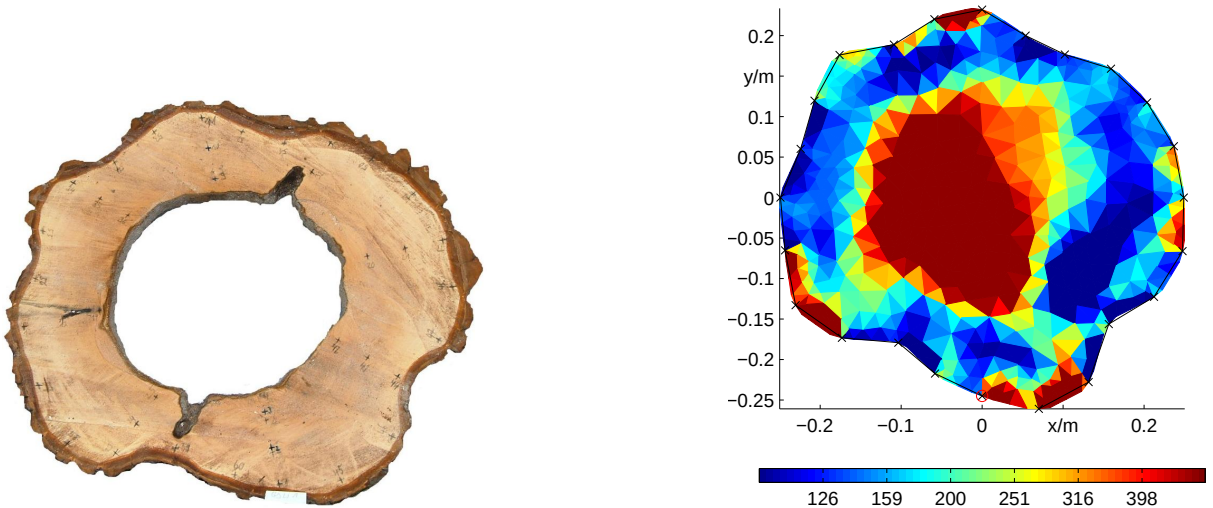


Figure 8: Section of the hollow lime tree (a) and inversion result (b) clearly showing the resistive anomaly

Sophisticated constraints

Underwater survey - Lake Feldungel

Underwater measurements are a challenge for both data acquisition and inversion. The course of the ground and the electrode positions have to be determined and introduced into the inversion algorithm. Also the water resistivity must be considered in the forward calculation. In our approach we include the water layer in the secondary mesh, but not in the parameter mesh.

The following example was measured in the Feldungel lake near Osnabrück. In the scope of the background of the Teutonian War archaeologists are interested in the ancient natural scenery. The lake has been formed by a depression and preserves the sedimentation history of the past 10 000 years.

We installed an electrode line with 2 m electrode distance on ground of the lake. A Schlumberger section and a Wenner- β section have been measured and used for the inversion. The water resistivity was assumed to be $22.5 \Omega\text{m}$ throughout the lake. Furthermore, we used this value as logarithmic barrier to restrict the resistivities to being above. Since we expect more or less layered structures, we used anisotropic constraints, i.e., the more the normal vector of the boundary edge tends vertical, the less weight is given on the individual constraint. The final result is displayed in Fig. 9.

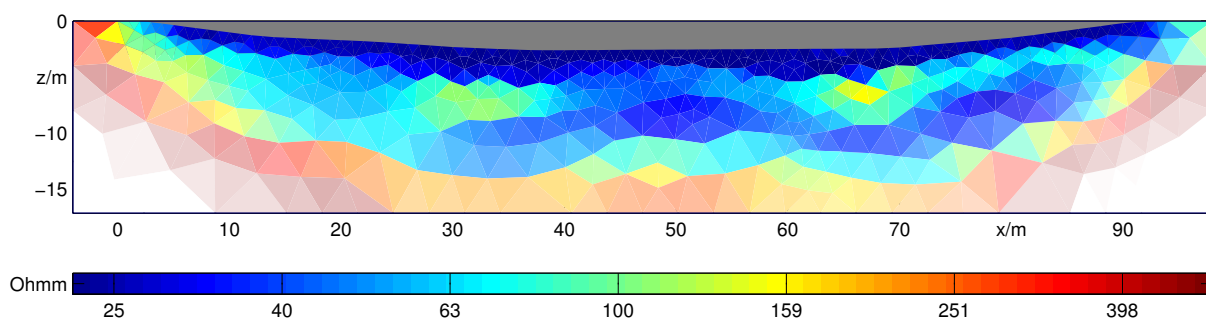


Figure 9: Inversion result of the Feldungel survey, the water (grey) is part of the forward meshes, but not of the parameter mesh

Directly below the ground we see resistivities similar to the water, since the mud has a high water content. In a depth of up to 14 m below the water table the surface of the depression can be observed. At medium depths we can see sedimentation structures that confirms the assumption of the lake being constituted of two part separated by a barrier before the water table rose.

Seismics-constrained inversion

In many investigations, geophysicists use different physical methods in order to control the ambiguity of the interpretation. Additional information, e.g. from bore holes or other data, can serve as soft or hard constraints. The following example was measured by the K-UTec GmbH, Sondershausen. Aim of the survey was to detect the top edge of the bedrock with seismic refraction and dc resistivity measurements. The refraction data exhibit good quality and have been interpreted by a two-layer case with varying layer boundary.

The resistivity data were inverted and displayed in Fig. 10 together with the refractor (left). Obviously the velocity boundary can be seen in terms of resistivity, too. Therefore we introduced the refractor as a known boundary in the model generation and allowed for sharp resistivity contrasts at these positions. The result is shown on the right side of Fig. 10.

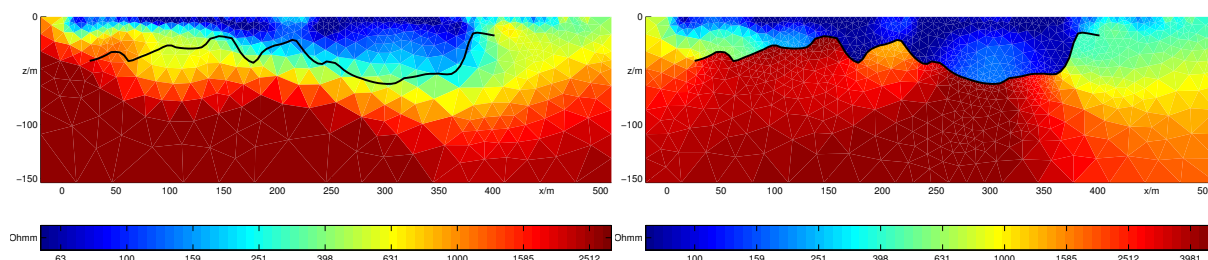


Figure 10: Inversion result without (left) and with (right) the refractor as known boundary

Now we obtain a much clearer image of the subsurface, particularly in the central part, where we have almost a two-layer case. On the right hand side the resistivity sees the bedrock at depth and does not accept the given boundary which is certainly too steep to be resolved. At the left hand side there might be an additional unit that is invisible in terms of velocity.

The proceeding may be extended to bore holes, where punctual layer boundaries help to obtain sharper images. An further improvement can be done by a combined tomography in form of a joint inversion.

Conclusions

We presented different applications for the triple-grid technique for dc inversion. They prove the great flexibility of integrating a complicating geometry by the use of unstructured tetrahedral or triangular meshes. The use of constraints will be formulated more general in order to allow for an easier use of a-priori information. A further improvement may be achieved by the use of inversion methods that avoid the storage of the Jacobian matrix, i.e. conjugated gradients (Ellis and Oldenburg, 1994) or quasi-Newton methods (Haber, 2005). The forward calculation is intended to apply an adaptive mesh refinement to increase accuracy. Finally, it should be analyzed, whether the methods can be carried forward to other geophysical methods or the joint inversion of different data.

Acknowledgments

For providing the field data we thank: U. Noell and M. Furche (BGR Hannover), E. Brost, J. Sauer and J. Schünemann (GGA Hannover), T. Schicht (K-UTec GmbH) as well as N. Hoffmann (HAWK Göttingen).

References

Coggon, J. H. (1971). Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics*, 36:132–155.

- Ellis, R. G. and Oldenburg, D. W. (1994). The pole-pole 3-d dc-resistivity inverse problem: a conjugate gradient approach. *Geophys. J. Int.*, 119:187–194.
- Günther, T., Rücker, C., and Spitzer, K. (2006). 3-d modeling and inversion of dc resistivity data incorporating topography - part II: Inversion. *Geophys. J. Int.*
- Haber, E. (2005). Quasi-newton methods for large-scale electromagnetic inversion problems. *Inverse Problems*, 21:305–323.
- Pain, C. C., Herwanger, J. V., Saunders, J. H., Worthington, M. H., and de Oliveira, C. R. E. (2003). Anisotropic resistivity inversion. *Inverse Problems*, 19:1081–1111.
- Park, S. K. and Van, G. P. (1991). Inversion of pole-pole data for 3-d resistivity structure beneath arrays of electrodes. *Geophysics*, 56:951–960.
- Rücker, C., Günther, T., and Spitzer, K. (2006). 3-d modeling and inversion of dc resistivity data incorporating topography - part I: Modeling. *Geophys. J. Int.*
- Sasaki, Y. (1994). 3-d resistivity inversion using the finite-element method. *Geophysics*, 59(12):1839–1848.
- Yi, M.-J., Kim, J.-H., Song, Y., Cho, S.-J., Chung, S.-H., and Suh, J.-H. (2001). Three-dimensional imaging of subsurface structures using resistivity data. *Geophys. Prosp.*, 49(4):483–497.
- Zhang, J., Mackie, R. L., and Madden, T. R. (1995). 3-d resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients. *Geophysics*, 60(5):1313–1325.

Ein Kontinent erwacht – Induktionsanomalien langperiodischer erdmagnetischer Variationen in Europa

Ulrich Schmucker, Göttingen

1. Normale und anomale Anteile der beobachteten Variationen

Induktionsanomalien sind örtlich begrenzte Anomalien erdmagnetischer Variationen inneren Ursprungs. Sie erzeugen einen so definierten *anormalen* Anteil ($\underline{B}_a$) des beobachteten Variationsfeldes ($\underline{B}$) im Einflussbereich von lateralen Änderungen der Leitfähigkeit bis zu maximalen Tiefen, welche der jeweiligen Eindringtiefe entsprechen. Sie bewirken insbesondere auffallende Anomalien (B_{az}) der Vertikalkomponente. Dort wo solche Anomalien fehlen, wird ein aus äußeren und inneren Anteilen gleichermaßen zusammengesetzter *normaler* Anteil $\underline{B}_n = \underline{B} - \underline{B}_a$ beobachtet, wobei Variationen der Vertikalkomponente (B_{nz}) auch über 1D Strukturen erscheinen. Da ihre Stärke bestimmt wird durch die Eindringtiefe im Verhältnis zu einer Skalenlänge für die räumliche Inhomogenität des Quellenfeldes, sind sie ein Merkmal lang-periodischer und damit tief eindringende Variationen.

Normale und anomale Variationen der Vertikalkomponente können getrennt oder gemeinsam für EM Sondierungen verwendet werden, indem man sie auf die Horizontalkomponenten bezieht, und zwar auf diejenigen des normalen Variationsfeldes (B_{nx}, B_{ny}) und nicht wie sonst üblich auf jene des Gesamtfeldes (B_x, B_y). In Abschnitt 5 wird ein kurzer Hinweis zur Bestimmung von B_{nx} und B_{ny} folgen. Die auszuwertenden linearen Beziehungen bezüglich von Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich lauten:

$$B_{nz} = C \cdot \left(\frac{\partial B_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{ny}}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$B_{az} = z_H B_{nx} + z_D B_{ny}, \quad (2)$$

$$B_z = B_{nz} + B_{az} = C \cdot \left(\frac{\partial B_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{ny}}{\partial y} \right) + z_H \cdot B_{nx} + z_D \cdot B_{ny}. \quad (3)$$

Gl. (1) ist die Grundgleichung des (Horizontal)-Gradienten Verfahren (HSG) zur Bestimmung der C-Response von 1D Strukturen, Gl. (2) diejenige der erdmagnetischen Tiefensondierung (ETS) zur Bestimmung der Übertragungsfunktionen z_H und z_D , Gl. (3) die Kombination beider Ansätze. Die Beziehung zur skalaren 1D-Impedanz magnetotellurischer Sondierungen (MTS) lautet $Z = i\omega C$, während in z_H und z_D die räumlichen Ableitungen der Elemente der tensoriellen Impedanz $\underline{\underline{Z}}^{TE}$ für das erdelektrische Feld in der TE Mode über 2D und 3D Strukturen enthalten sind.

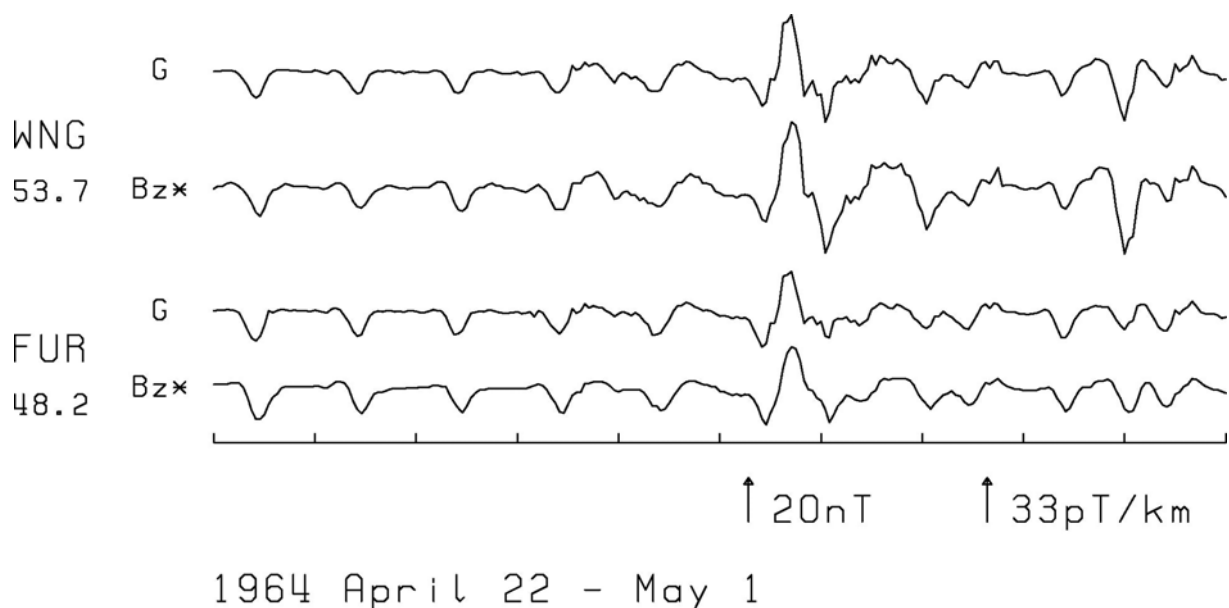
2. Frequenzabhängigkeiten

B_{nz} wird bestimmt durch die Eindringtiefe und wächst daher mit abnehmender Frequenz, eine gleich bleibende Strukturierung des induzierenden Quellenfeldes vorausgesetzt. Für Induktionsanomalien ist der örtlich veränderte Fluss großräumig induzierter Ströme verantwortlich, B_{az} wird also unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen bestimmt durch die elektrischen Tangentialkomponenten des Normalfeldes im Verhältnis zu seinen orthogonalen magnetischen Horizontalkomponenten, also durch die genannte 1D-Impedanz. Diese strebt mit abnehmender Frequenz gegen Null und Gleiches gilt für die Induktionsanomalien. Im Falle eines homogenen Halbraums für die Normalstruktur und $C \propto 1/\sqrt{\omega}$ klingt Z mit $\sqrt{\omega}$ ab, doch bewirkt die starke Zunahme der Leitfähigkeit im tieferen Erdmantel eine abgeschwächte Zunahme von C mit abnehmender Frequenz.

3. Normale und anomale Anteile langperiodischer Variationen

Die genannten gegenläufigen Frequenzabhängigkeiten von Z und C bewirken, dass zumindest außerhalb der Polarlichtzone für kurzperiodische Variationen (Pulsationen, Bays) der anomale Anteil das Erscheinungsbild von B_z prägt, während bei den langperiodischen Variationen (S_q, S_d) und (DS, D_{st}) der normale Anteil überwiegt. Nur im Fall extremer und oberflächennaher Leitfähigkeitsunterschiede, wie etwa an Meeresküsten, bleiben Induktionsanomalien bis zu Perioden von einem Tag und länger in den Magnetogrammen der Vertikalkomponente sichtbar.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die an zwei Observatorien in Nord- und Süddeutschland beobachteten Variationen der Vertikalkomponente für ein Zeitintervall von zehn Tagen, und zwar gemeinsam mit den für diese Observatorien berechneten Horizontal-Gradienten $G = \partial B_{nx} / \partial x + \partial B_{ny} / \partial y$. Es handelt sich dabei um die Observatorien FUR=Fürstenfeldbruck bei München und WNG=Wingst bei Hamburg. Die Skalierung ist so gewählt, dass beide Zeitreihen in der Abwesenheit von Induktionsanomalien gleich aussehen würden, wenn der



Erdmantel in 600km Tiefe ideal-leitend wäre und darüber nicht-leitend. Der sehr ähnliche Verlauf beider Zeitreihen deutet an, dass B_z an beiden Orten allein auf Induktion in einer lateral-homogenen 1D-Normalstruktur für den Erdmantel beruht. Trotzdem wird sich im Folgenden für WNG, aber nicht für FUR, ein anomales B_{az} nachweisen lassen.

4. Multivariate Analysen

Wenn in dem zu untersuchenden Periodenbereich mit einem signifikanten Normalanteil B_{nz} in der Vertikalkomponente zu rechnen ist, erfordert eine erdmagnetische Tiefensondierung entweder eine vorangehende Abtrennung von B_{nz} mittels einer vorgegebenen Normalstruktur oder aber die Sondierung wird gemäß Gl. (3) in Verbindung mit dem Gradienten-Verfahren durchgeführt. Da jedoch im 2D oder 3D-Fall die skalare 1D-Impedanz durch eine tensorielle Impedanz zu ersetzen ist, gilt Gleiches auch für die C-Response. Die entsprechend erweiterte lineare Beziehung für B_z enthält dann zusätzlich zu den beiden ETS Übertragungsfunktionen drei Übertragungsfunktionen für eine tensorielle C-Response $\underline{\underline{C}} = (C_{kl}) = \underline{\underline{Z}}^{TE} / i\omega$. Eine zweckmäßige Formulierung dieses Ansatzes lautet:

$$B_z = C_1 \cdot \left(\frac{\partial B_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{ny}}{\partial y} \right) + C_2 \cdot \left(\frac{\partial B_{ny}}{\partial y} - \frac{\partial B_{nx}}{\partial x} \right) + C_3 \cdot \frac{\partial B_{nx}}{\partial y} + z_H \cdot B_{nx} + z_D \cdot B_{ny} \quad (4)$$

mit

$$C_1 = (C_{xy} - C_{yx}) / 2, \quad C_2 = (C_{xy} + C_{yx}) / 2, \quad C_3 = (C_{xx} - C_{yy}). \quad (5)$$

Hierin ist C_1 eine dem *Berdichevsky average* entsprechende Übertragungsfunktion für die dreh-invariante Differenz der Nebendiagonalelemente, C_2 ein Maß für die Anisotropie von $\underline{\underline{C}}$ und C_3 ein Maß für 3D-Effekte. Die dreh-invariante Summe der Diagonalelemente bleibt unbestimmt infolge der Potentialbedingung für das magnetische Variationsfeld im Luftraum. Man erhält Gl. (4), indem die tensoriellen Impedanzbeziehungen für die TE Mode nach den räumlichen Koordinaten x und y differenziert und in geeigneter Weise kombiniert werden.

Eine Auswertung von Gl. (4) erfordert eine multivariate Regression bezüglich der in ihr enthaltenen fünf Übertragungsfunktionen. Diese hat sich als grundsätzlich durchführbar erwiesen, allerdings in der Regel mit einer regularisierten Inversion der 5×5 Spektralmatrix. Es hat sich aber gezeigt, dass eine Auswertung gemäß Gl. (3) zumindest für die ETS Übertragungsfunktionen ausreicht. Die dann notwendige Inversion einer 3×3 Spektralmatrix lässt sich problemlos ohne Regularisierung durchführen.

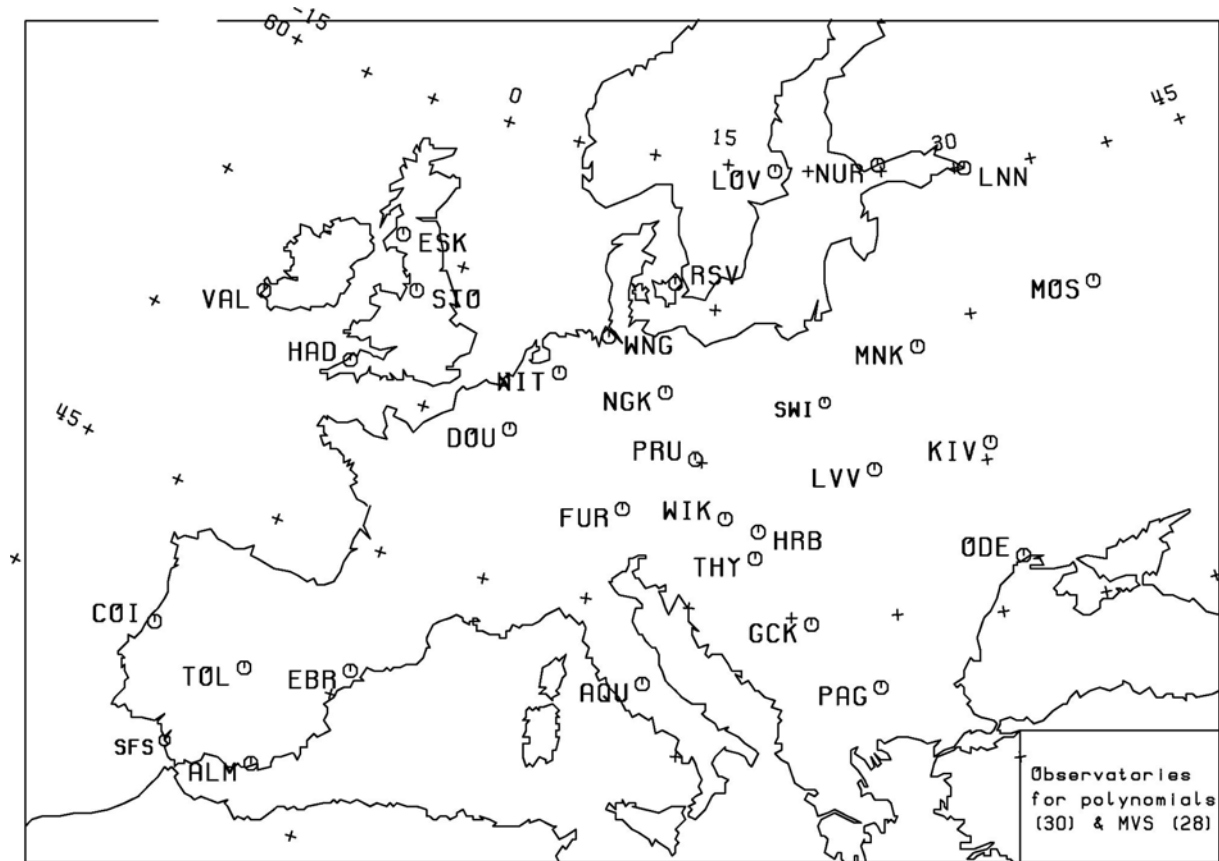
Die grundsätzliche Schwierigkeit multivariater Regressionen besteht darin, dass die Eingabe-Variablen auf den rechten Seiten nur schwach miteinander korreliert sein dürfen. Diese Vorbedingung wird insbesondere durch lineare Beziehungen verletzt, die zwischen den Horizontalkomponenten und ihren räumlichen Ableitungen dann auftreten, wenn das induzierende äußere Quellenfeld räumlich und zeitlich zu einfach strukturiert ist. Aus diesem Grunde führt die Analyse des spektralen Kontinuums zwischen den S_q -Linien zu konsistenteren Ergebnissen als die Analyse von S_q selbst mit einer von Tag zu Tag etwa gleich bleibenden räumlichen Struktur in mittleren Breiten. Im Gegensatz hierzu besitzt das

durch die magnetische Aktivität bestimmte Kontinuum stark wechselnd strukturierte induzierende Felder mit Quellen in der Polarlichtzone.

5. Datenauswahl und Bearbeitung

In der Analyse des Kontinuums, auf welche sich die nachfolgend gezeigten Ergebnisse beschränken, werden für eine lückenlose Folge von 10-Tage-Intervallen geglättete Spektren zu den acht Mittenfrequenzen 0.5cpd , 1.5cpd , ..., 7.5cpd gebildet und anschließend über alle Intervalle gewichtet addiert. Aus den so gebildeten Spektren werden sodann die Schätzwerte der Übertragungsfunktionen abgeleitet, zusammen mit ihren Vertrauensbereichen für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 32 %, wobei im Falle 5-variater Regressionen *jack-knife errors* berechnet werden. Die S_q -Variationen des jeweiligen Monats sind zuvor abgezogen worden.

Die analysierten Zeitreihen bestehen aus den Stundenmittelwerten der Jahre 1964-65 nach Beobachtungen an 30 europäischen Observatorien, die Nyquist-Frequenz beträgt also 12 cpd. Innerhalb der 731 Tage dieser beiden Jahre lassen sich 72 10-Tage-Intervalle bilden. Für die Harmonischen jedes Intervalls im Frequenzabstand von 0.1 cpd werden Polynome mittels einer Ausgleichsrechnung bestimmt, welche die Fourierkoeffizienten für die beiden Horizontalkomponenten an allen 30 Observatorien näherungsweise wiedergeben. Für jedes Observatorium und jede Harmonische werden sodann aus diesen Polynomen die Horizontalkomponenten und die räumlichen Ableitungen des so definierten Normalfeldes gewonnen. Da die Polynomanpassung ohne Regularisierung in sphärischen Koordinaten erfolgen soll, werden 2-dimensionale quadratische Polynome verwendet. Diese Beschränkung bewirkt zugleich eine angemessene räumliche Glättung des Normalfeldes. Die Positionen und Akronyme der verwendeten Observatorien sind der nachfolgenden Europa-Karte zu entnehmen.

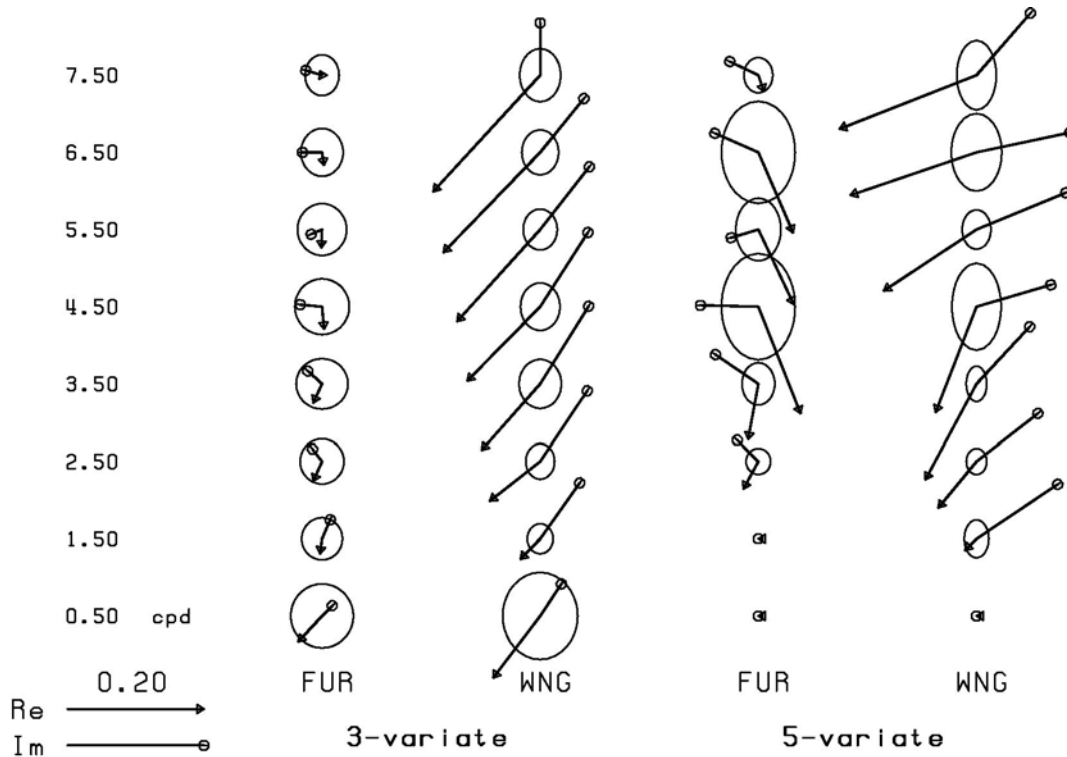


6. ETS Ergebnisse für die deutschen Observatorien FUR und WNG

Die graphische Darstellung der Real- und Imaginärteile der ETS Übertragungsfunktionen erfolgt mit Induktionspfeilen in den Definitionen

$$\underline{c}_{\text{Re}} = -\text{Re}(z_H)\hat{x} - \text{Re}(z_D)\hat{y} \quad (\text{Parkinson}), \quad \underline{c}_{\text{Im}} = +\text{Im}(z_H)\hat{x} + \text{Im}(z_D)\hat{y} \quad (\text{Wiese}). \quad (6)$$

Der Vorzeichenwechsel für den Realteil hat allein zeichentechnische Gründe. Es folgt zunächst eine spaltenweise Darstellung dieser Pfeile für die acht Frequenzen des Kontinuums nach Beobachtungen an den genannten Observatorien, links für 3-variate Regressionen nach Gl. (3) und rechts für 5-variaten Regressionen nach Gl. (4). Es ergeben sich vergleichbare Induktionspfeile innerhalb der durch die Ellipsen angezeigten Fehlergrenzen, doch zeigen die aus einer 3-variaten Analyse gewonnenen Pfeile nach Richtung und Länge gleichmäßigere Änderungen von Frequenz zu Frequenz. Außerdem werden für die ersten beiden Mittenfrequenzen die Grenzen von 5-variaten Regressionen sichtbar. Die fehlenden Pfeile für 0.5 cpd und 1.5 cpd (nur FUR) wären mit nicht darstellbaren Fehlerellipsen verbunden.



Den links gezeigten ETS Ergebnissen ist Folgendes zu entnehmen: Die Analyse der B_z -Variationen lässt keinen signifikanten Einfluss einer Induktionsanomalie für FUR erkennen, wohl aber für WNG. Realpfeile weisen für dieses an der Elbmündung gelegene Observatorium einheitlich nach Südwesten und Imaginärpfeile in Gegenrichtung, was auf eine lang gestreckte schlecht leitende Struktur nordöstlich von WNG hindeutet oder auf eine gut leitende Struktur in Südwesten, beide mit Streichrichtungen nach Südosten. Die durch das Längenverhältnis der Pfeile ausgedrückte Phase erniedrigt sich von fast 70° bei 1.5 cpd ($T=16h$) stetig auf etwa 25° bei 6.5 cpd ($T=3.7h$), wie es bei einer oberflächlichen Leitfähigkeitsanomalie zu erwarten ist, während sich die durch $\sqrt{|z_H|^2 + |z_D|^2}$ ausgedrückte Größe der Anomalie etwa verdoppelt. Dies entspricht sehr genau dem aus dem

Frequenzverhältnis abgeleiteten Anstieg von $\sqrt{6.5/1.5} = 2.08$ für eine Normalstruktur konstanter Leitfähigkeit gemäß Abschnitt 2 und scheint anzudeuten, dass die induktive Kopplung auf den in seiner Leitfähigkeit mehr oder weniger homogenen oberen Mantel beschränkt ist.

----- **Ein Kontinent erwacht** -----

Die ETS Ergebnisse nach Gl. (3) werden abschließend für die acht Frequenzen der Spektralanalyse des Kontinuums auf Europa-Karten dargestellt. Sie zeigen Frequenz für Frequenz die Induktionspfeile für 28 der 30 Observatorien, die für die Polynomdarstellungen verwendet wurden. Die B_z -Variationen von Swider (SWI) erwiesen sich als zu stark gestört, diejenigen von Odessa (ODE) als instabil, San Fernando (SFS) registriert nur die Horizontalkomponenten. Jede Karte enthält oben links die gleich bleibende Skalierung der Pfeile und rechts unten eine Legende mit der in Perioden umgerechneten Mittenfrequenz. Diese Darstellungen könnten der erste Versuch überhaupt sein, mit erdmagnetischen Tiefensondierungen in den Periodenbereich jenseits von Bay-Störungen vorzudringen - angesichts eines den Einfluss von Induktionsanomalien mehr und mehr verdeckenden Normalanteils in den beobachteten B_z -Variationen. Bemerkenswert ist, dass in den Karten eine gute Korrelierbarkeit der ETS Ergebnisse sichtbar wird, sowohl von Ort zu Ort als auch von Frequenz zu Frequenz. Jeder Betrachter möge aus ihnen seine eigenen Schlüsse ziehen. Hier nur einige Kurz-Kommentare mit $z^* = \text{Re}\{C\}$ als Maß für die jeweilige Eindringtiefe:

T=48h ($z^*=715\text{km}$): Noch keine signifikanten Induktionsanomalien irgendwo in Europa mit Ausnahme der Küstenregionen des Atlantiks und entlang der Stationskette RSV-WNG-WIT von Dänemark nach Holland.

T=16h ($z^*=610\text{km}$): Küstenanomalien werden deutlicher sichtbar, und zwar zunächst in den Imaginärteilen, nicht nur am Atlantik sondern auch an der Mittelmeerküste Spaniens (!). Gleiches gilt für die Stationskette WIK-HRB-THY-GCK-PAG in Südosteuropa sowie für die Stationen LVV und KIV in der Ukraine.

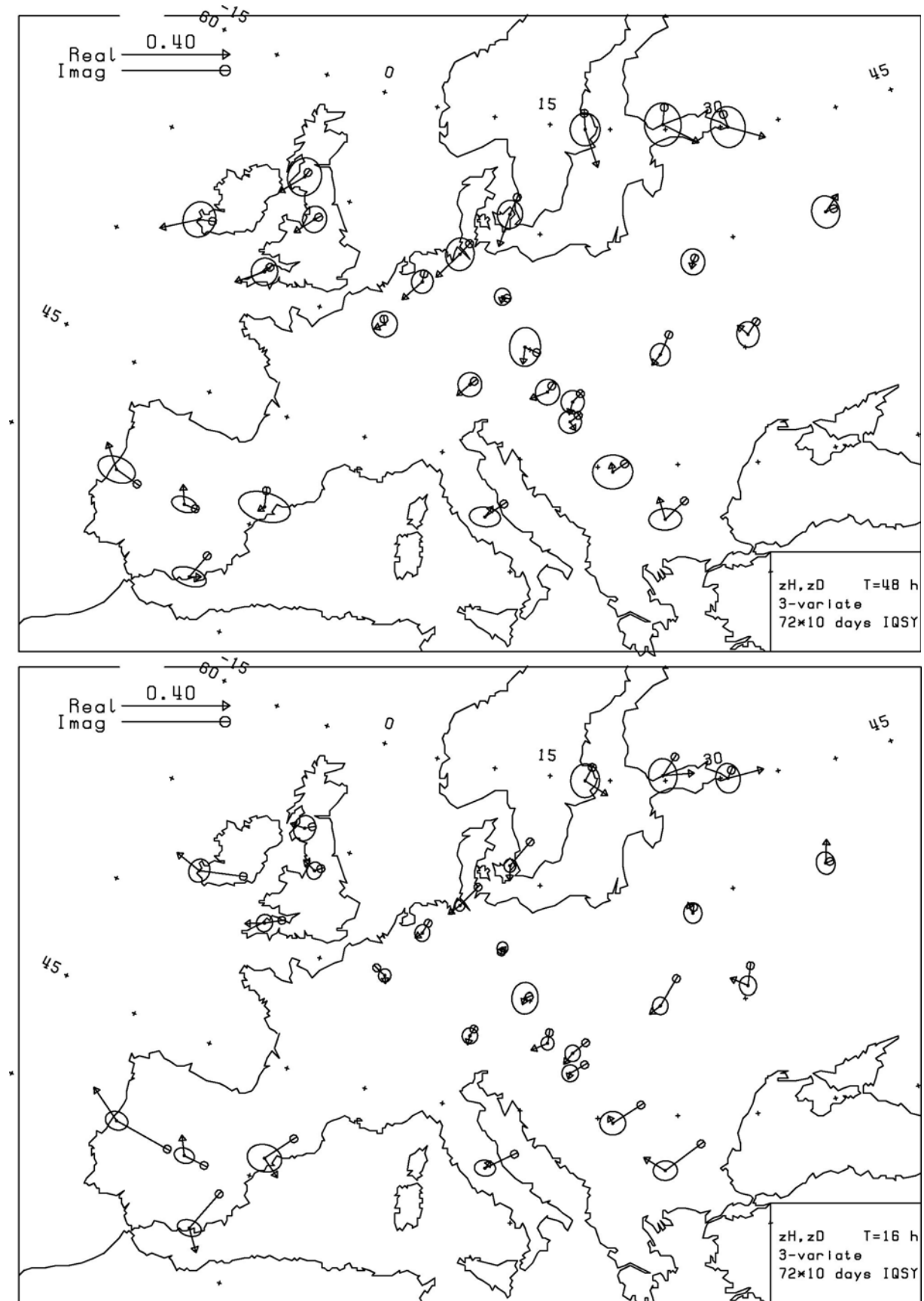
T=9.6h ($z^*=500\text{km}$): Allmähliches Anwachsen der Realpfeile an den Küsten und im küstennahen Hinterland. Auch in den küstenfernen Gebieten treten die Realteile teilweise aus den Fehlergrenzen heraus.

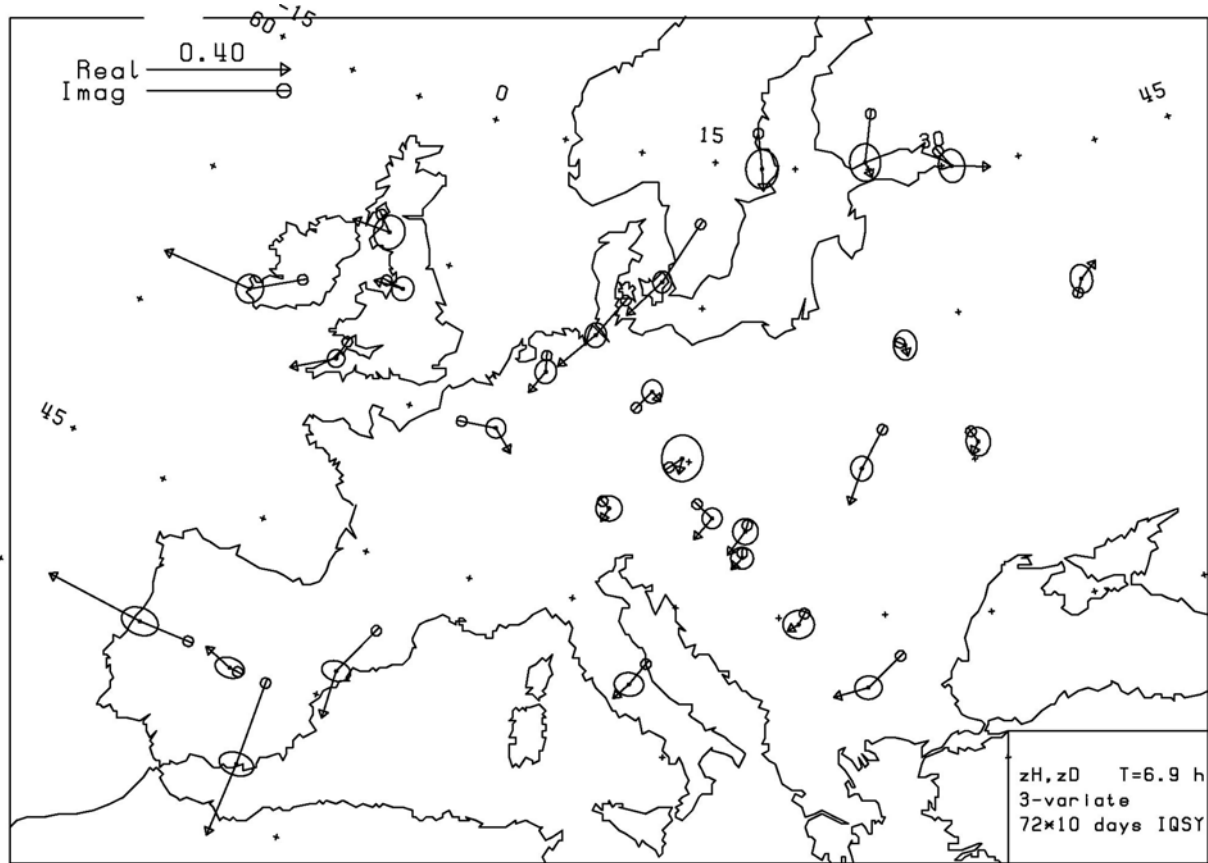
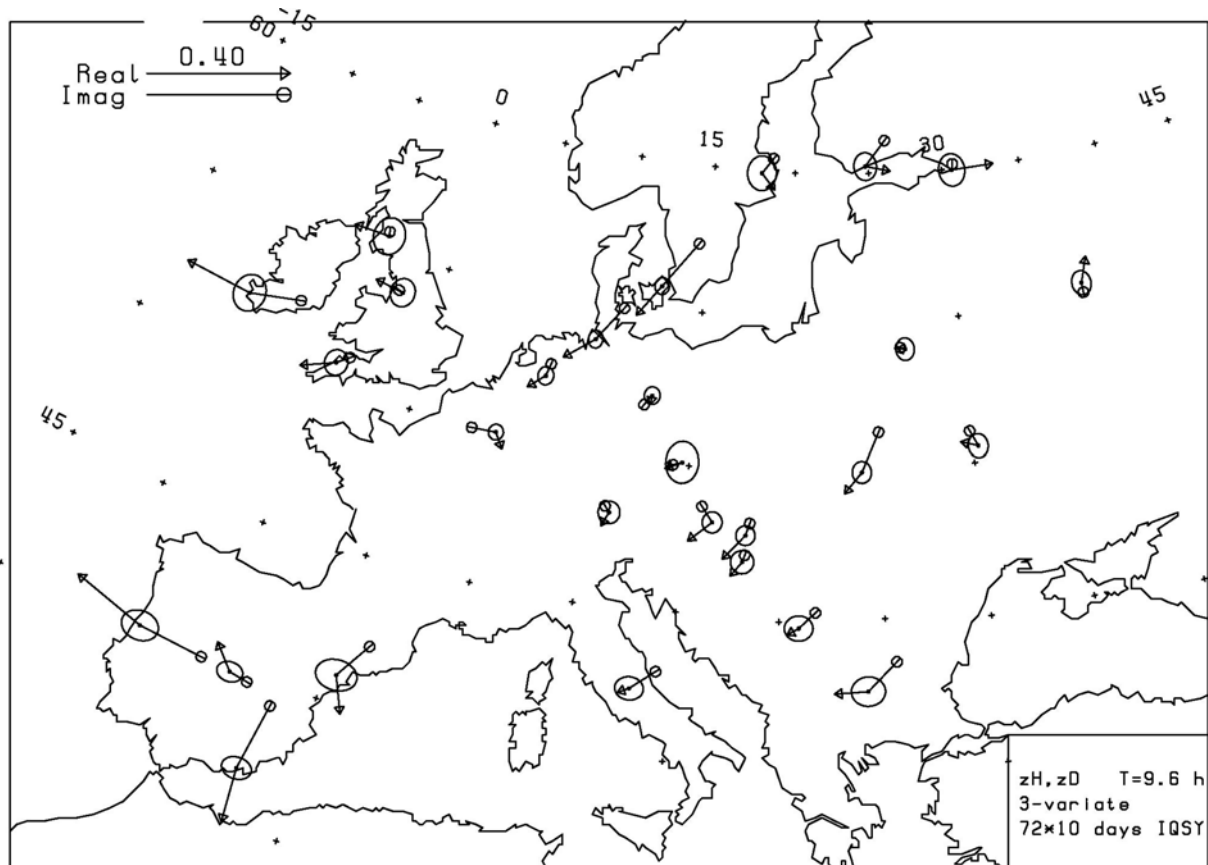
T=6.9h ($z^*=415\text{km}$): In den Küstenregionen des Atlantik übertreffen nunmehr die noch einmal gewachsenen Realpfeile in ihren Längen die Imaginärpfeile, die Phase der Küstenanomalien sinkt unter 45° . Dies gilt aber nicht für die beiden spanischen Observatorien am Mittelmeer und auch nicht für die Anomalien im Inland.

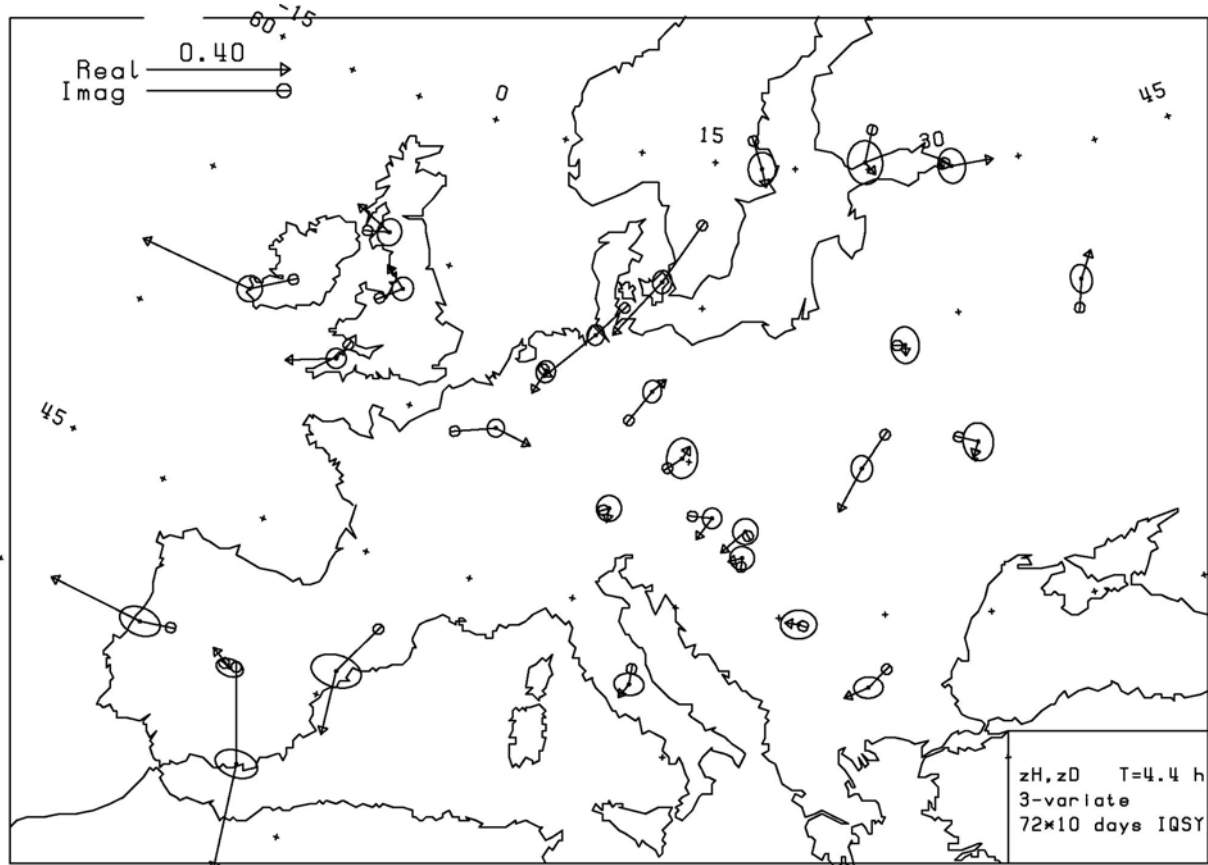
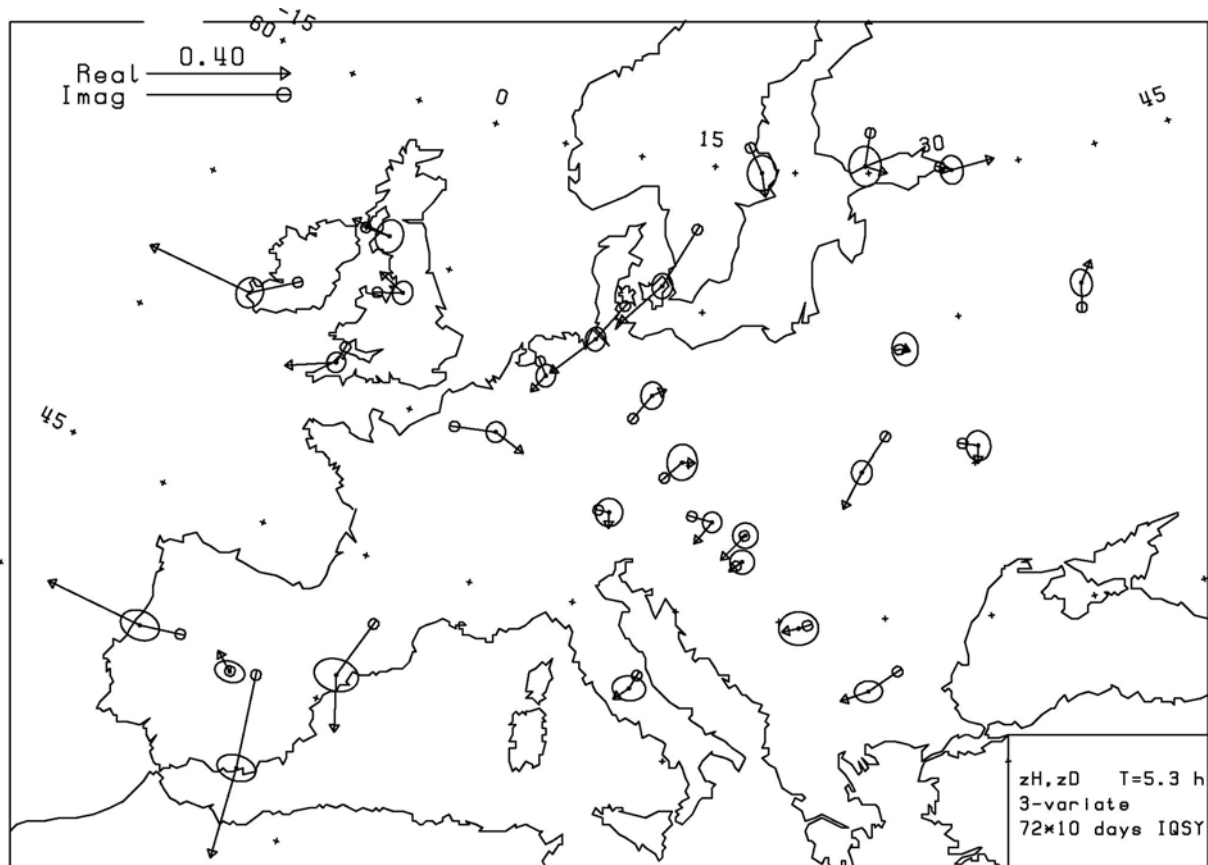
T=5.3h ($z^*=360\text{km}$): Langsames Verschwinden der Imaginärpfeile in den Küstenregionen des Atlantiks, aber nicht an den Küsten des Mittelmeers. Im Inland liegen die Phasen teils immer noch oberhalb, aber auch schon unterhalb von 45° . Die Anomalie von KIV ist kaum noch zu sehen.

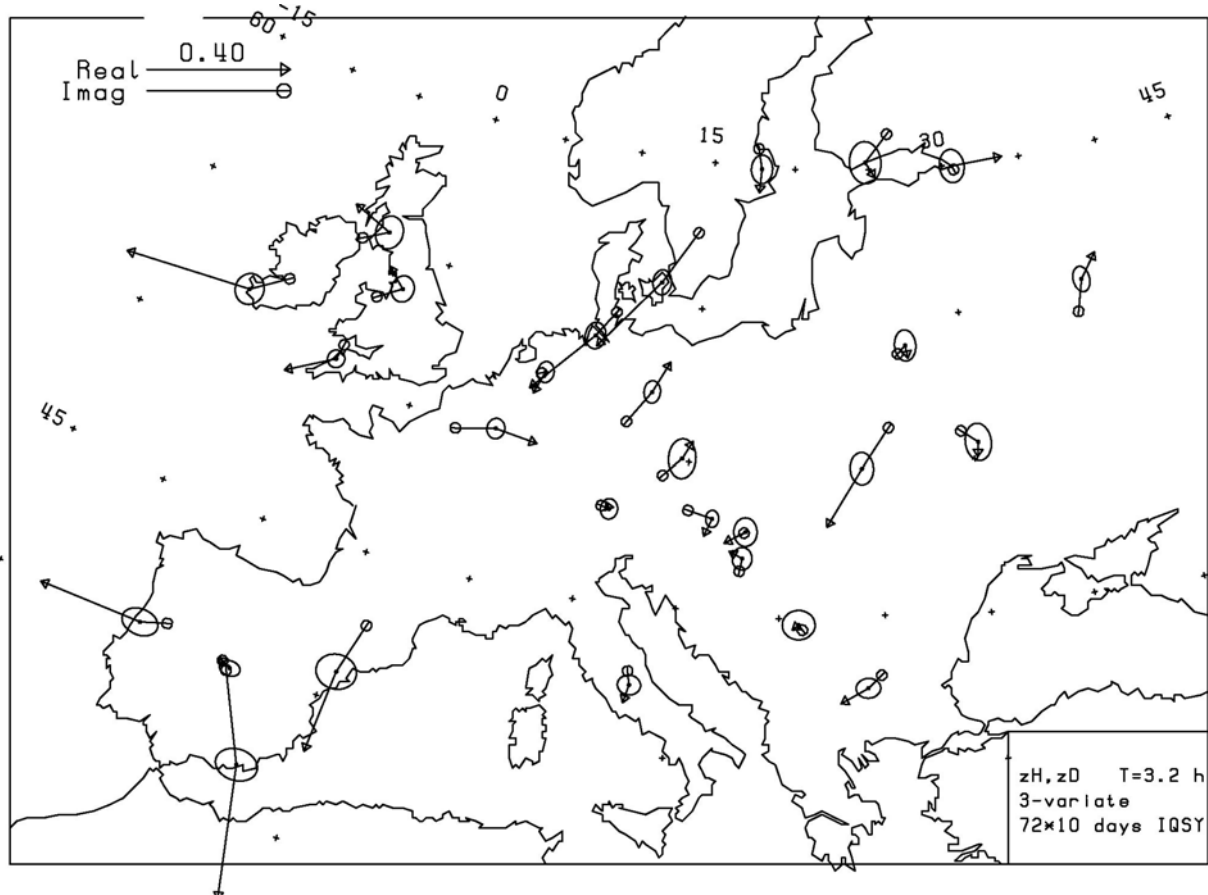
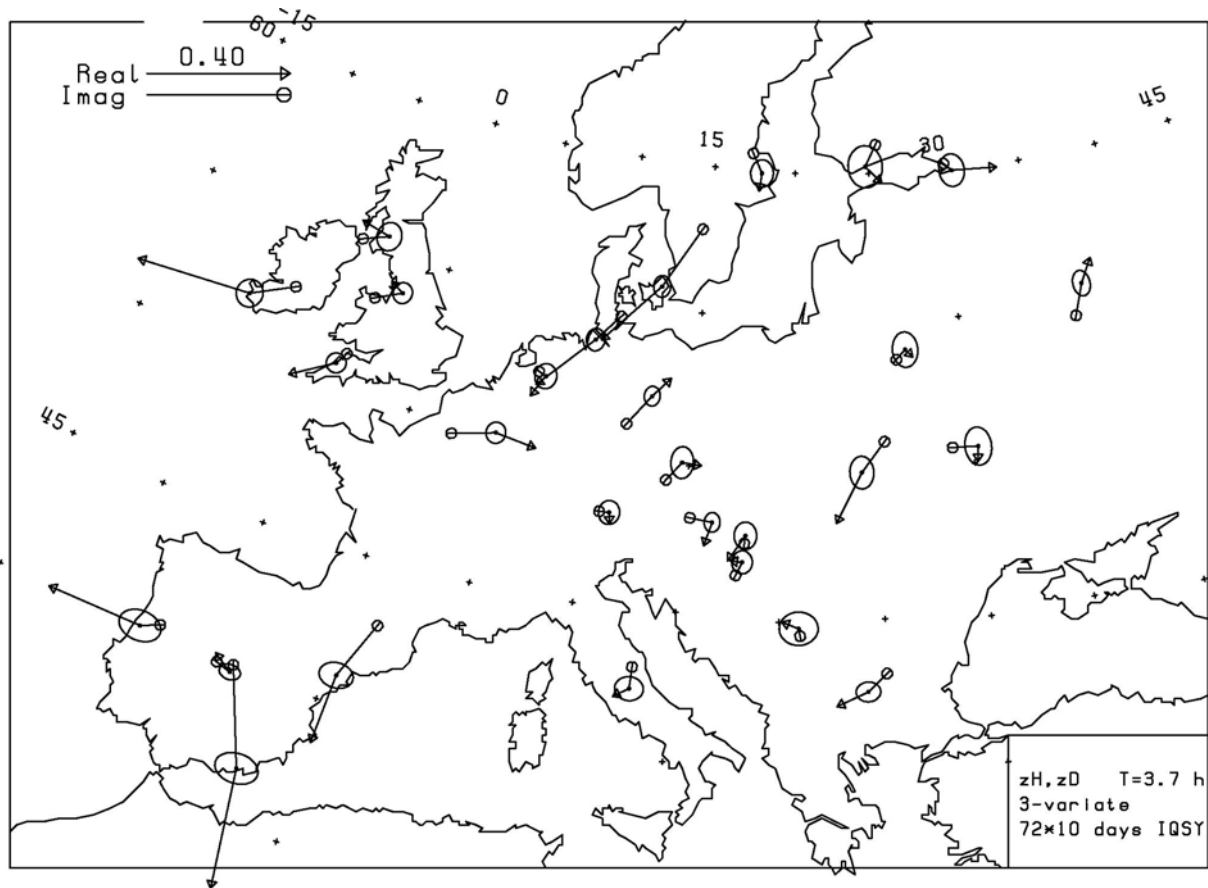
T=4.4h, 3.7h, 3.2h ($z^*=315, 280, 260\text{km}$): Die Küstenanomalien am Atlantik erreichen im Realteil ihre größten Werte, dazu passend die Annäherung an den Nulldurchgang der Imaginärteile. Starkes Abklingen der Küstenanomalien landeinwärts infolge der geringer

werdenden Eindringtiefen. Am Mittelmeer Phasen immer noch bei 45° , im Inland jetzt in der Regel darunter liegend. Dies gilt auch für die stark hervortretende Anomalie entlang der Linie RSV-WNG-WIT. Ganz im Osten erscheinen neue Anomalien in LNN und MOS.









Phase Splitting: Evidence for mantle anisotropy?

U. Weckmann,

Dublin Institute for Advanced Studies, School of Cosmic Physics,
5 Merrion Square, Dublin 2, Ireland (ute@cp.dias.ie)

May 5, 2006

1 Introduction

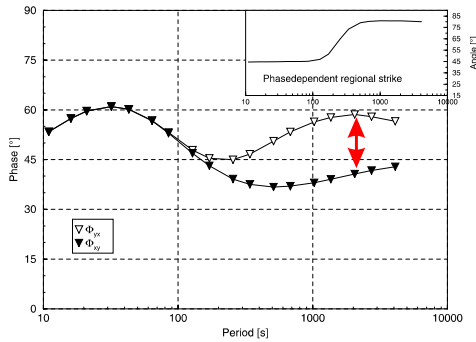


Figure 1: Example for a phase split of both off-diagonal elements of the impedance tensor at long periods.

Phase split describes the splitting of the MT phase curves of both off-diagonal components at long periods as shown in Fig. 1. This behaviour is commonly observed, however, in LMT experiments with a large site spacing in the order of a couple of hundred kilometres. The phase split and strike directions, especially their lateral homogeneity over the entire experiment array is often used to deduce that the Earth's mantle is anisotropic. For long periods and a penetration depth into the Earth mantle, it is often presumed that the phase curves of both off-diagonal elements join at 45° (1D conditions) and thus any observed laterally homogeneous phase split is due to electrical anisotropy. In the following I will cite some examples from the literature.

Leibecker et al. [2002] interpreted LMT data in the western part of Germany within the Eifel Plume project. In order to explain the measured data they used a 3D model, fitting the magnetic transfer functions and the phase split. The apparent resistivities of the diagonal components were disregarded. Their publication shows responses of 15 sites out of 30. *Gatzemeier and Moorkamp*

[2005] focused on the same LMT data but included data from more sites. They also computed a 3D model to fit the apparent resistivities of the off-diagonal components. The diagonal components and the induction vectors were neglected. Responses of two sites out of 64 were shown. *Simpson* [2002] shows LMT data at 4 sites in Australia. By means of a 1D model of the two off-diagonal components she deduced an anisotropic mantle beneath Australia. The diagonal components and the induction vectors were neglected. Only the response of one site is shown. *Shalivahan and Bhattacharya* [2005] explained the MT data of 11 sites across the Eastern Indian Craton. By means of 1D models of the two off-diagonal components of one site they deduced an anisotropic mantle beneath India. Please note that for the given examples I can only refer to what is shown in the publications, however, it might be possible that the authors fitted more MT parameters.

In the cases described above we can find a common, simple architecture of models used to produce the observed phase split. Figure 2 shows a basically layered subsurface which includes an anisotropic layer at mantle depth. Even if 3D modelling is applied, the models are mainly based on a layered conductivity distribution. Anisotropic layers might account for different apparent resistivities of both off-diagonal components, however, we do not find complicated lateral conductivity contrasts to explain apparent resistivity and phase variations at long periods. These more or less 1D models are apparently supported by the lateral homogeneity of e.g. phase split, strike directions or induction vectors for certain long period ranges. Even if the apparent resistivity curves of all impedance tensor elements indicate a more complex subsurface, electrical anisotropy is often automatically assumed because of the phase split. In the following I will show that large scale conductiv-

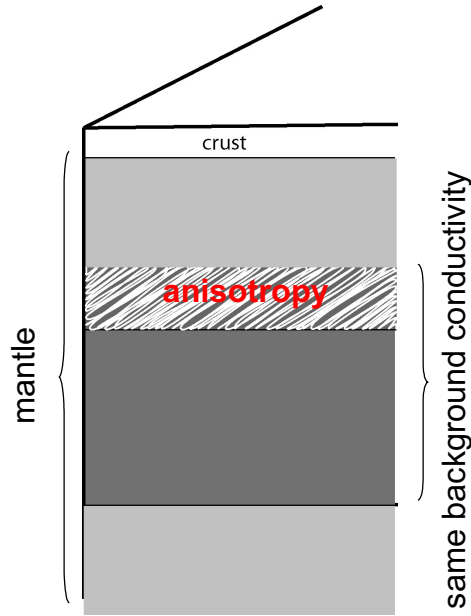


Figure 2: Even in different geological settings a general architecture of a layered subsurface is used to explain phase split and strike directions at long periods: Even in the case of a 3D model the layered conductivity structure remains dominant.

ity anomalies in the Earth's crust or mantle can also result in laterally homogeneous phase split and strike directions.

2 3D model without anisotropy

A large scale isotropic 3D model which is shown in Fig. 3a) was computed using WinGLink. It comprises a layer with some conductivity anomalies in the upper crust which cannot be seen in the depiction of the entire model and is not of importance for this study. The main conductivity anomaly is a large $2\Omega m$ structure (C) in a depth region between 50 and $120km$. It is located outside the array, dipping in southward direction. This feature is terminated approximately $200km$ north of the array in a depth of $120km$ (see top view in Fig. 3b)). The background conductivity distribution is layered. The model itself is mainly based on the general architecture of the above mentioned anisotropic models in terms of its conductivity contrasts and layering. Only the anisotropic layer is replaced by a conductive structure outside the station array.

The phase split as well as the phase sensitive strike directions *Bahr* [1988] of the synthetic responses for a set of 160 sites on top of the isotropic

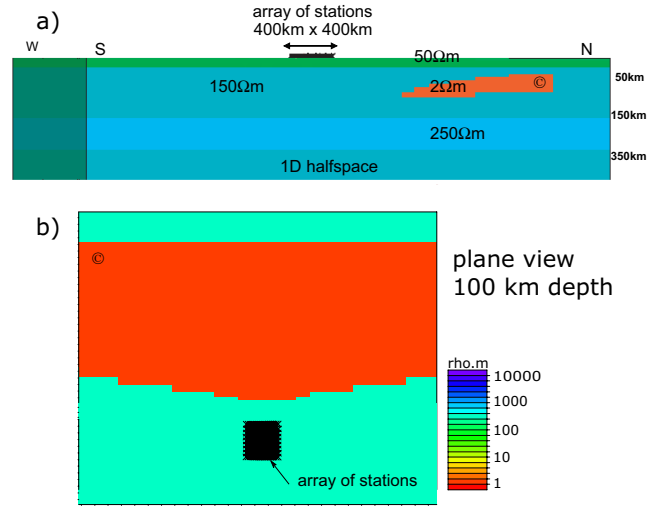


Figure 3: Isotropic 3D model: This model is mainly based on the general architecture of the above mentioned anisotropic models in terms of its conductivity contrasts and layering. Only the anisotropic layer in upper mantle depth is replaced by a conductive structure outside the station array. a) Side view of the inner 3D block. b) top view of a z-layer in $120km$ depth. The conductive feature (C) outside the station array is terminated $200km$ north of the array and has a slightly roundish boundary.

3D model are computed for a period of $10000s$ (see Fig. 4). In general, we observe a homogenous behaviour over an area on $400km^2$. In the northern part the strike directions are slightly influenced by the roundish boundary of the conductive feature (C). The induction vectors (not shown here) for all sites indicate very consistently a conductivity contrast further to the north.

Apparent resistivities and phase curves (Fig. 5) for all four components at a site in the middle of the array, show a phase split in the order of 20° at long periods ($10000s$). A smaller phase split at shorter periods ($200s$) is caused by a layer with a lateral conductivity contrast in the crust, which is not of importance to this study. At long periods we also observe larger diagonal components, however, they are smaller than the off-diagonal components.

3 Fitting only off-diagonal components?

To answer the question whether solely fitting the off-diagonal components of the impedance tensor with anisotropic modelling leads to meaningful

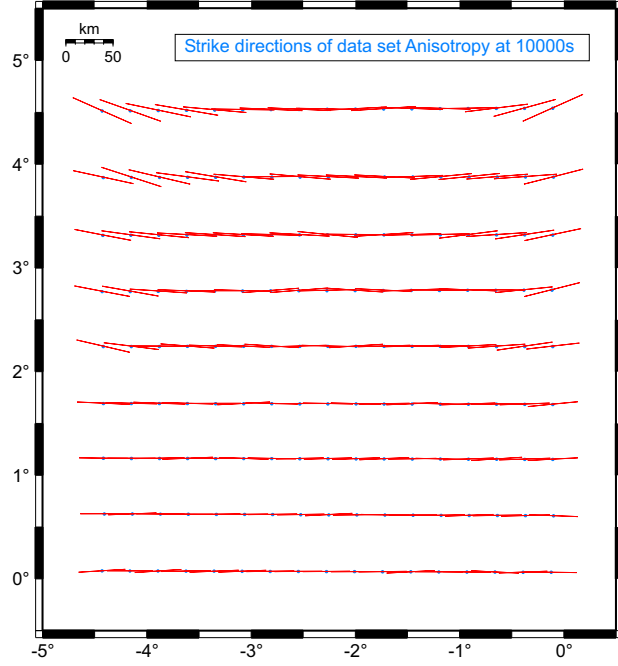


Figure 4: For a period of 10000s the strike directions after *Bahr* [1988] are shown the length of the red bars is scaled by the phase difference of both off-diagonal components. In the northern part the strike directions are slightly influenced by the roundish shape of the conductive feature.

models, I have chosen an arbitrary anisotropic 2D model. It is shown in Fig. 6a) and was computed using the 2D anisotropic forward modelling code by Pek and Verner [1997]. In 43km depth a 150km thick anisotropic structure (3/100 Ωm , 40 $^\circ$ anisotropy strike) is placed to the right hand side of the model. The left side of the model contains an isotropic half layer of 50 Ωm .

Fig. 7a) shows the synthetic responses at a site in the middle of the model (S1), which means to the right hand side of the conductivity contrast. For this study the shape of apparent resistivity and phase curves is not important, however, we should note that because of the anisotropy strike of 40 $^\circ$ and the conductivity contrast we do observe diagonal components, which differ significantly from zero.

In the following I will construct anisotropic 2D models by only fitting the off-diagonal components of the model (1). Fitting only the off-diagonal components is common practice particularly if we argue that the diagonal components are small compared to the off-diagonal compo-

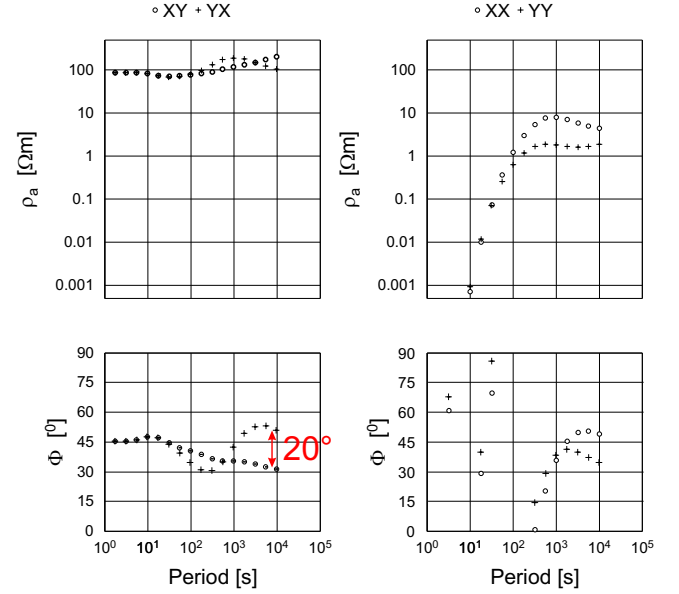


Figure 5: Apparent resistivity and phase curves of all impedance tensor elements of a station in the middle of the array. The small phase split at 200s is caused by a layer with lateral conductivity contrasts in the crust. For long periods of 10000s a phase split of 20 $^\circ$ can produced. Because of the simple structure of the model the diagonal elements are comparatively small.

nents. In a first attempt I have been looking for an anisotropic model without any lateral conductivity contrast. This model was found by trial and error and has anisotropic layers with completely different conductivity contrasts than model (1), and an anisotropy strike of 0 $^\circ$. All anisotropic layers have a total thickness of approximately 90km. The first layer of 55km thickness has a conductivity contrast of 13/45 Ωm , the second 14km thick layer has 34/45 Ωm and the last 20km thick layer has a contrast of 4/45 Ωm . The response of this model at site (S1) is shown in Fig. 7b) in red colours, in black we have the response of model (1) for comparison. With this model I am able to reproduce the apparent resistivity and phase curves of both off-diagonal components. However, as the anisotropy strike equals 0 $^\circ$ there is no response in the diagonal components. In my last example I pretend that the subsurface has a strike direction of 60 $^\circ$ and no lateral conductivity contrast. This approach might reflect a situation where a certain strike direction would fit into an existing geological model and thus this direction is "desired". Again my model consists of three anisotropic layers with a total thickness of approx-

imately 160km. The first 10km thick layer has an anisotropy contrast of $287/100\Omega m$ (60° anisotropy strike), the second 20km thick layer has $10/100\Omega m$ (60° anisotropy strike) and the last 128km thick layer has an anisotropy contrast of $6/75\Omega m$ (60° anisotropy strike). Fig. 7c) shows the response of this anisotropic model together with the response of model (1) in black. Again the off-diagonal components are perfectly reproduced whereas apparent resistivities and phases of both diagonal components differ from those of model (1).

4 Conclusions

Phase split at long periods can be produced by anisotropy, BUT isotropic models with crustal/mantle anomalies can also produce it. The phase split caused by mantle heterogeneities further away from the measurements area and the resulting strike directions are uniform over large areas (e.g. 500km x 500km). Induction vectors also show uniform behaviour. Exactly the same off-diagonal impedance tensor components can be generated by different anisotropic models. The diagonal components, however, show different behaviour. This 2D anisotropic modelling study clearly demonstrates that in order to get reliable models, we have to fit more than a few selected MT parameters!

References

- Bahr, K. (1988), Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: regional induction and local telluric distortion, *Journal of Geophysics*, *62*, 119–127.
- Gatzemeier, A., and M. Moorkamp (2005), 3D modelling of electrical anisotropy from electromagnetic array data; hypotheses testing from different upper mantle mechanisms, *Phys. Earth Planet. Int.*, *149*, 225–242, doi: 10.1016/j.pepi.2004.10.004.
- Leibecker, J., A. Gatzemeier, M. Hönig, O. Kuras, and W. Soyer (2002), Evidence of electrical anisotropic structures in the lower crust and the upper mantle beneath the Rhenish Shield, *Earth Planet. Sci. L.*, *202(2)*, 289–302, doi: 10.1016/S0012-821X(02)00525-3.
- Pek, J., Verner, T., 1997. Finite-difference modelling of magnetotelluric fields in two-dimensional anisotropic media. *Geophys. J. Int.* *128*, 505–521.
- Shalivahan, and B.B. Bhattacharya (2005), Electrical anisotropy of asthenosphere in a region of window to mantle underneath Eastern Indian Craton, *Phys. Earth Planet. Int.*, *152*, 43–61, doi: 10.1016/j.pepi.2005.06.001.
- Simpson, F. (2002), Intensity and direction of lattice-preferred orientation of olivine: are electrical and seismic anisotropies of the Australian mantle reconcilable?, *Earth Planet. Sci. L.*, *203*, 535–547.

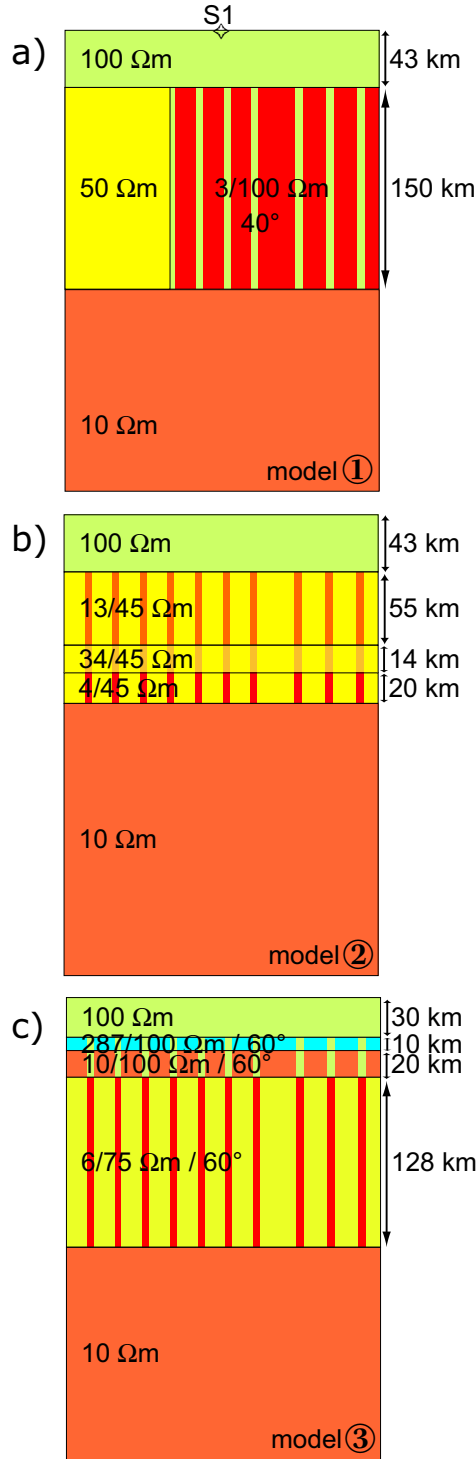


Figure 6: a) Anisotropic 2D model (1) with an 150km thick anisotropic half layer (with an anisotropy strike of 40°) next to an isotropic half layer. b) Second anisotropic model (2) which has the same response in its off-diagonal elements as the initial model. c) Third anisotropic model (3) which had to fulfill the demand of an anisotropy direction of 60° while reproducing the response in the off-diagonal elements of the initial model (see text).

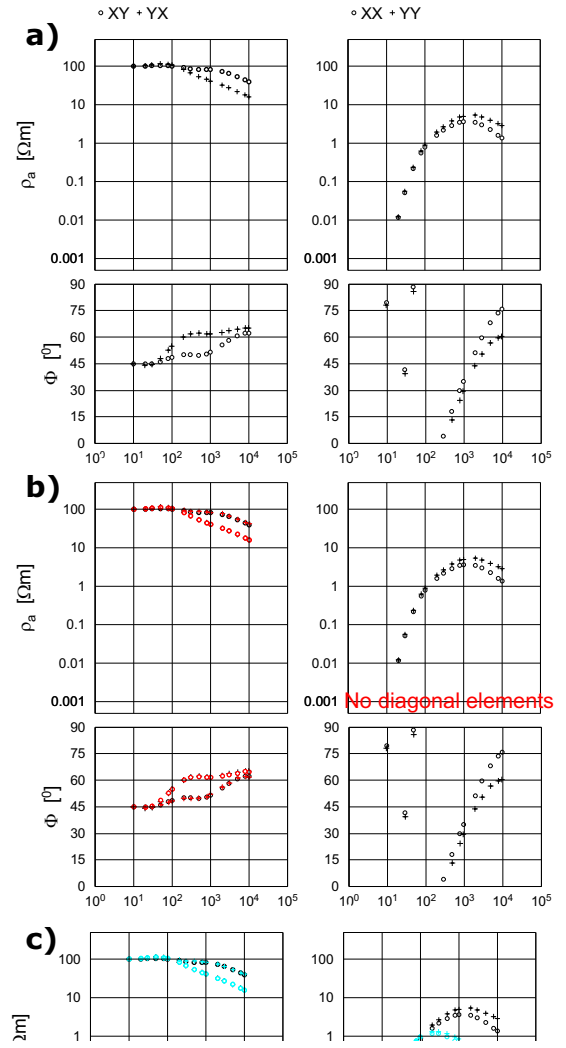


Figure 7: Apparent resistivity and phase curves of all 4 impedance tensor elements a) for the anisotropic model (1) (Fig. 6a)), b) the response of model (1) overlain by the response of the anisotropic model (2) (Fig. 6b)) and c) the response of model (1) overlain by those of model (3) (Fig. 6c)). Note that the second model has vanishing diagonal elements and the third model results in the same off-diagonal elements but has different diagonal components.

Uniform Deflection of Induction Vectors at the South Chilean Continental Margin: A Hint at Electrical Anisotropy in the Crust

Heinrich Brasse¹, Yuguo Li^{1,2}, Gerhard Kapinos¹, Diane Eydam¹, and Lutz Mütschard¹

¹ FU Berlin, FR Geophysik, Malteserstr. 74-100, D-12249 Berlin

² now at: Scripps Institution of Oceanography, La Jolla

E-mail h.brasse@geophysik.fu-berlin.de

Abstract

Induction vectors at the South Chilean continental margin display a unique pattern throughout the study area between latitudes 38-41°S and longitudes 71-74°W: At long periods of approx. 3.000 s their real parts are uniformly deflected from the W-E direction (which would be expected due to the coast effect and/or anomalies beneath the roughly N-S striking Andean mountain chain) to the NE. Attempts to model this behavior with simple and geologically realistic 3-D models failed, but a reasonable data fit was obtained by employing 2-D models with an anisotropic upper crust. This anisotropy hints at a deeply fractured crust with strike directions running obliquely to the continental margin in accordance with a recently mapped pattern of fault zones in the arc and forearc.

Introduction

An amphibious long-period magnetotelluric experiment was accomplished in austral summer 2004/2005 in South-Central Chile (TIPTEQ project, see Kapinos et al., this volume) which complemented an earlier study carried out slightly further to the south (Brasse and Soyer 2001). Transfer functions in the period range between 10 s – 20.000 s from approx. 70 stations, set up between the Argentinian border and the Pacific Ocean (plus an extension across the Peru-Chile trench with seafloor sites) are available by now. On land, the network encompasses the areas of the Coastal Cordillera, the Central Depression or Longitudinal Valley and the Principal Cordillera, which constitutes the active volcanic arc (see Fig. 1).

Given the average N10°E trend of the trench, which reaches a maximum depth of ~4.600 m in the study area, and the similar overall course of the volcanic chain, it was expected that real parts of induction vectors would show a general W-E tendency. This is, however, not the case. Instead, at long periods, all real induction vectors point systematically NE for all sites in the measuring area, regardless on which geological unit data were collected (Fig. 1). Note that there is not a single site in the study area where this observation is opposed. On the other hand, this effect is not observed at shorter periods (Kapatos et al., this volume).

3-D Modeling to explain induction vectors

It is obvious that this behavior cannot be explained by pure 2-D models. We therefore tested several simple 3-D approaches to account for the deflection over a large area, in particular the N-S extent of at least 350 km (it is not known if transfer functions continue to be this anomalous to the north and south of the measuring area, but this may quite safely be assumed). Such models must incorporate the Pacific Ocean with an average depth of ~4 km and an almost N-S running coastline, and some other structure of large, regional extent which accounts for the

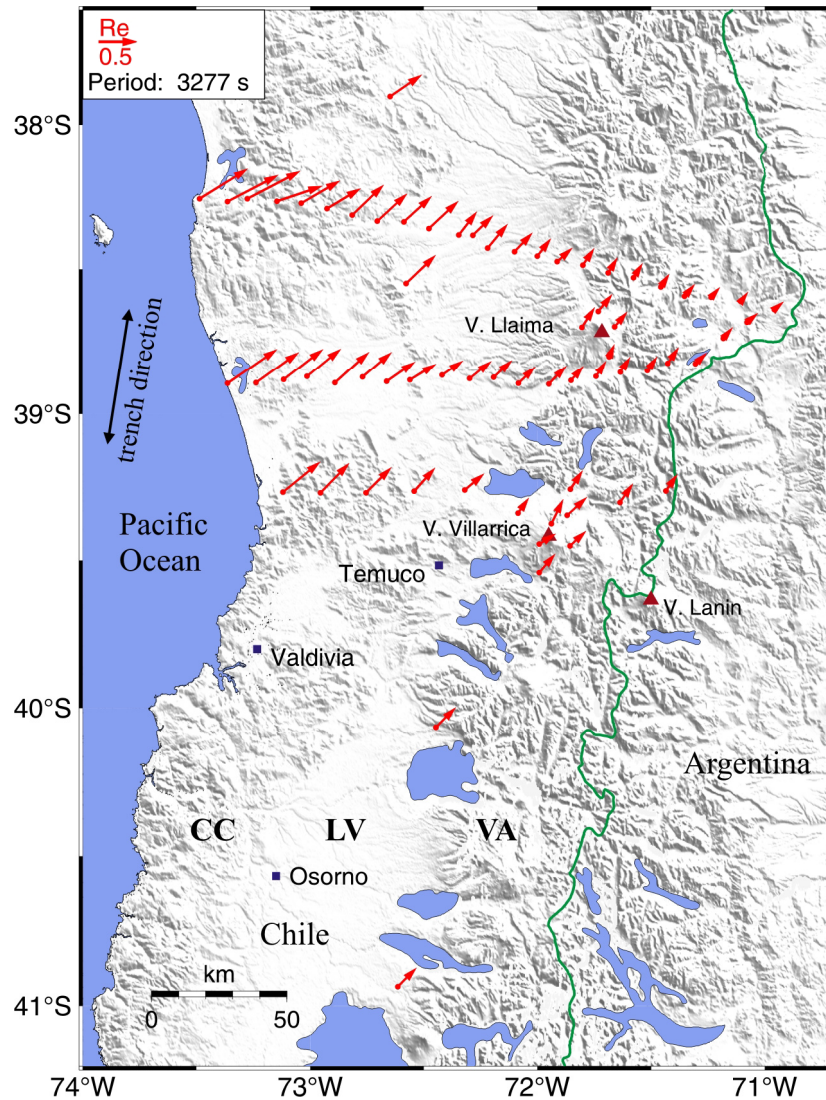


Fig. 1: Deflection of real induction vectors at a period of 3.277 s from the expected W-E direction in South Chile. CC Coastal Cordillera, LV Longitudinal Valley, VA volcanic arc. Topographic image is derived from SRTM-90 m data (NASA).

deflection. For the computations the algorithm of Mackie et al. (1994) was applied, seawater resistivity was fixed at $\rho = 0.3 \Omega\text{m}$.

Test 1: It may be possible that a layer with increasing conductance from south to north exists at some depth in the crust or even in the upper mantle. This may indeed explain the induction vectors but leads to inherently large conductancies in the northern part (and unrealistic conductivities if layer thickness is not changed accordingly). Furthermore there exists no geological evidence whatsoever for such a layer and the idea is thus abandoned here.

Test 2: South of the southernmost site begins archipelagic Chile, i.e., the Central Depression is submerged and the Coastal Cordillera becomes a chain of islands, with Isla Chiloé being the largest (not shown in Fig. 1). The distribution of seawater masses causes therefore a deflection of induction vectors near latitude 41°S, but this effect does not reach far enough to the north, taking the known water depths into account.

Test 3: At 45-46°S, i.e., 450-550 km south of the study area the Chile Rise is subducted beneath the continent; this is the triple junction between Antarctic, Nazca and South Ameri-

can plates. It may be speculated that the location of the triple junction is associated with a deep seated plume structure of enhanced conductivity. Such a hypothetical good conductor (resistivity $1 \Omega\text{m}$) was incorporated into the 3-D model (which also takes the irregular coastline into account); the response is shown in Fig. 2. Again, the model response is only compatible with the data at the southernmost sites of the measuring area; in the north vectors point strictly W-E.

Summarizing, simple and (geologically) realistic 3-D models explaining the observed induction vectors could not be found (which does of course not exclude more detailed classes of models, see later). We therefore tested another approach, the simulation of a deeply fractured crust with anisotropic 2-D models.

2-D models with anisotropy

It is an almost trivial exercise to construct a 2-D model with an anisotropic layer in the continental crust which may indeed explain the observed transfer function qualitatively. Such a simple model is displayed in Fig. 3, which incorporates the Pacific Ocean with a crude bathymetry, a homogeneous crust and upper mantle with a resistivity of $300 \Omega\text{m}$, and an anisotropic layer in the upper crust. Resistivity in x-direction is set to $\rho_x = 1 \Omega\text{m}$, and in y-direction to $\rho_y = 300 \Omega\text{m}$, while the vertical resistivity is again $\rho_z = 1 \Omega\text{m}$ (but note that this quantity is not resolved in MT). The ocean primarily accounts for the length of induction vectors near the coast while the strike of anisotropy is responsible for the deflection from W-E. In the model of Fig. 3 this anisotropy strike is set to -57° , i.e., the conductive axis is basically running NW-SE. This strike direction is also motivated by a recent mapping of fault structures in the forearc and arc regions of southern Chile (Melnick et al. 2006), which is discussed later in this contribution. Transfer functions were calculated employing the algorithm of Li (2002). Full anisotropy has to account for 6 variables, the principal resistivities, strike, dip and slant (cf. Pek and Verner 1997). Due to the resulting complexity we varied only the first 4 parameters leaving dip and slant constant at 90° and 0° , respectively. Since ρ_z has only minor influence this quantity was also set constant and equal to ρ_x for most model experiments. We restrict analysis to the landward stations along the central profile (Fig. 1) here.

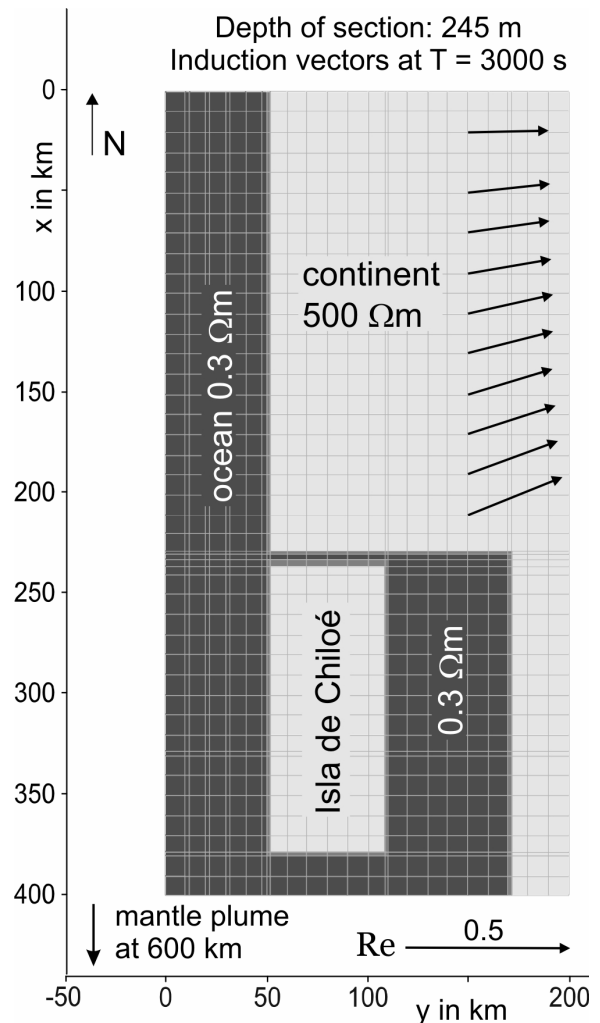


Fig. 2: Plan view of 3-D test model 3 at a depth of 245 m. Real induction vectors at a period of 3.000 s are simulated for a N-S profile in the Longitudinal Valley. The model comprises the ocean, the island of Chiloé, the Gulf of Ancud, and a deep mantle anomaly in the area of the triple junction 200 km to the south of the plot margin.

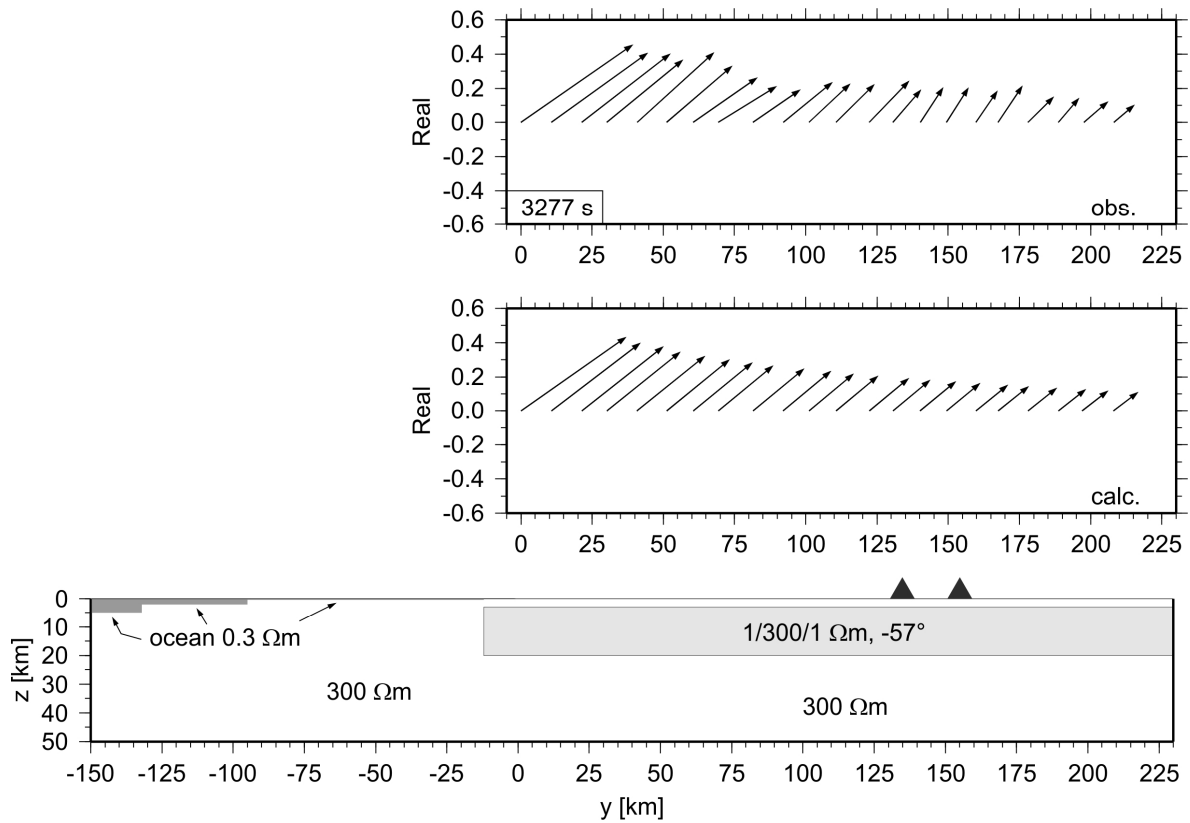


Fig. 3: Simple 2-D model incorporating the Pacific Ocean and an anisotropic layer in the upper crust (bottom). Numbers give resistivities in principal directions and anisotropy strike. Top: Observed real induction vectors along the middle profile in the study area, center: model response. 0 km corresponds to the coastline.

This simple model does already explain the observations with the exception of a minimum of vector length at 75 km (and some data scatter). We carried out numerous tests to constrain upper and lower boundaries of the anomalous layer. Without going into further detail here it may be concluded that one cannot resolve (as might be expected) the thickness of the anisotropic layer; it may well reach into the lower crust until Moho depths. The crust-mantle boundary lies at 35-45 km depth in South Chile as inferred from seismological studies (e.g., Krawczyk et al. 2006). On the other hand the upper crust has to show an anisotropic signature; anisotropy confined to the lower crust or even the upper mantle alone is not compatible with observations. It is not easy to constrain the upper limit of the layer since, at short periods, induction vectors show more local (also 3-D) features which are difficult to implement.

The minimum of vector lengths at ~ 75 km may be accounted for by introducing a homogeneous and isotropic block, as shown in Fig. 4a. So far this model yields the best fitting response. Note that anisotropy persists along the whole profile and even extends below the volcanic arc (where induction vectors are small but still deflected) and into Argentina, east of the easternmost site location. The model in Fig. 4a also includes well-conducting sediments ($\rho = 10 \Omega\text{m}$) in the Central Depression and the Bío-Bío valley. The thickness of these sediments is not known and it was arbitrarily set to 2 km here. Finally, Fig. 4b shows the modeled and measured transfer functions for real and imaginary parts at all periods along the central profile. Besides responses at short periods (and at long periods for the imaginary part) the data fit seems reasonable.

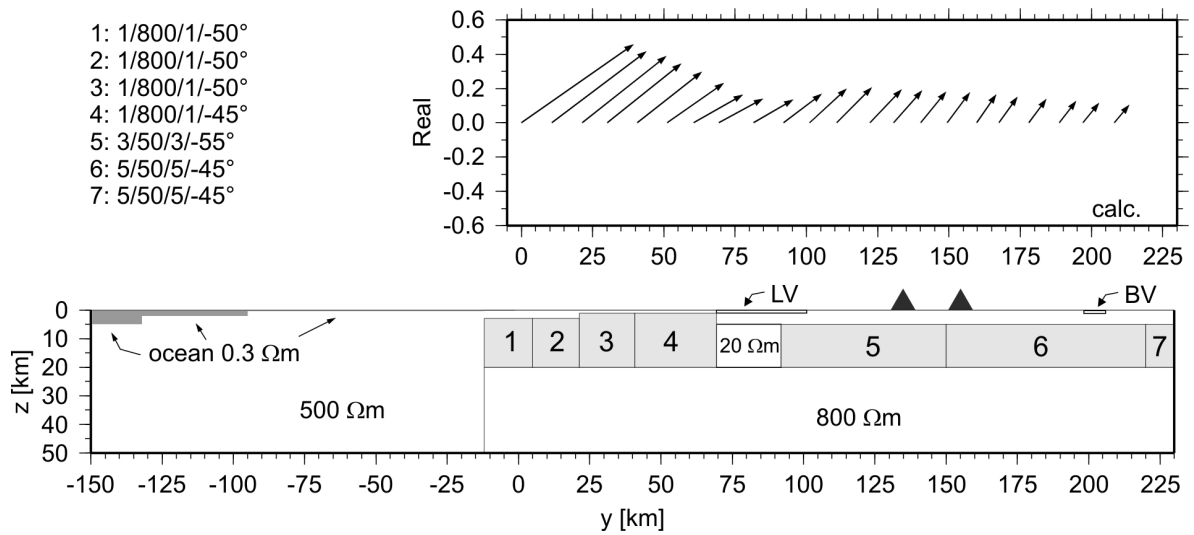


Fig. 4a: 2-D anisotropic model yielding the (so far) best fitting response. The anisotropic layer is broken by an isotropic block; in addition the sediments of the Longitudinal Valley (LV) and below the Bío-Bío river (BV) are introduced as a good conductor. Upper left corner shows resistivities of anisotropic blocks in principal directions and strike angle.

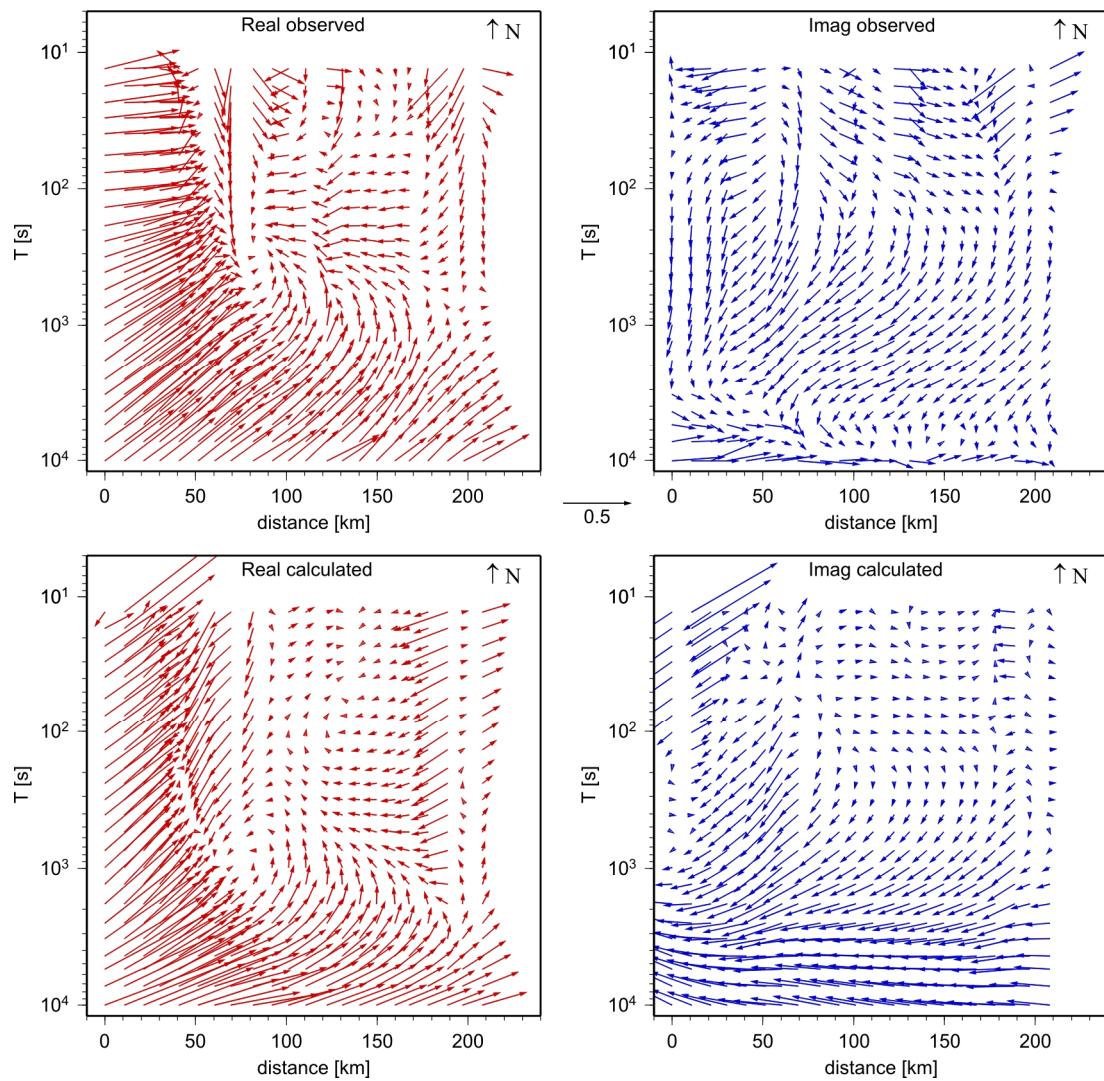


Fig. 4b: Comparison of model response (bottom) with data (top) for all periods along the profile (left: real, right: imag. parts).

Discussion

The overall preference direction of electrical conductivity agrees well with the pattern of faults in the South-Central Andes, striking obliquely to the continental margin as shown in Fig. 5 (see Melnick et al. 2006). The most prominent one is the N10°E striking Liquiñe-Ofqui Fault Zone (LOFZ) which extends from the triple junction area until 38°S, where it terminates at the Bío-Bío-Aluminé Fault (BBAF). The LOFZ is assumed to largely control volcanism in S. Chile (e.g., Cembrano et al. 1996) because many of the Quarternary and active volcanoes are aligned along this lineament. But electrically this mega shear zone is apparently of much less importance than the NW-SE striking fault system, which might be regarded as offering pathways for deep fluids. The most prominent ones crossing the MT profiles are mapped, e.g., as Lanalhue Fault (LFZ) and Mocha-Villarrica Fault (MVZ). The anisotropic model hints at an even more fractured upper (perhaps also lower) crust; individual faults are not resolvable with this approach. The fact that all stations in S. Chile display induction vectors pointing obliquely to the trench and the volcanic front will make it difficult to resolve single faults with full, isotropic 3-D models. Further stations in the surroundings of promising candidates

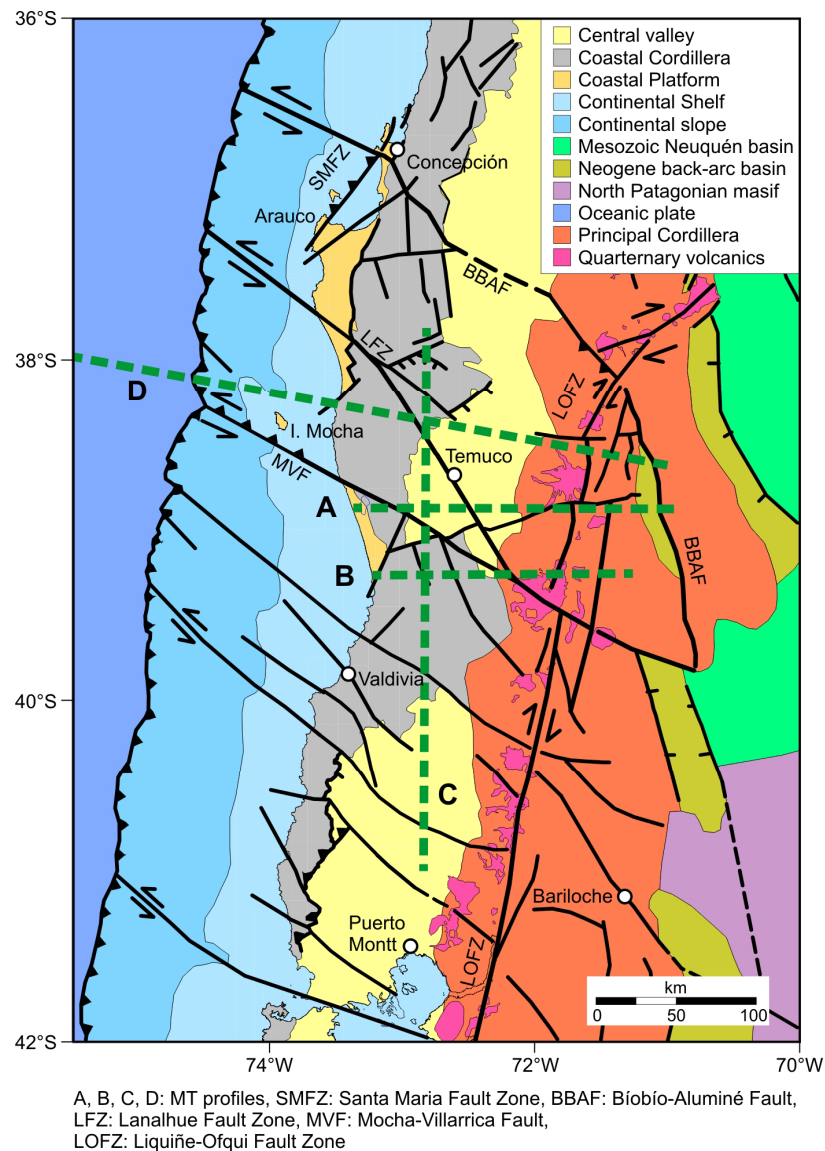


Fig. 5: Geological and tectonic map of the South-Central Andes, modified after Melnick et al. (2006). A-D are the MT profiles measured in 2000 and 2004/05.

(e.g., Lanalhue Fault) would be necessary to accomplish this task.

Unfortunately the model in Fig. 4 explains the impedances only in a crude manner. For the time being we have been unable to construct a model which satisfactorily fits both magnetotelluric and vertical magnetic field observations; this constitutes the next task for the evaluation of the data set. However, several features of the model presented here correspond to the isotropic impedance model by Brasse and Soyer (2001), in particular the enhanced conductivity below the Central Depression and the generally higher conductivities beneath the volcanic arc.

The characteristics of induction vectors outside the area depicted in Figs. 1 and 5 is not known and it would thus be a rewarding effort to establish further sites to the north of the Bío-Bío Fault and to the south in archipelagic Chile.

Acknowledgements

We are grateful for the support of the Universidad de Concepción, in particular to K. Bataille, for help in logistical issues. We also acknowledge the contribution to the field measurements by A. Gerner, A. Manzanares, M. Muñoz, F. Sepúlveda, and T. Worzewski, as well as the support of J. Muñoz (Chilean National Service of Geology and Mining, SERNAGEOMIN) and the National Forest Corporation of Chile (CONAF). The campaign would not have been possible without local farmers and particularly the Mapuche people letting us establish our instruments on their lands. This is publication GEOTECH-213 of the TIPTEQ programme, funded by the German Federal Ministry of Education and Research (BMBF) and the German Science Foundation (DFG).

References

- Brasse, H. and Soyer, W. (2001): A magnetotelluric study in the Southern Chilean Andes, *Geophys. Res. Lett.*, 28 (19), 3757-3760.
- Cembrano, J., Hervé, F., and Lavenu, A. (1996): The Liquiñe Ofqui fault zone: a long-lived intra-arc fault system in southern Chile, *Tectonophysics*, 259, 55-66.
- Kapinos, G. & Brasse, H., and Chave, A. (2006): An Amphibious Magnetotelluric Experiment at the South Chilean Continental Margin, this volume.
- Krawczyk, C.M., Mechie, J., Tašárová, Z., Lüth, S., Stiller, M., Brasse, H., Echtler, H., Bataille, K., Wigger, P., and Araneda, M. (2006): Geophysical Signatures and Active Tectonics at the South-Central Chilean Margin, in: *The Andes from Top to Bottom: Structure and Processes of an Subduction Orogen* (ed: O. Oncken), *Frontiers in Earth Sciences*, Springer-Verlag, Heidelberg, in review.
- Li, Y. (2002): A finite element algorithm for electromagnetic induction in two-dimensional anisotropic conductivity structures, *Geophys. J. Int.*, 148, 389-401.
- Mackie, R., Smith, J., and Madden, T.R. (1994): Three-dimensional modeling using finite difference equations: The Magnetotelluric example, *Radio Science*, 29, 4, 923-935.
- Melnick, D., Rosenau, M., Folguera, A., and Echtler, H.P. (2006): Neogene tectonic evolution of the Neuquén Andes western flank (37-39°S), in: Kay, S.M. & Ramos, V.A. (eds.): *Evolution of an Andean margin: A tectonic and magmatic view from the Andes to the Neuquén Basin (35-39°S)*, *Geol. Soc. Am. Spec. Paper*, 407, doi:10.1130/2006.2407(04), in print.
- Pek, J. and Verner, T. (1997): Finite difference modelling of magnetotelluric fields in 2-D anisotropic media, *Geophys. J. Int.*, 128, 505-521.

The EMTESZ project: Induction vectors, strikes and 2-D modelling

Anja Kreutzmann¹, Anne Neska², Heinrich Brasse¹, and EMTESZ Working Group

¹ FU Berlin, FR Geophysik, Malteserstr. 74-100, D-12249 Berlin

² Polish Academy of Sciences, Belsk, Poland

E-mail: anja@geophysik.fu-berlin.de

Introduction

As one of the largest tectonic boundaries in Europe, separating the East European Platform from the Paleozoic mobile belts of central and western Europe, the Trans-European Suture Zone (TESZ) can be traced from the Black Sea through Poland and southern Scandinavia until the North Sea.

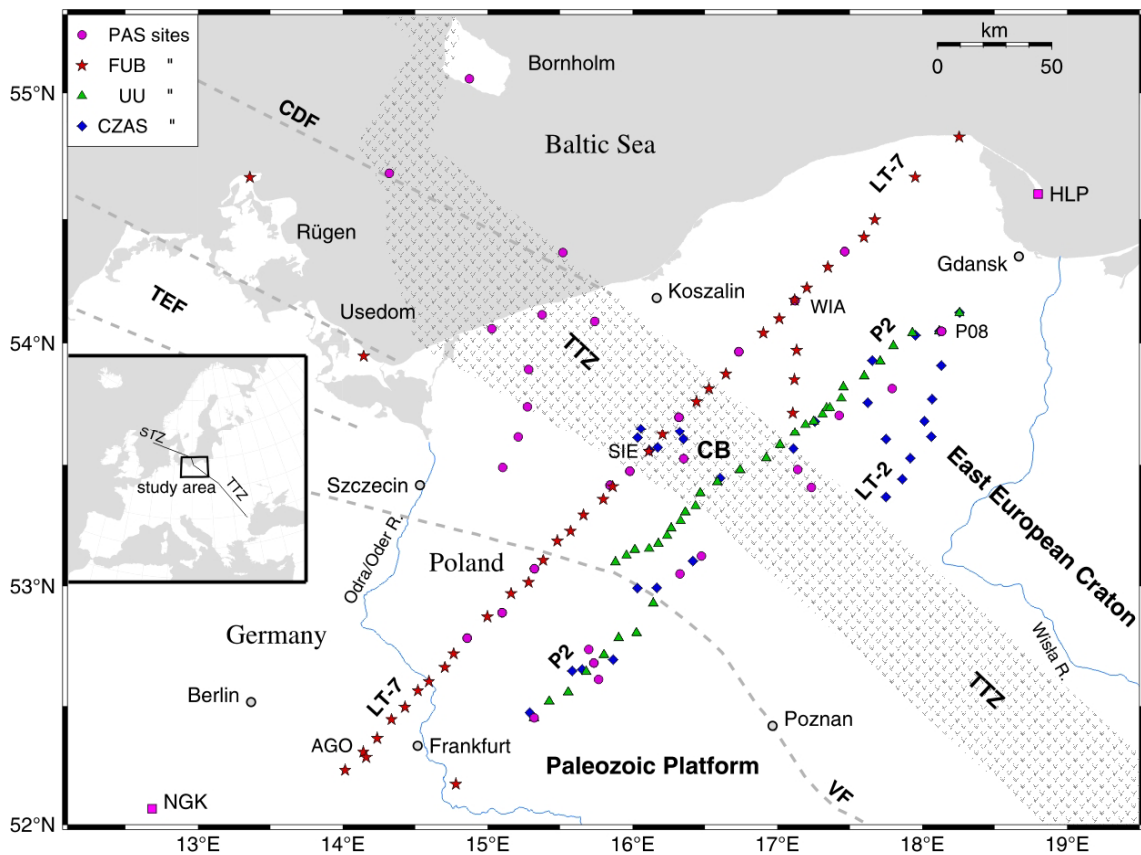


Fig. 1 Distribution of magnetotelluric sites from various institutions in Poland, Germany and the island of Bornholm (Denmark). PAS: Polish Academy of Sciences, FUB: Free University of Berlin, UU: Uppsala University, CZAS: Czech Academy of Sciences. TTZ and STZ are the Teisseyre-Tornquist and Sorgenfrei-Tornquist zones, transitions from the East European Craton (EEC) to the Paleozoic belts of Central Europe. CB: Czaplinek Block, CDF: Caledonian Deformation Front, VF: Variscan Front, TEF: presumed traces of Trans-European Fault system, termed Stralsund and Anklam Faults in NE Germany; its prolongation into Poland is currently unknown.

In central Europe the TESZ coincides with the Tornquist-Tesseyre Zone (TTZ, Fig. 1), which runs in a SE-NW direction through Poland and below the Baltic Sea. Several seismic refraction and reflection experiments have been carried out (POLONAISE and the earlier LT surveys); in the framework of the current proposal the lines P2 and LT7 are of special significance (e.g., Dadlez et al. 2005). Major results include a sedimentary thickness below the TTZ of more than 11 km, sharp lateral boundaries, a

deepening Moho from 32-35 km in the SW to 40-45 km in the NE and a reflector below the TTZ at depths of 50-55 km.

To study the electrical conductivity structure of the Trans-European Suture Zone (TESZ) a multi-national research effort (EMTESZ Pomerania, EMTESZ = **E**lectromagnetic Study of the **T**rans-**E**uropean **S**uture **Z**one) has carried out magnetotelluric measurement across the area of interest (see fig. 1). Scientists from 7 European countries (Czech Republic, Finland, Germany, Poland, Russia, Sweden, and Ukraine) participate in this working group.

The measurements have been mainly carried out in the years 2003 and 2004. In 2005 only site AGO was set up and at SAR additional measurement have been made to improve the signal to noise ratio. The main problem were the DC railroads in Poland. Remote reference analyses of the data (WIA as reference site) after Egbert (1986) resulted in useful stable transfer functions in most cases.

Induction vectors

For short periods the vectors are very small. For increasing periods the induction vectors become larger at all sites. On the Precambrian platform in the northeastern part of the profile real vectors reach a maximum length of 0.7 with direction NNE (fig. 2). At the border of the TTZ there is a sharp transition. The vectors are considerably shorter and at the border they rotate to NE and E. In the middle part of the profile the direction of the real vectors changes to NW and further south near the VF they change to SE.

For longer periods length of the real vectors decreases. In the northern part of the profile they are approximately aligned with the profile direction. In the transition zone and in the area of the salt domes they rotate in changing directions and their lengths become very small. In the southwestern part (Paleozoic side) the vectors are also small and show direction SSE.

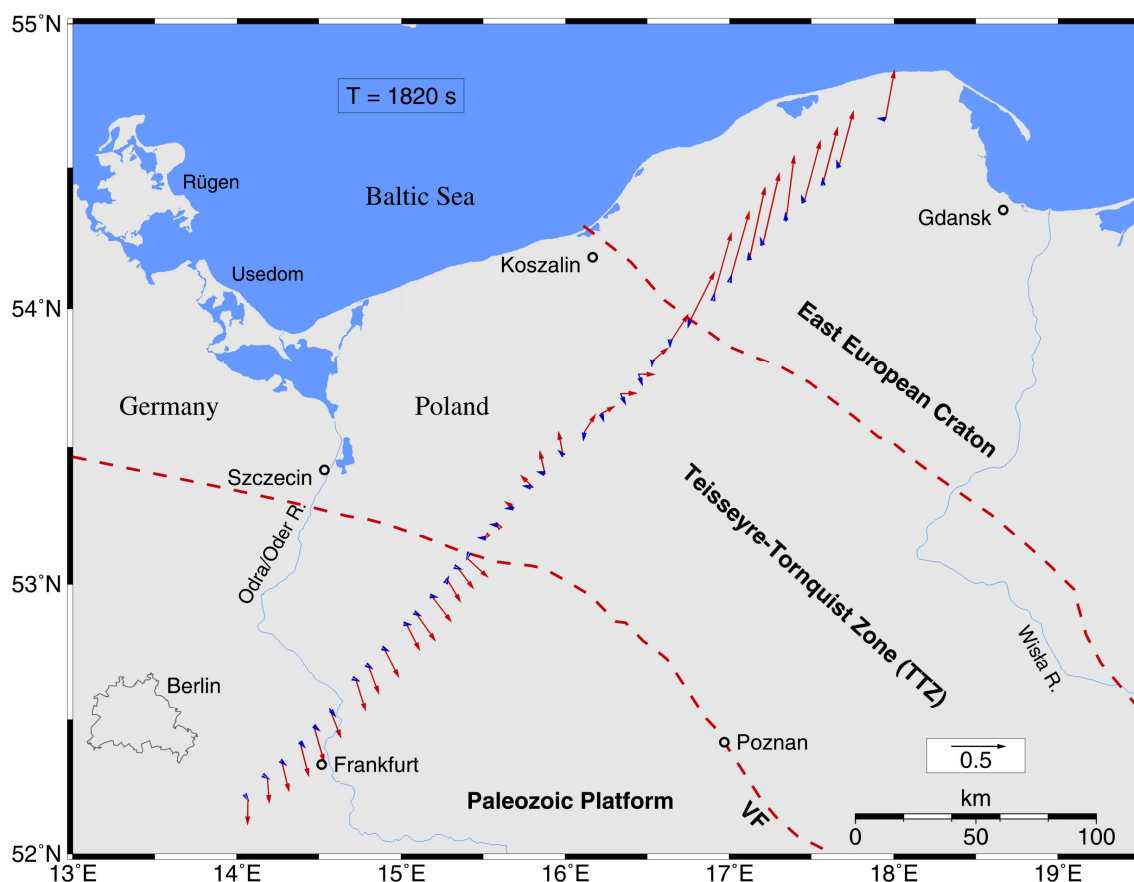


Fig. 2 Induction vectors for profile LT-7 for a period of 1820 s. Real vectors are shown in red, imaginary vectors in blue.

The directions of the vectors compared to the assumed strike of the TTZ and the fact, that the vectors show strong variations in the direction along the profile lead to the conclusion, that this dataset cannot be explained by only 2-D structures.

Strike analysis

Fig. 3 shows the strike angles calculated after the multi-site multi-frequency algorithm of McNeice and Jones (2001) for single sites. For the southern part of the profile (20 sites, DAM – ZOL) the angle varies only slightly with distance and period. From site ZOL to the Northeast the angles jump and in the northern part (GRA – OST) a strong trend is obvious. Nevertheless, it was possible to calculate a common strike angle of -32° for all sites. For the stated parts in the southwest and northeast the calculated angles are 21° and -25° , respectively.

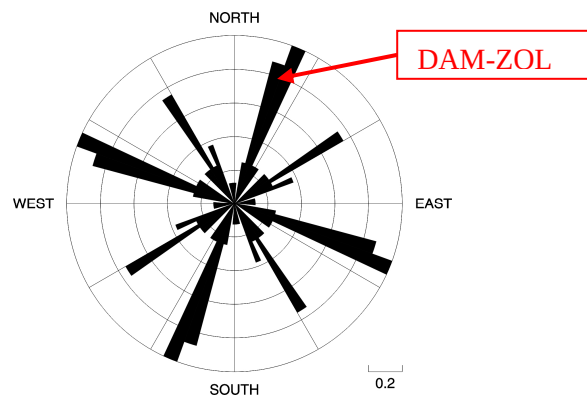


Fig. 3 Strike analyses: Single-site multi-frequency after McNeice and Jones.

Tentative 2-D model

Although the structures beneath the profile seem to change their strike direction and/or show three-dimensional behaviour, in a first attempt the conductivity distribution was interpreted in 2-D. The 2-D models were calculated with the CG-FD inversion algorithm after Rodi and Mackie (2001). First the data were rotated by -60° . This angle does not coincide with the analysis shown above. But due to the three-dimensionality and in consideration of the induction vectors this angle seems the best approximation to fit the 3-D data onto a 2-D model. It was calculated from analysis of horizontal magnetic transfer functions by Varentsov (this volume and pers. comm.).

In a first inversion step TM mode and induction vectors have been inverted. The resulting model was used as the input model for the inversion of all available components: TE, TM, and induction vectors as well as static shift. The models have been tested with different smoothing parameters τ , varying from 5 to 30. In this case τ was set 20, because for lower values the model contains artefacts, i.e. structures not necessary to explain the data. The data fit for $\tau = 20$ is not much worse than for lower values. In the model shown below one can clearly identify the transition zone between the resistant Precambrian shield at the right and the better conducting Paleozoic platform at the left. The area of the TTZ is controlled by local inhomogeneities beneath the upper good conducting zone caused by saline pore water. Beneath the model in fig. 4 typical transfer functions of different parts of the profile and the model fit are shown. North of the TTZ (MIR, right hand side) the curves show an increasing resistivity with period with a splitting of the components. Going southwards across the TTZ the splitting changes sign (GRA). In the middle of the profile (KUZ) an increase of the splitting is obvious with a characteristic TE phase which is probably caused by the local inhomogeneities in the subsurface. Near the southern end of the profile the undulation vanishes again (AGO) but the splitting persists.

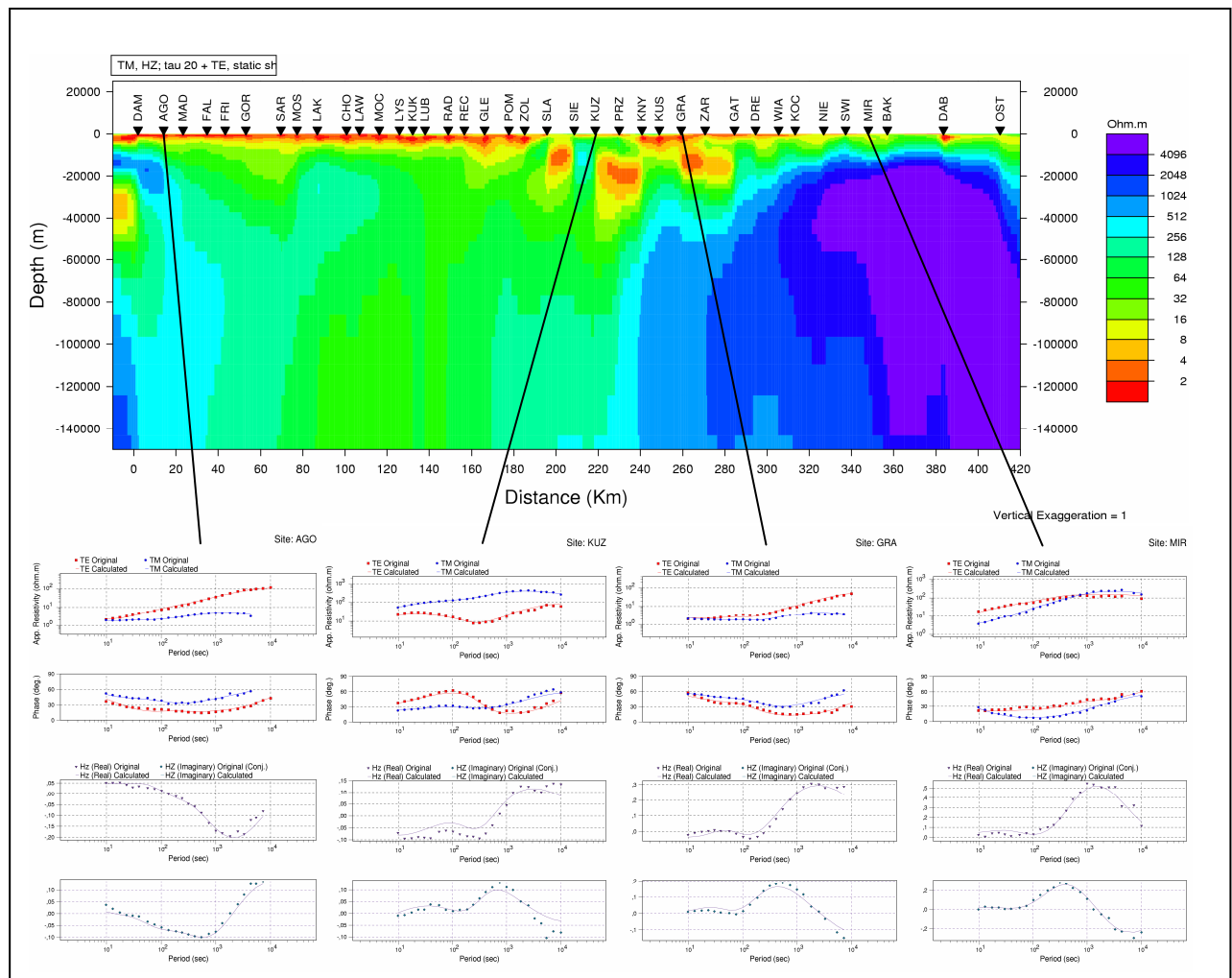


Fig. 4 2-D Model calculated with the algorithm after Rodi and Mackie. Beneath the fit between data and model responses is shown for some representative sites.

References

- G.D. Egbert and J.R. Booker. *Robust estimation of geomagnetic transfer functions*. Geophys. J. of the Royal Astronomic Soc. 87, p. 173-194, 1986.
- Dadlez, R., Grad, M., and Guterch, A., *Crustal structure below the Polish Basin: Is it composed of proximal terranes derived from Baltica?* Tectonophysics, 411, 111-128, 2005.
- G.W. McNeice and A.G. Jones. *Multi-site, multi-frequency tensor decomposition of magnetotelluric data*. Geophysics, 66, p. 158-173, 2001
- W. Rodi and R.L. Mackie. *Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2D magnetotelluric inversions*. Geophysics, 66, p. 174-187, 2001.

Acknowledgements

EMTESZ-Pomerania Working Group: T. Ernst, J. Jankowski, W. Jozwiak, A. Neska, (Inst. of Geophys., Pol. Acad. Sci., Warsaw); H. Brasse, A. Kreutzmann (Free Univ. of Berlin); N. Hoffmann (Fed. Inst. for Geosci. and Nat. Res., Berlin); Iv.M. Varentsov, E. Sokolova, E. Martanus (Goelectromagn. Res. Cent., Rus. Acad. Sci., Troitsk, Moscow region); V. Kouznetsov, N. Palshin (Shirshov Inst. of Ocean., Rus. Acad. Sci., Moscow); L. Pedersen, M Smirnov (Uppsala Univ.); G. Schwarz (Geol. Surv. of Sweden, Uppsala); V. Cerv, J. Pek, O. Praus (Geophys. Inst., Czech Acad. Sci., Prague); T. Korja, K. Pajunpaa (Oulu Univ.); B. Ladanivsky, I. Logvinov (Inst. of Geophys., Ukr. Acad. Sci., Kiev). We acknowledge the contribution of M. Becken, G. Kapinos, I. Lahti, J. Marianuk, M. Neska, D. Polag, J. Reda, K.Vaitinen, and T. Worzewski.

Imaging the deep roots of the San Andreas Fault Zone at Parkfield, CA, with magnetotelluric measurements

M. Becken, O. Ritter, U. Weckmann, W. Wilhelms, J. Hübner, T. Branch,
P. Bedrosian, S. Park and M. Weber

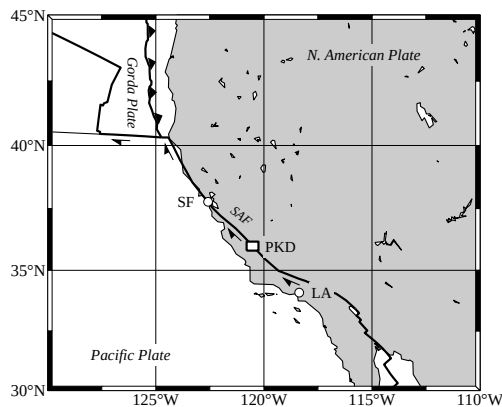


Figure 1: Map of western North America. The San Andreas Fault zone separates the Pacific and the North American Plates. Arrows indicate the right-lateral motion along the transform fault with a velocity of app. 4.9 cm/a . The box in the central part of the map indicates the working area near Parkfield, CA. SF San Francisco; LA Los Angeles; PKD Parkfield.

Introduction

With the magnetotelluric (MT) project Deep-Root, we aim to image the electrical conductivity distribution of the deep structures (brittle-ductile transition zone and the ductile roots) of the San Andreas Fault (SAF) zone at Parkfield, CA (Figure 1). The experiment addresses the dynamics of interplate transform faulting and contributes to the site characterisation of the San Andreas Fault Observatory At Depth (SAFOD) – a major Earth Science initiative to study the in-situ physical and chemical conditions of the San Andreas interplate transform fault (Hickman et al., 2004). The project Deep-Root is part of the ICDP.

Previous MT studies of Unsworth and Bedrosian (2004) played an important role to pin-point the location of the SAFOD site. The

electrical conductivity models from these studies suggested the presence of fluids, causative for the so-called fault zone conductor (FZC) on the northeastern side of the fault (North-American plate) and thereby provided complementary information to the seismic velocity structure and other geophysical site characterisation studies. It was a remarkable observation that the FZC occupies a volume with abundant seismicity. As fluids seem to be intimately linked to the brittle deformation processes within active fault zones, the FZC was interpreted in terms of over-pressured fluids, which in turn prevent the fault from rupturing. From borehole fluid pressure measurements in the SAFOD well, however, it was recognised, that fluids are over-pressured on the Pacific plate and under-pressured on the North American plate. This was an unexpected result taking into account the MT model.

The previous MT models were limited to a few kilometres in depth due to short profile lengths. In spring 2005, we acquired a huge volume of new magnetotelluric (MT) data on a $50 \times 50\text{ km}^2$ array and a 50km long profile in the vicinity of the SAFOD site. Overall, we recorded at 45 combined long-period / broad-band stations additional 41 broad-band stations along a profile coincident with a 50 km long seismic reflection/refraction profile (Hole et al., 2004; Ryberg et al., 2004). The profile data were used to derive a two-dimensional (2D) electrical conductivity model down to a depth of more than 25 km. The array data will give us the unprecedented opportunity to develop a three-dimensional (3D) electrical conductivity model in the surrounding of the SAFOD (see Figure 2). In this contribution, we discuss the profile data only, because processing and analysis of the array data is not yet completed.

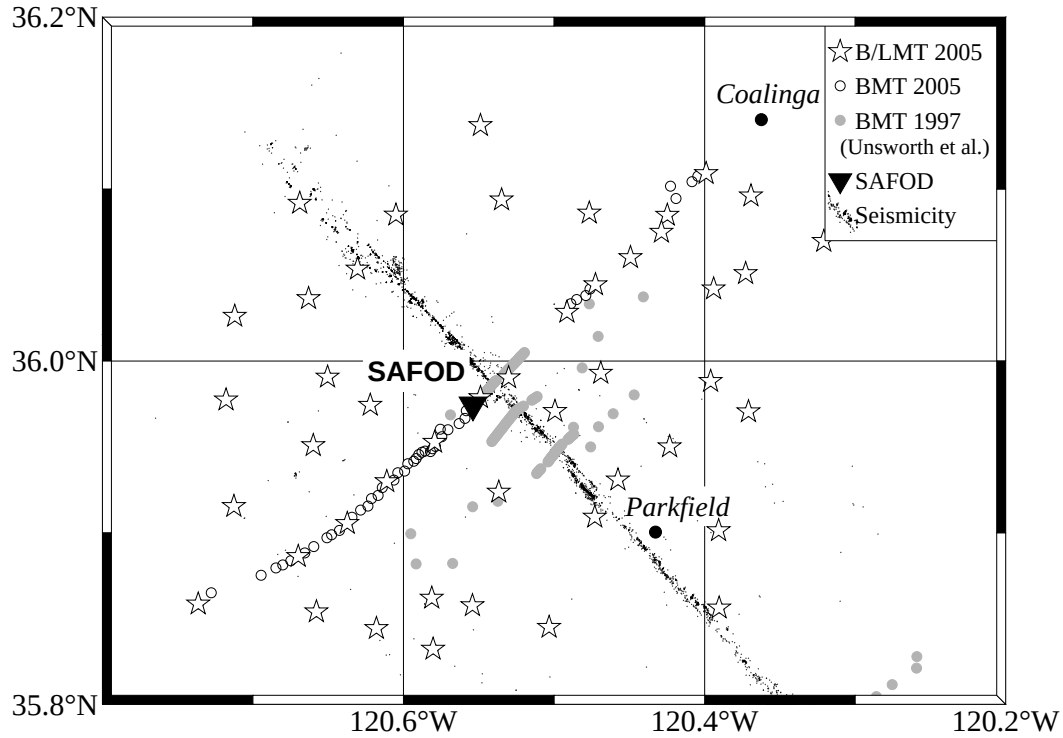


Figure 2: MT sites in the Parkfield area. New broad-band sites (BMT) are shown as hollow circles; new combined broad-band/long-period sites (B/LMT) are indicated by hollow stars. Existing BMT data from Unsworth et al. (1997) are shown as gray dots. The seismicity along the San Andreas Fault zone is depicted with black dots.

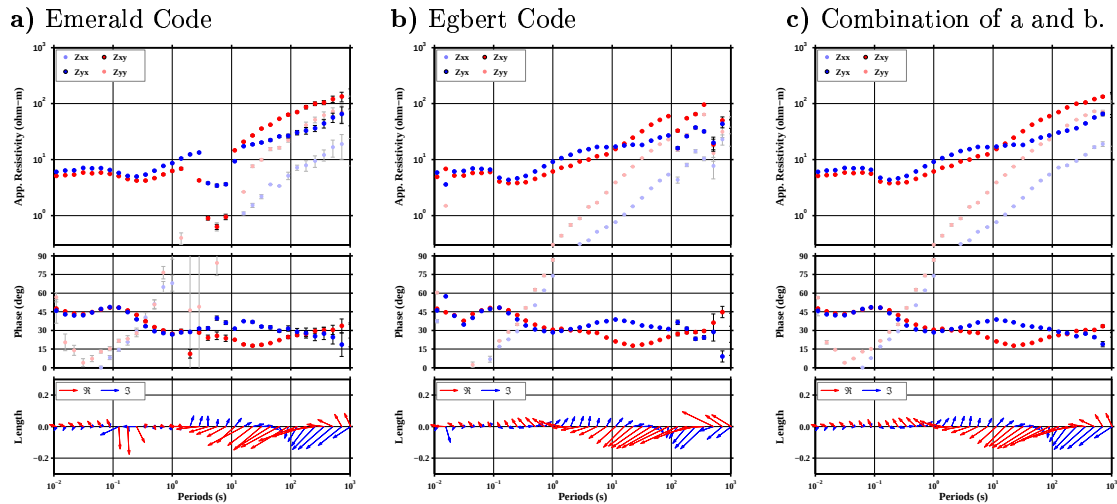


Figure 3: MT impedance tensor and induction vectors at broad-band site 132, located 8 km west of the SAF. **a)** The Emerald code yields stable estimates at periods longer than 100 s, but produces biased transfer functions in the dead band without a manual pre-selection scheme as described in Weckmann et al. (2005). **b)** The Egbert code yields good estimates in the dead band using a remote reference but erratic estimates at long periods (>100 s). **c)** The combination of the two methods yields good data for a broad period range.

Data processing and analysis

For processing of time series, we used a combination of the robust remote-reference processing of Egbert and Booker (1986) the robust code of Ritter et al. (1998) (Emerald). Egbert's code yielded superior results in the dead band (0.2–10s), when a good reference site was available. This was the case for almost all broad-band sites due to the great number of simultaneously operated instruments (up to 10 broad-band stations). However, even with a remote reference included, estimated transfer functions were erratic at periods longer than 100s in case of 3 days long broad-band recordings (at long-period sites with recording time longer than 10 days, reliable transfer functions could be estimated also at periods longer than 100s). Hence, there is coherent noise in the data, possibly arising from the BART DC-railway system or from pulsed pipelines. Using the Emerald code and employing the automatic phase criterion (i.e. segments with phases out of the quadrant are rejected in robust stacking; cf. Weckmann et al., 2005) and a coherency threshold of 0.95, stable transfer functions were obtained also for periods longer than 100 s. Hence, it is by a pre-selection criterion possible to determine noisy segments and remove them from subsequent processing. However, to improve the data quality within the dead band, a manual selection in frequency domain (Weckmann et al., 2005) would have been necessary. An example of the transfer functions concatenated from Egbert's code and the Emerald code is shown in Figure 3.

Impedance data as well as induction vectors show a predominant strike direction aligned with the San Andreas Fault zone. We observe, however, 3D effects, mainly at intermediate periods between 10–100s. For an impedance tensor analysis and decomposition, we use the ellipticity criterion of Becken and Burkhardt (2004), which reduces to the classical galvanic distortion analysis in presence of a regional 2D structure. The existence of a 2D structure is inferred from the linear polarisation of principal electric and magnetic fields, which is expressed in terms of linearly polarised columns of the tensor. The coordinate system in which the sum of squared ellipticities weighted with their variances is minimal for a range of periods is determined using an automatic algorithm. This coordinate system is considered as the strike direction if the ellipticities are indeed close to zero and the dis-

tortion angles are constant over the given range of periods.

An example of the ellipse parameterisation is shown in Figure 4b for the impedance data of site 020 shown in Figure 4a. Impedances and induction vectors in Figure 4a are rotated to 45° clockwise, i.e. the y-axis is aligned with the SAF. Ellipticities at short periods (<3 s) and at long periods (>100 s) vanish in this coordinate system. The electric field rotation angles, i.e. the distortion angles, depicted in the lower panel of Figure 4b, are constant over the respective period ranges where the ellipticities vanish, but different at short and at long periods. Therefore, two galvanic distortion matrices should be incorporated to decompose the data: one distortion matrix at short periods and one at long periods. On the other hand, undistorted data do in this case not significantly differ from simply rotated impedance data, which permits an inversion of the rotated impedances directly. At intermediate periods, 3D effects are identified from non-vanishing ellipticities and period dependent distortion angles, which coincides with a slight rotation of induction vectors.

Note, that the estimated strike direction is in good agreement with the induction vectors (though the induction vectors at long periods are strongly influenced by the Pacific Ocean and therefore do not necessarily reflect the same conductivity anomaly as the impedance data).

Site 020, which has been discussed above, is representative for most of the sites in terms of the dimensionality of the impedance tensor and its rotational properties, although strike directions at short periods are not as consistent along the profile as at long periods. In summary, the distortion analysis and the induction vectors suggest that the rotation angle of $45^\circ \pm 5^\circ$ is appropriate for a 2D interpretation of the short and long period data. The intermediate period range exhibiting 3D effects should be excluded from inversion or given less weight by increasing the error bars.

2D Interpretation

Inversion strategy: We use the 2D smooth inversion code of Mackie et al. (1997) as it is implemented in the Winglink software package. Using this program, we jointly invert the presumed E- and H-polarisation apparent resistivities and phases and the projection of induction vectors onto the profile line. Large error floors,

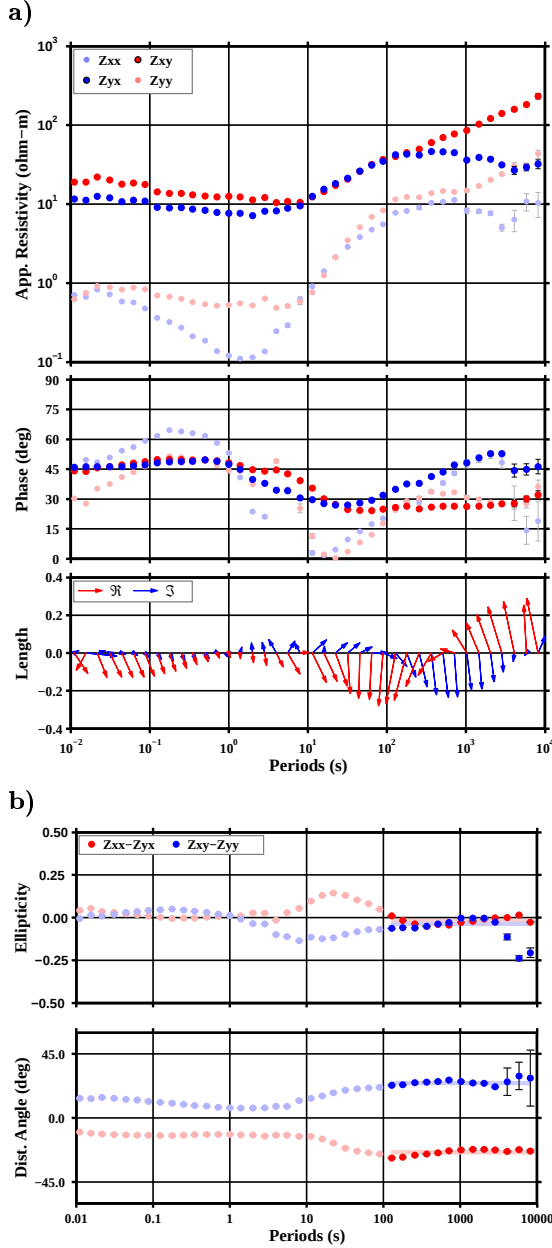


Figure 4: B/LMT site 020, located app. 1 km east of the surface trace of the SAF. **a)** MT apparent resistivities, phases and induction vectors (upper, middle and lower panel, respectively). The coordinate system is rotated to $+45^\circ$, i.e. the x -axis is in profile direction the y -axis is aligned with the SAF. **b)** Ellipticities and galvanic distortion angles obtained from decomposition of the MT impedance tensor.

assigned to the apparent resistivities (E-Pol.: 100%; H-Pol.: 25%), avoid bias of the model associated with static shift effects. Emphasis was instead put on the phases (2° error floor) and induction vectors (0.02 error floor). The regularisation parameter, trading off between model roughness and data fit, is determined by trial and error.

The choice of the starting model is important in this context, because the ocean effect has to be taken into account. Modelling results as well as the similarity of induction vectors along the profile at periods longer than 2000s suggest, that the effect of the ocean becomes significant at these periods. To reproduce the long-period induction vectors with the pacific ocean as conductive anomaly, the crust between the coast and the measurement area has to be resistive ($> 1000 \Omega m$). Otherwise, the spatial decay of the anomalous fields induced in the ocean would be too strong and the effect at Parkfield would be underestimated. Therefore, if we did not incorporate a resistive crust in the starting model, the inversion would attempt to simulate the ocean effect with an extremely large, unrealistically conducting anomaly close to the measurement area.

2D Models: Data analysis and 2D modelling results of the new profile data together with existing data from the previous experiments reveal the conductivity structure of the crust from the top to the bottom (cf. Figure 5). We also recover the previous local MT model of Unsworth and Bedrosian (2004), which can now be looked at in a regional context. However, due to the 3D complications described above, there exist currently concurrent versions of the model, which agree in its major features but differ in minor aspects. Therefore, the model in Figure 5 is a preliminary result.

The regional conductivity model clearly shows that the seismically active zone (red dots in Figure 5 indicate the earthquake locations, taken from the latest earthquake catalogue of Thurber & Zhang, personal communication) along the SAF zone is bent around the north-eastern edge of an isolated, large granitic body (Salinian Granite). An upper wedge of the Granite was drilled by the SAFOD main hole; its lateral extensions were previously modelled from surface magnetic anomaly maps. The conductivity model traces the granite down to a

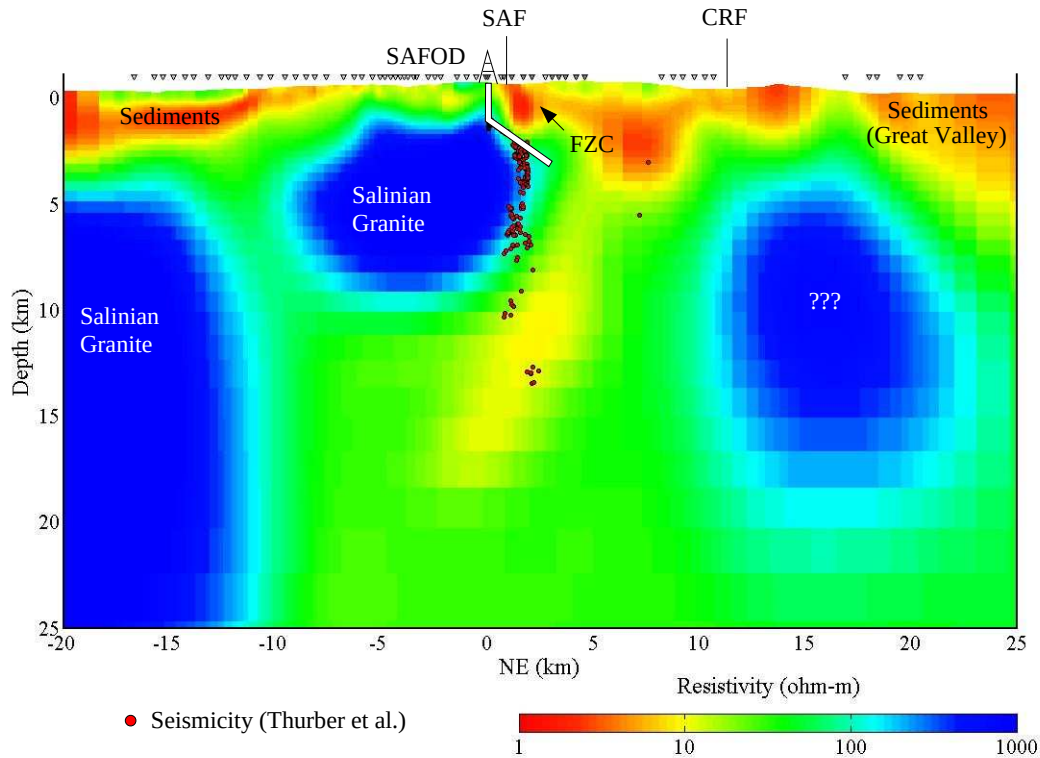


Figure 5: Preliminary resistivity model obtained from joint 2D inversion of E- and H-polarisation apparent resistivities and induction vectors. The SAFOD main hole is indicated with a white patch. Seismicity within 3 km away from the section is depicted with red dots. SAFOD San Andreas Fault Observatory At Depth; SAF San Andreas Fault; CRF Coast Range fault. See text for details.

depth of 8 kilometres and thereby suggests a lithological contrast in the vicinity of or directly at the plane of seismicity.

Modelled conductivities in the brittle portion of the SAF are not high enough for a significantly increased fluid volume and, associated with that, enhanced porosity of fractured rocks directly within the fault zone. This means that either there is no significant increase in the bulk porosity or there is only a narrow zone of increased porosity - too narrow to be resolved with magnetotelluric measurements.

However, we do resolve a series of likely connected conductors within the upper 5 km of the crust - one of them being the previously described Fault Zone Conductor of Unsworth and Bedrosian (2004). A broad zone of enhanced conductivity is located two to five kilometres east of the active SAF and extends to a depth of at least 5 km. This zone provides a linkage between the surface conductors, in particular the FZC topping the seismic region, and the lower

crust. It also provides an apparent link of the Coast Range Fault (15 km to the east) and the SAF at depth.

The middle and lower crust (>10 km) below the SAF zone is generally conductive (<20 ohm-m) in a 20 km wide zone, which is enclosed by the resistive Salinian Granite in the southwest and an isolated resistor to the northeast.

Outlook

In this paper, we focused on technical aspects of the new MT data across the SAF and the generation of a 2D model. Future work comprises (i) a full 3D inversion of the MT array data, (ii) the integration of the MT image with other geophysical models (seismic reflection and refraction), (iii) to understand the meaning of the geophysical models in terms of the mechanics and dynamics of the SAF at depth.

References

- Becken, M., Burkhardt, H., 2004. An ellipticity criterion in magnetotelluric tensor analysis. *Geophys. J. Int.* 159, 69–82.
- Egbert, G. D., Booker, J. R., 1986. Robust estimation of geomagnetic transfer functions. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 87, 173–194.
- Hickman, S., Zoback, M., Ellsworth, W., 2004. Introduction to special section: Preparing for the San Andreas Fault Observatory at Depth. *Geophys. Res. Lett.* 31, L12S01.
- Hole, J. A., Ryberg, T., Sharma, A. K., Fuis, S. G., 2004. Seismic velocity structure from a refraction - reflection survey across the san andreas fault at safod. AGU Fall meeting, San Francisco.
- Mackie, R., Rieven, S., Rodi, W., Jul. 1997. Users manual and software documentation for two-dimensional inversion of magnetotelluric data. GSY-USA, Inc., 2261 Market St., Suite 643, San Francisco, CA 94114, User Documentation.
- Ritter, O., Junge, A., Dawes, G. J. K., 1998. New equipment and processing for magnetotelluric remote reference observations. *Geophys. J. Int.* 132, 535–548.
- Ryberg, T., Hole, J. A., Fuis, G. S., 2004. Controlled source p and s wave tomography at safod. AGU Fall meeting, San Francisco.
- Unsworth, M. J., Bedrosian, P., 2004. Electrical Resistivity structure at the SAFOD site from magnetotelluric exploration. *Geophys. Res. Lett.* 31, L12S05.
- Unsworth, M. J., Malin, P. E., Egbert, G. D., Booker, J. R., 1997. Internal structure of the San Andreas fault at Parkfield, California. *Geology* 25, 359–362.
- Weckmann, U., Magunia, A., Ritter, O., 2005. Effective noise separation for magnetotelluric single site data processing using a frequency domain selection scheme. *Geophys. J. Int.* 162 (3), 635–652.

Processing and analysis of MT array data from the San Andreas Fault around Parkfield, California

Wenke Wilhelms*, Michael Becken, Ute Weckmann, Oliver Ritter†

Idea

Magnetotelluric array data that were recorded by simultaneously operated instruments can be used to estimate horizontal magnetic transfer functions from the linear relation $\mathbf{H}_h^1 = \mathbf{W}\mathbf{H}_h^2$, where $\mathbf{H}_h^{1,2}$ are the horizontal magnetic fields at two sites 1 and 2 and $\mathbf{W}$ is the 2×2 horizontal magnetic transfer function. These transfer functions can be used (I) to study induction anomalies independent of the eventually distorted electric field (II) to identify time series segments, which yield strongly disturbed estimates of the transfer function $\mathbf{W}$. The latter is the case, if $\mathbf{W}$ differs considerably from an identity matrix (Ritter *et al.*, 1998).

Here, we intend to synthesize an artificial noise-free reference site for later remote reference processing. Such a synthetic dataset can be constructed from clean time series segments, identified from estimates close to the expected transfer function $\mathbf{W}$. Concatenation of time series segments recorded at different locations is problematic, if the spatial dependency of the magnetic fields and of $\mathbf{W}$ is not taken into account. Therefore, we also require the full array response at all times, which we aim to reconstruct from estimated transfer functions between sites with overlapping runtimes.

The Parkfield Array data

In spring 2005, a magnetotelluric (MT) survey was undertaken to study the electric conductivity structure of the San Andreas Fault and its surroundings close to Parkfield (cf. Becken *et al.*, this volume, for a more detailed description of the survey).

Data were recorded at 41 combined broad-band and long-period sites (BMT and LMT) within a 50 km times 50 km array and an additional 40 BMT sites along a profile across the SAF. The LMT and BMT data were collected using up to 30 synchronously operated instruments (cf. Fig.1). Blue stars in Figure 1 indicate LMT sites and red circles indicate BMT sites. Light blue stars are additional LMT sites acquired in a later stage of the survey (S. Park, University of Riverside, CA). The black line marks the surface trace of the SAF according to Rymer *et al.*, (2003). The white star indicates

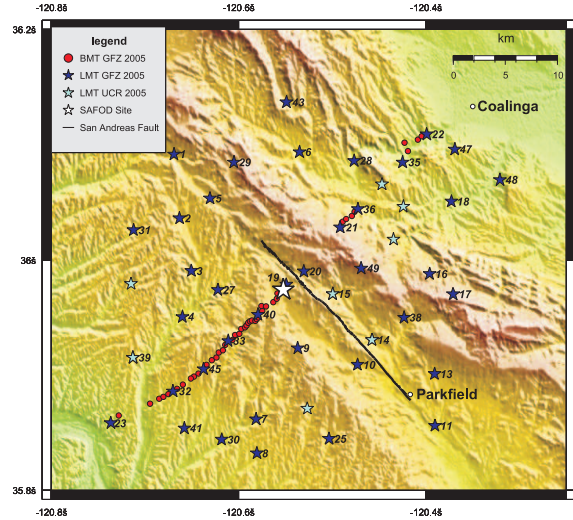


Figure 1: Regional map of the MT survey area around the SAFOD drilling site (white star) near Parkfield, California. Stars denote combined long-period/broad-band sites and red dots denote broad-band sites. The surface trace of the San Andreas Fault is indicated by a black line.

the SAFOD borehole, which is in the middle of the profile. SAFOD (San Andreas Fault Observatory at Depth) is part of EarthScope project. Its aim is to provide data on the composition and mechanical behaviour of a major active fault zone at depth.

MT synchronous time series

The runtime plot in Figure 2 shows all sites and their recording times. Yellow bars mark Castle data, red bars are SPAM data and blue bars are LMT data. The recordings at the first sites start on March 19th and end on May 28th. The sampling frequency for SPAM and Castle data is 50 Hz and for LMT data it is 2 Hz. There are many synchronously operated LMT sites.

An Example of synchronously recorded 5-channel time series at seven sites are shown in Figure 3. Depicted data were recorded using two different flux-gate sensors (Lemi, Magson). Note the coherency of magnetic fields in the given time segment of 36 hours, and the phase shift and amplitude variation from site to site in the electric field.

*University of Leipzig, GFZ Potsdam

†all GFZ Potsdam

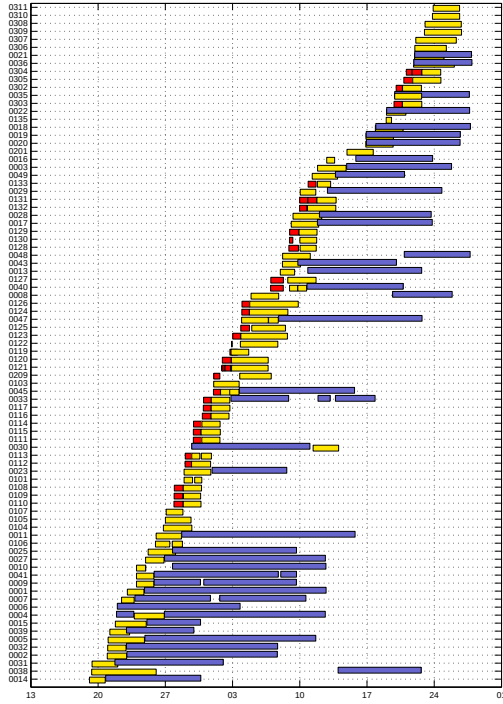


Figure 2: Run time plot of all sites; red bars are SPAM data, yellow bars are Castle (BMT) data and blue bars are LMT data.

Horizontal magnetic transfer functions

Between all simultaneously recording sites of the Parkfield array horizontal magnetic transfer functions $\mathbf{W}$ were computed. An example of the component W_{xx} between site 4 and 5 is shown in Figure 4. This result was obtained using a single site processing (Egbert, 1986). Red symbols indicate BMT data and blue symbols mark LMT data. There is an overlap of approx. one decade between these two data types where the data match nearly perfectly. Both setups are therefore well calibrated and were working properly. If the fields at site 4 and 5 did not contain any anomalous parts, the real part of the horizontal magnetic transfer function W_{xx} would be 1 over all periods and the imaginary part would be 0 (1D earth response). In the given example, the real part of W_{xx} is highly disturbed around 10 s in the so-called dead band (low energy of MT signals).

Figure 5 shows the magnetic response function of site 4 and 5 calculated with remote reference processing (Egbert, 1986). A comparison of these results and the results of the single site processing shows an improvement of the data quality at periods around 10 s. Therefore, incorporating a clean remote reference can be extremely helpful to improve the estimation of transfer functions.

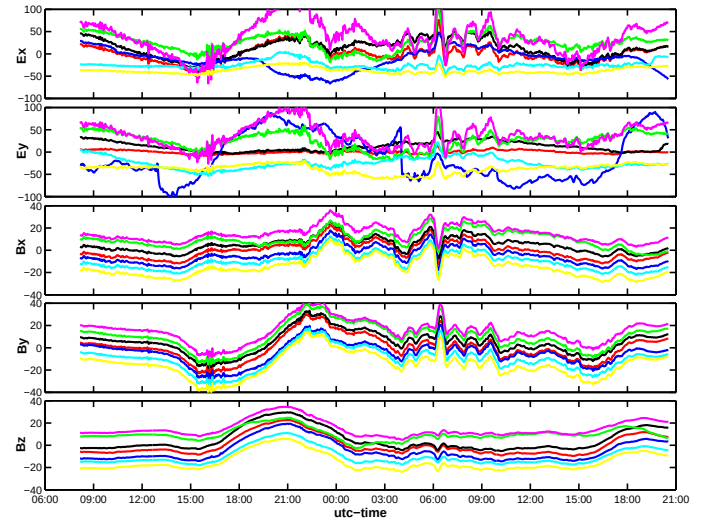


Figure 3: Time series of seven synchronously recorded sites; the first two diagrams show the electric channels Ex and Ey; the other three are the magnetic channels Bx, By and Bz.

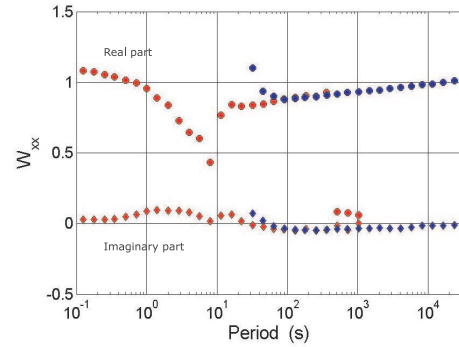


Figure 4: Results of single site processing (Egbert, 1986) of measured data, horizontal magnetic transfer function of site 4 and 5, red symbols mark BMT and blue symbols mark LMT data

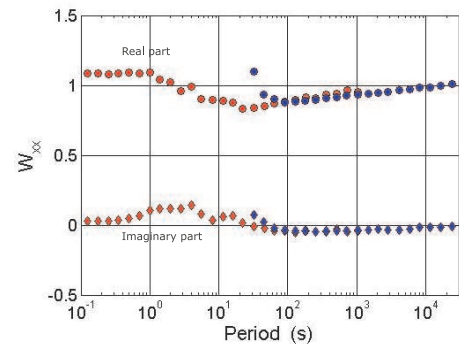


Figure 5: Horizontal magnetic transfer function after remote reference processing (Egbert, 1986) of site 4 and 5, red symbols mark BMT and blue symbols mark LMT data

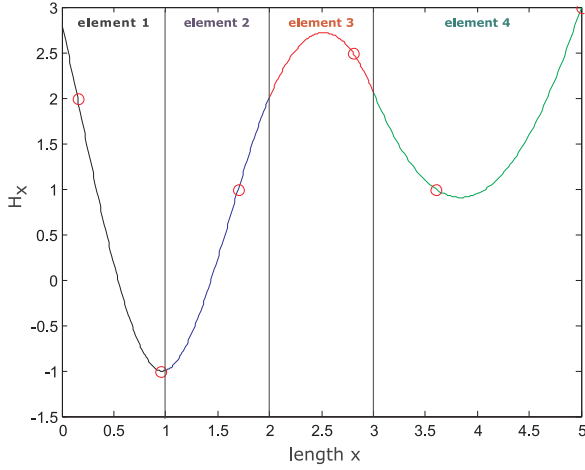


Figure 6: First approach using the finite element method in 1D and four elements - matrix $\mathbf{B}$ is not included; red circles mark input or measured data; black, blue, red and green functions are interpolation results, they are continuous and continuously differentiable.

Interpolating magnetic fields

The induced surface magnetic field is a smooth function in space. This implies, that a smooth interpolation of measured magnetic fields is a promising approach to reconstruct the entire array response. We start our approach with the assumption, that we know the magnetic field responses at several locations due to a unit magnetic field in the x - and the y -direction. This means, that we suppose that we have estimated transfer functions between the locally recorded field and the normal field (not affected by any induction anomaly) instead of the local field at another site (which has an anomalous part). Under these circumstances, the columns of $\mathbf{W}$ can be considered as the principal horizontal magnetic fields.

Because the magnetic field is irrotational in the air half-space, i.e. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, its horizontal components are dependent on each other via the relation

$$\frac{dH_x}{dy} = \frac{dH_y}{dx}. \quad (1)$$

Condition (1) must be satisfied by our interpolation routine.

Hence, we can formulate the following optimization problem: Find the smoothest horizontal magnetic field distribution $\mathbf{H}_h$, which fits the measured data to within their error bars while satisfying the relation given in equation (1).

For this purpose, we tested several functional parameterization of the magnetic field. First, we tried a *polynomial* description following an idea of Schmucker (personal communication with M. Becken). The derivatives in equation (1) are easily incorporated using a polynomial approach, which makes the use of polynomials attractive for our

problem. Though polynomials can be adequate to describe the general trend of the magnetic field such as the shape of an inhomogeneous source field, it turned out that they are not flexible enough to represent complicated responses (in the MT case and the presence of anomalies).

More complicated field distributions may be represented using piecewise polynomials, i.e. *spline functions*. With spline functions, it was however too complicated to include the relation between H_x and H_y .

Therefore, we adopted the *finite element* approach to our problem. In a first step, we reduce the problem to the 1D case to develop the formalism. Using the notation of finite elements, we formulate a variational problem of the following type: determine the magnetic field, which has minimum curvature, i.e.

$$\int H_x''(\xi)^2 d\xi = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u} \rightarrow \min! \quad (2)$$

under the constraint of fitting the data and the potential field condition. Here, $\mathbf{u}$ are the knot variables and $\mathbf{S}$ is the stiffness matrix. In this case, we use a cubic approach, which is necessary to produce a continuously differentiable function. Measured data are collected in vector $\mathbf{b}$ and represented in terms of the knot variables $\mathbf{u}$ via the relation

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (3)$$

where $\mathbf{A}$ is a 'forward modeling operator'. Relation (1) between the derivatives of magnetic field components H_x and H_y is expressed as

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

$\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ depend on the ansatz functions, in this case cubic polynomials. In equation (5) these matrices are put together into one main formula that has to become minimum.

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u} + (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b})^T \lambda_1 + (\mathbf{B} \mathbf{u})^T \lambda_2 = \min. \quad (5)$$

The derivatives of (5) can be written as a product of a matrix and a vector shown in equation (7).

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u &= \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \lambda_1 + \mathbf{B}^T \lambda_2 \\ \mathbf{F}_{\lambda_1} &= \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b} \\ \mathbf{F}_{\lambda_2} &= \mathbf{B} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{A}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{A} & 0 & 0 \\ \mathbf{B} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Here, the vectors λ_1 and λ_2 are Lagrange multipliers, vector $\mathbf{u}$ is the vector of coefficients that needs to be determined. Figure 6 shows the first result: fitting one component of the magnetic field using cubic functions and four elements in 1D.

Outlook

After adopting the finite element method to a problem similar to ours in 1D, it has to be developed in 2D as well to match the requirements (two magnetic field components H_x and H_y).

Dealing with measured data that contain noise, error bars have to be included in the solution (7). Moreover, to avoid oscillations in the interpolated field, a regularization trading off between data fit and smoothness constraint has to be included. Finally, not the fields directly but the transfer functions $\mathbf{W}$ have to be incorporated iteratively, using $\mathbf{W}$ as an initial guess for the magnetic fields themselves and $\mathbf{W}\mathbf{H}_0$ for subsequent iterations (where $\mathbf{H}_0$ is the reference field).

References

- Egbert, G. & Booker, J.R., 1986. Robust estimation of geomagnetic transfer functions, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 87, 173-194.
- Ritter, O., Junge, A. & Dawes, G.J.K., 1998. New equipment and processing for magnetotelluric remote reference observations, *Geophys. J. Int.*, 132, 535-548.
- Rymer, M.J., Catchings, R.D. & Goldman, M.R., 2003. Structure of the San Andreas fault zone as revealed by surface geologic mapping and high-resolution seismic profiling near Parkfield, California, *Geophys. Research Abstracts*, vol.5.
- Schwarz, H.R., 1984. Methode der Finiten Elemente, B.G.Teubner Stuttgart.
- Stollnitz, E.J., Deroose, T.D. & Salesin, D.H., 1996. Wavelets for computer graphics - theory and applications, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, California, chapter 12.

Comparing magnetic and magnetotelluric data for the Beattie Magnetic Anomaly, South Africa

U. Weckmann^{1,2}, T. Branch^{1,3} & O. Ritter¹

¹ GeoForschungsZentrum Potsdam, Telegrafenberg, 14473 Potsdam, Germany

² DIAS, School of Cosmic Physics, 5 Merrion Square, Dublin 2, Ireland

³ CIGCES, Department of Geological Sciences, University of Cape Town, Rondebosch, 7700, RSA

March 17, 2006

1 Introduction

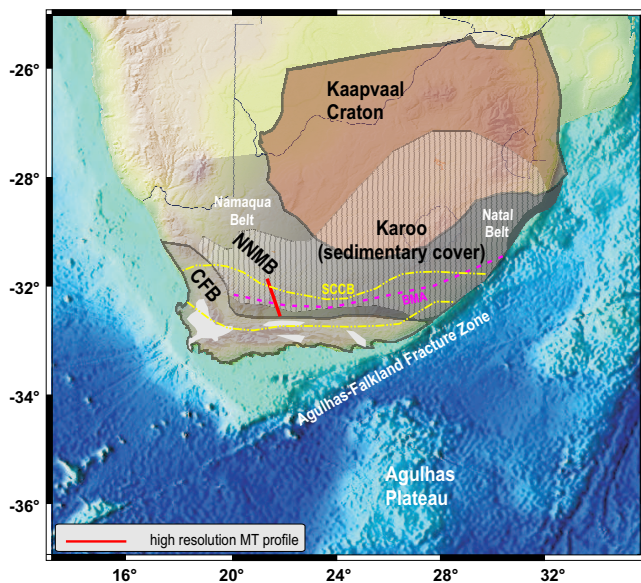


Figure 1: The southern part of the African continent consists of an assemblage of different continental domains. The Archean nucleus is the Kaapvaal craton. In the Proterozoic the Namaqua Natal Mobile Belt (NNMB) accreted in the south, followed by the collision of the Permo-Triassic Cape Fold Belt (CFB). Our study area crosses the boundary of the NNMB and the CFB. The shaded zone indicates the area where sediments of the Karoo Basin obscure older tectonic units.

The Beattie Magnetic Anomaly (BMA) and the Southern Cape Conductive Belt (SCCB), two of Earth's largest continental geophysical anomalies extend across the southern African continent in EW direction. The BMA was first discovered by *Beattie* [1909] (see Fig.2). More than half a century later *Gough et al.* [1973] reported on measurements using an array of 24 three-component

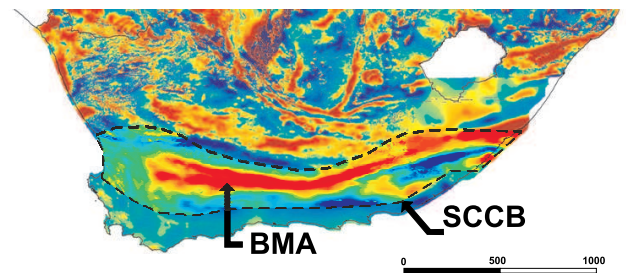


Figure 2: Magnetic total field, compiled at 1:1 million by Anglo American Corp Ltd., in the CIGCES database; also in the AMMP database [*Barrett*, 1993]: The BMA (red and magenta colours) and the SCCB (outlined by dashed line) are continental scale geophysical anomalies. They stretch from east to west for more than 1000km across the entire southern South Africa. In some areas they are parallel to the boundary of the NNMB and the CFB.

magnetometers which lead to the identification of a 140km broad and over 1000km long SCCB. Because of the spatial correlation of both geophysical anomalies a common source in form of a 50km broad and 30km deep reaching southward dipping sliver of serpentinized paleo-oceanic crust was proposed by many authors since then (e.g. *Pitts et al.* [1992]). However, both anomalies are in close vicinity to the boundary of the Namaqua Natal Mobile Belt (NNMB) and the Cape Fold Belt (CFB) which might suggest a tectonic interpretation. *Corner* [1989] inferred that mineralized thrust zones within the NNMB granitoid basement were a more likely explanation for the anomalies. To resolve structural details of both geophysical anomalies two modern, high resolution magnetotelluric experiments were conducted in March, 2004, and November, 2005, along a 250km long

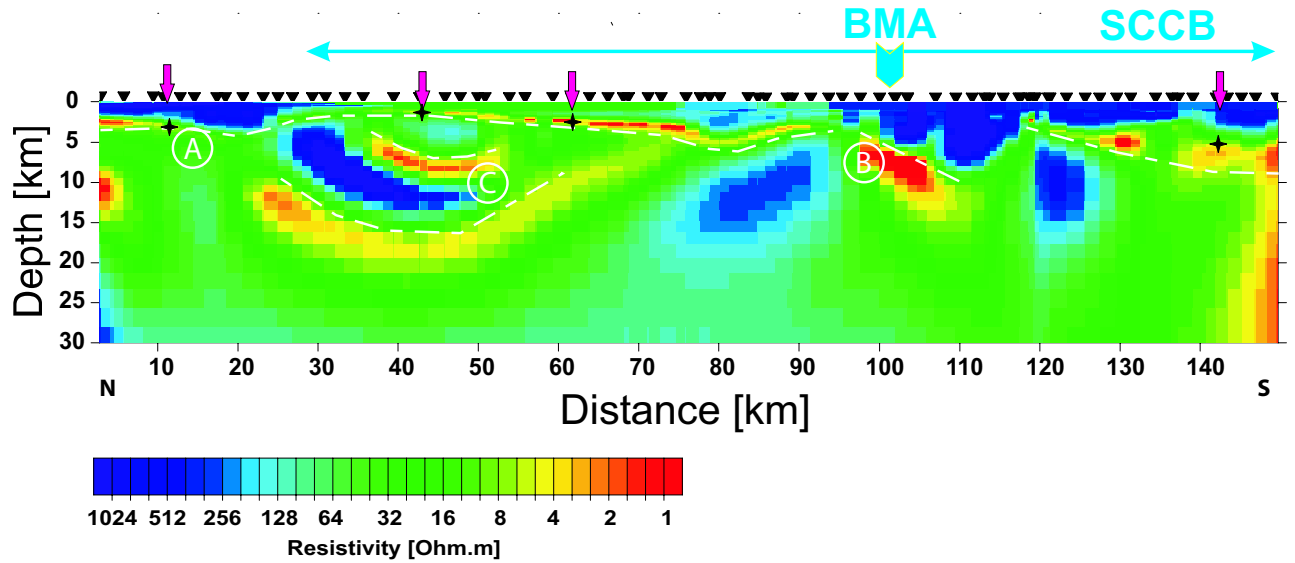


Figure 3: Conductivity model obtained from the 2D inversion algorithm by *Rodi and Mackie* [2001]. Site locations are indicated by black triangles. The surface-trace of the BMA and the extent of the SCCB are indicated by cyan arrows. The new data reveal several previously unknown conductive structures (red and yellow colours). The most prominent conductivity anomaly (B) is located beneath the surface trace of the BMA. A couple of conductive structures stacked above and below a resistive layer (C) define a large synform, $\sim 50\text{ km}$ across, within the NNMB. A shallow sub-horizontal band of high conductivity (A) can be observed in the upper 5 km , deepening towards in the southern part of the section, near Prince Albert, where the Karoo basin is known to be thickest. Magenta arrows at the surface indicate the location of deep boreholes which were projected onto the profile. The black stars below map the carbonaceous and pyritiferous black shales of the Whitehill Formation.

NS profile between Mossel Bay and Fraserburg. A 2D conductivity model of the northern 150 km of the profile exhibits three distinct zones of high conductivity: (i) Beneath the surface trace of the maximum of the BMA we observe a high conductivity anomaly at $5\text{--}10\text{ km}$ depth. (ii) A shallow, regionally continuous sub-horizontal band of high conductivity, that can be related to a $50\text{--}70\text{ m}$ thick pyritic-carbonaceous marker horizon using deep borehole information and (iii) several highly conductive synformal features in the mid crust are newly imaged beneath the onset of the Great Escarpment.

2 Magnetotelluric model

The resistivity section in Fig. 3 is the result of a 2D inversion using the RLM2DI algorithm after *Rodi and Mackie* [2001] (<http://www.geosystem.net>). The TE and TM mode data are jointly inverted with the intermediate inclusion of the vertical magnetic field data. Preset error bounds of 5% for TM apparent resistivity and 100% for TE apparent resistivity and 0.6° for TE and TM mode

phases were applied. We started the inversion from a homogeneous halfspace model including topography with a mesh of 207 horizontal and 158 vertical cells and a regularization parameter $\tau = 15$. Red and yellow colours indicate zones of high electrical conductivity, whereas blue colours show zones of low electrical conductivity. A zone of very high electrical conductivity ($1\Omega\text{m}$), at a depth of approximately $5\text{--}10\text{ km}$, seems to be associated with the BMA. Another conductivity anomaly is located beneath the northern boundary of the SCCB, extending from the shallow crust down to 20 km depth. These high conductivity anomalies may image faults which are mapped further to the east and separate different terranes. The conductivity model furthermore reveals an extensive sub-horizontal band of high conductivity ($2\Omega\text{m}$) in the upper 5 km of the Karoo Basin. For this shallow anomaly we have information from deep boreholes. The boreholes projected onto the profile are marked with red arrows. The borehole logs indicate that the Whitehill Formation consists of carbonaceous blackshales and pyrite. The black stars mark the depth region of the Whitehill For-

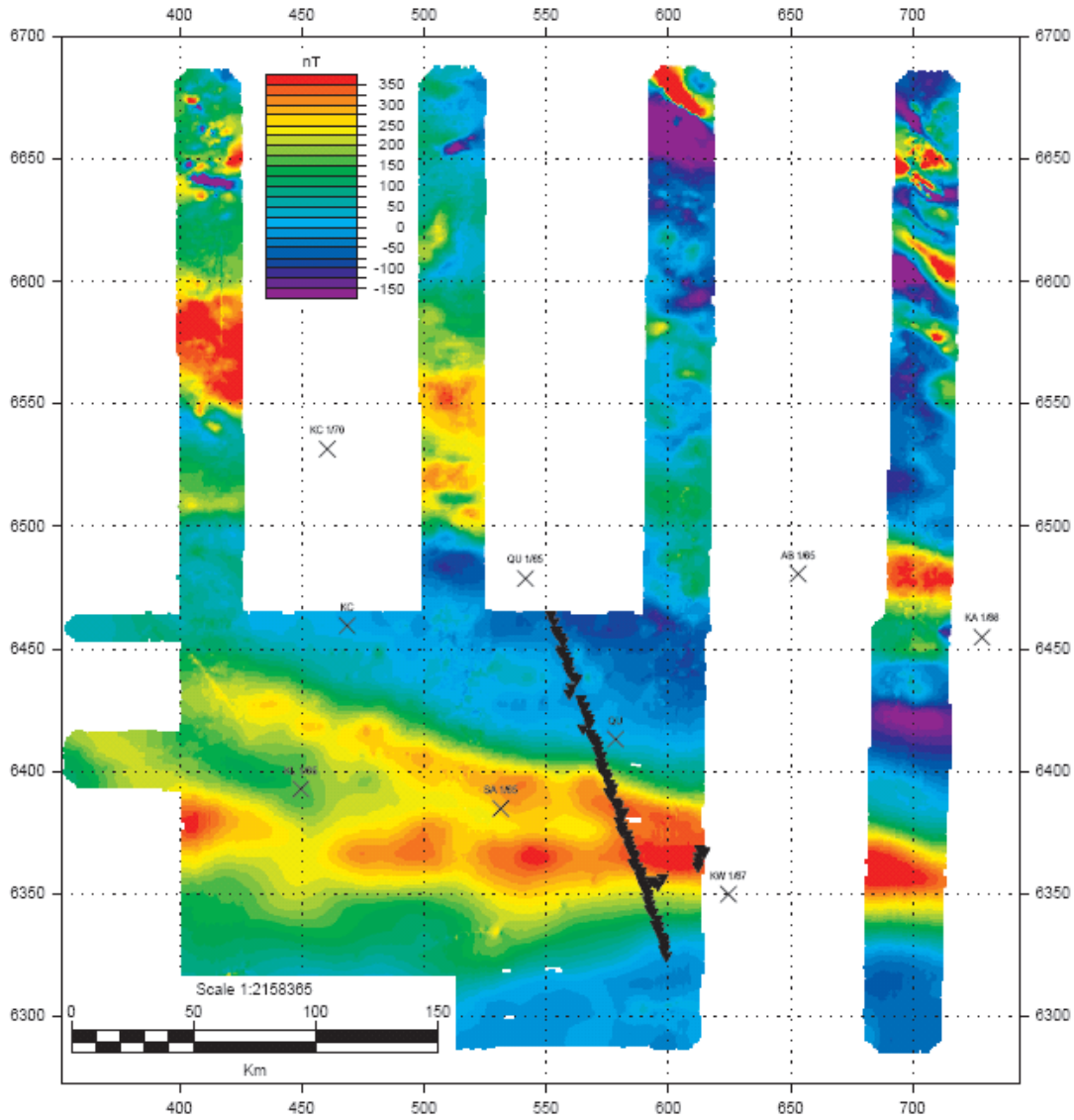


Figure 4: Aeromagnetic data supplied by the Council for Geoscience. Black triangles mark the location of MT sites; crosses indicate borehole locations.

mation which coincides well with the location of the sub-horizontal high conductivity band.

3 Magnetic modelling

The aim of the magnetic modelling is to answer the question if both geophysical anomalies have a common source. Thereby we test whether a magnetic feature consistent with the conductivity anomaly associated with the BMA could explain the observed magnetic field. The aeromagnetic data were kindly supplied by the Council for Geoscience, Pretoria, South Africa. The magnetic lines were flown in the early 1980's and the compiled data set contains of the flight path, altitude

and magnetic total-field variations. For modelling purposes eight NS running profiles, which are 2km apart, are combined with two 10km spaced (one NS and one EW running) profiles to form a complete array over the MT profile's area.

The profiles were integrated into a single, draped, constant altitude (100m) array using the Magnetic 2.75D Modeling component within the WinGLink software package. The external field was removed from the total field data using the IGRM for the date 1982. The external field for the region has a magnetic inclination of -66.2° and a total intensity of $28358nT$. The residual map was projected onto the MT profile and interpolated using an interpolation radius of 5km and a spline weight of 5. All magnetic bodies were assumed to

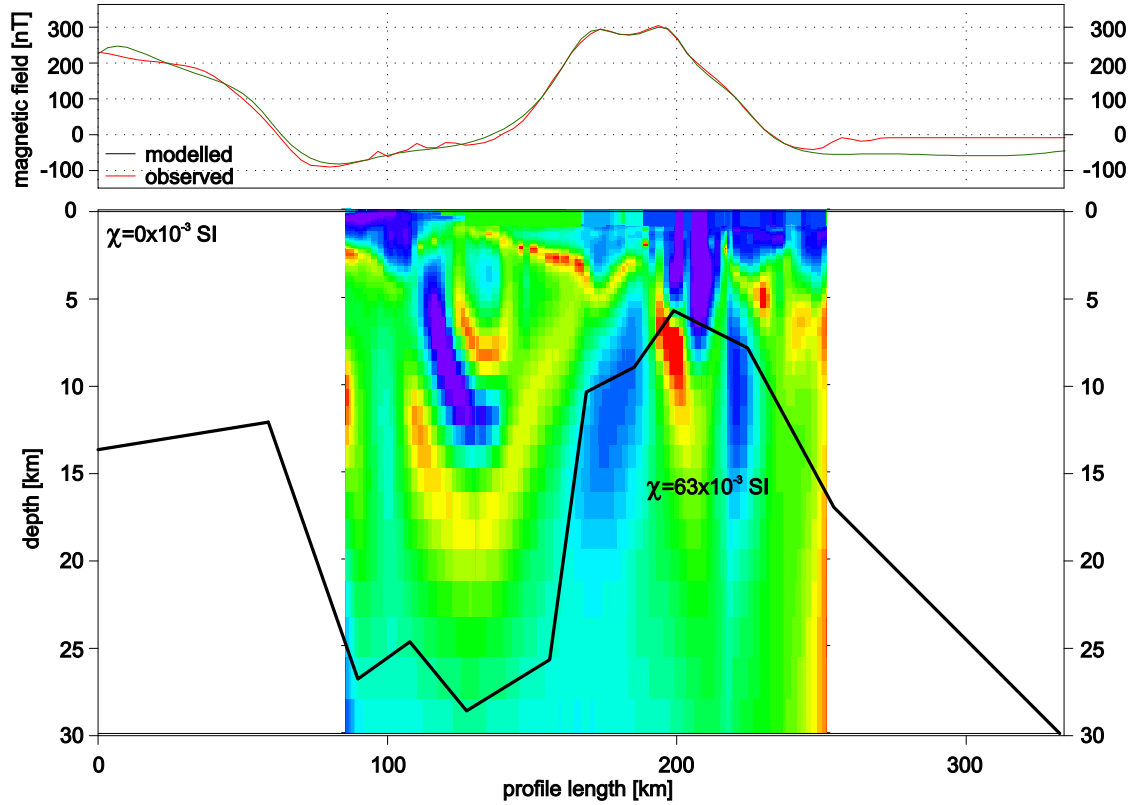


Figure 5: With a simple 2D model we are able to explain the magnetic signature of the BMA quite well. A comparison with the electrical conductivities clearly shows that the extent of a magnetic body has to be much larger than the conductivity anomaly observed beneath the surface trace of the BMA. However, areas of rocks with high magnetization might correlate with more resistive zones.

be homogeneously magnetized from induced magnetism, and given infinite strike perpendicular to our profile.

One model favored is depicted in Fig. 5. It employs a lower susceptibility than that of *Pitts et al.* [1992] and is in the upper range of susceptibility values possible for granites and other intermediate igneous rocks. In general a multitude of models can fit the response, but it seems certain that the BMA and the SCCB are not of the same source. The conductivity feature (B) in Fig. 3 cannot fit the required BMA's source volumetrically to explain the observed magnetic response. However, the resistive area around the anomaly (B) possibly correlates with the magnetic body. As the favoured interpretation for this conductivity anomaly is graphite enrichment along a shear planes [Weckmann et al., 2006], such a shear plane could cut through the magnetic body without changing the magnetic response significantly.

4 Conclusions and outlook

The comparison of the results from the new MT data across the SCCB and the BMA and magnetic modelling reveal that a common source for both geophysical anomalies is unlikely. In order to explain the observed magnetic response a at least 150km wide magnetic body in the mid and lower crust is required. A similarly extended high conductivity feature does not agree with the MT data. More insights will be the incorporation of reflection and refraction seismic data (recorded recently along the same profile by GFZ) into interpretations for the BMA.

5 Acknowledgments

We would like to thank Edgar Stettler and the Council for Geoscience, Pretoria, South Africa, for making the magnetic data available to us. We also thank the Geophysical Instrument Pool Potsdam for providing the MT equipment.

References

- Barrett, S. (1993), The african mapping project., *International Institute for Aerospace surveys and Earth Sciences, ITC, Journal Special Issue*, pp. 122–131.
- Beattie, J. (1909), *Report of the magnetic survey of South Africa*, vol. R. Soc. Lond., Cambridge University Press, London.
- Corner, B. (1989), The Beattie anomaly and its significance for crustal evolution within the Gondwana framework, *Extended Abstracts, South African Geophysical Association, First Technical Meeting*, pp. 15–17.
- Gough, D., J. de Beer, and J. van Zijl (1973), A magnetometer array study in southern Africa, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, *34*, 421–433.
- Pitts, B., M. Mahler, J. de Beer, and D. Gough (1992), Interpretation of magnetic, gravity and magnetotelluric data across the Cape Fold Belt and Karoo Basin, in *Inversion tectonics of the Cape Fold Belt, Karoo and Cretaceous Basins of Southern Africa*, edited by M. de Wit and I. Ransome, pp. 27–32, Balkema, Rotterdam, Netherlands.
- Rodi, W., and R. L. Mackie (2001), Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2D magnetotelluric inversion, *Geophysics*, *66*, 174–187.
- Weckmann, U., O. Ritter, A. Jung, T. Branch, and M. de Wit (2006), New Magnetotelluric measurements across the Beattie magnetic anomaly and the Southern Cape Conductive Belt, South Africa, *J. Geophys. Res.*, p. submitted.

An Amphibious Magnetotelluric Experiment at the South Chilean Continental Margin

Gerhard Kapinos and Heinrich Brasse

FU Berlin, FR Geophysik, Malteserstr. 74-100, 12249 Berlin, Germany

E-Mail: kapinosg@geophysik.fu-berlin.de

Abstract

A combined on- and offshore magnetotelluric measurement was carried out in the South Chilean continental margin to resolve the crustal and upper mantle distribution of electrical conductivity and in particular to image fluids between the downgoing Nazca and overriding South American plates. This contribution presents the MT data and some specific problems encountered in this sea-land experiment.

Introduction

Previous long-period magnetotelluric studies in the Southern Chilean Andes revealed a modest high conductivity zone (HCZ) in the lower crust beneath the active volcanic arc and an additional HCZ associated with the Lanalhue fault in the forearc, running obliquely to the main morpho-structural units (Brasse and Soyer 2001, Soyer 2002, Melnick et al. 2006). Another finding is based on the anomalous behavior of geomagnetic induction vectors, which point consistently NE over the whole study area instead of the expected E direction due to the presence of the highly conducting Pacific Ocean. This spectacular effect is (and can only be) explained by anisotropy of the crust.

To corroborate these unexpected results and especially to image fluids in the interface between the downgoing Nazca and the overriding South American plate a combined on-offshore electromagnetic experiment was carried out as part of the multi-disciplinary TIPTEQ project. 33 long-period magnetotelluric stations measured the variation of magnetic and electric fields from December 2004 to the end of February 2005 between latitudes 37.5° - 41°S. 23 stations on the land side and 7 stations on the sea side were established along a profile with a separation of approx. 10 km and 30-35 km respectively, extending over 400 km and running perpendicularly to the trench and the volcanic arc from the incoming plate to the Argentinian border.

The profile is a part of a large-scale magnetotelluric network including 3 profiles in this area, several connecting sites and small networks of stations around the active volcanoes Villarrica and Llaima to study the conductivity distribution and to get indications of possibly existing deep magma chambers, respectively.

For monitoring of temporary variability in the geomagnetic transfer function, 3 stations from GFZ Potsdam have been carried out close to the profile and on Isla Mocha for a time period of 3 years.

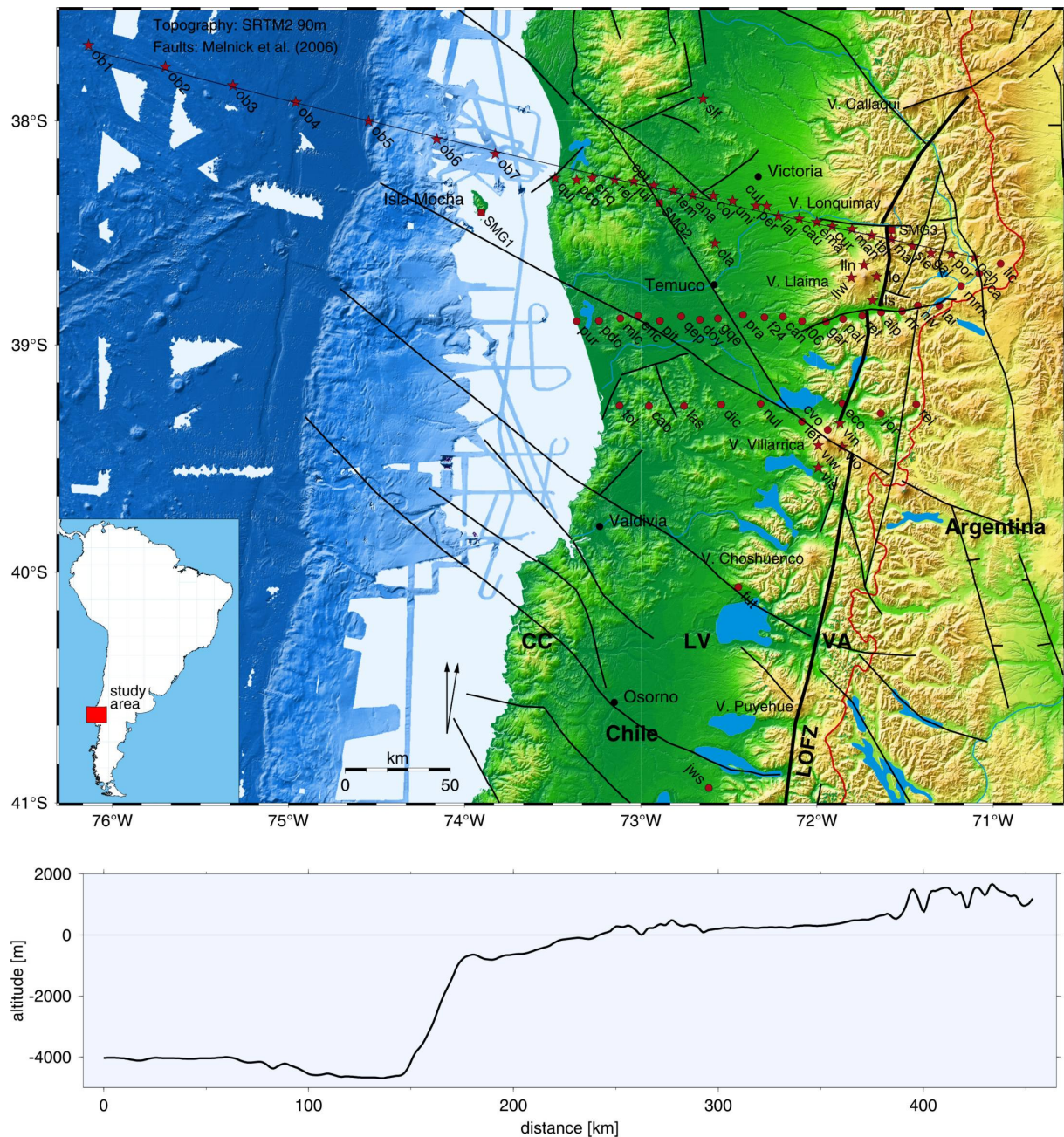


Fig. 1: Map with MT sites at the South Chilean margin. Circles: Sites from campaign in 2000; Stars: TIPTEQ campaign; Squares: Monitoring stations from GFZ Potsdam; Black lines: Faults modified after Melnick et al. 2006; Bathymetry: GEOMAR. CC: Coastal Cordillera, LV: Longitudinal Valley, VA: Volcanic Arc, LOFZ: Liquiñe-Ofqui Fault Zone. Below: Bathymetry/topography along magnetotelluric profile.

Ocean-bottom magnetotellurics

For imaging fluids in the interface between the downgoing Nazca and the overriding South American plate the last land profile was extended by 7 sea-bottom stations across the trench towards the Pacific plate, which were deployed during RV Sonne leg SO-181.

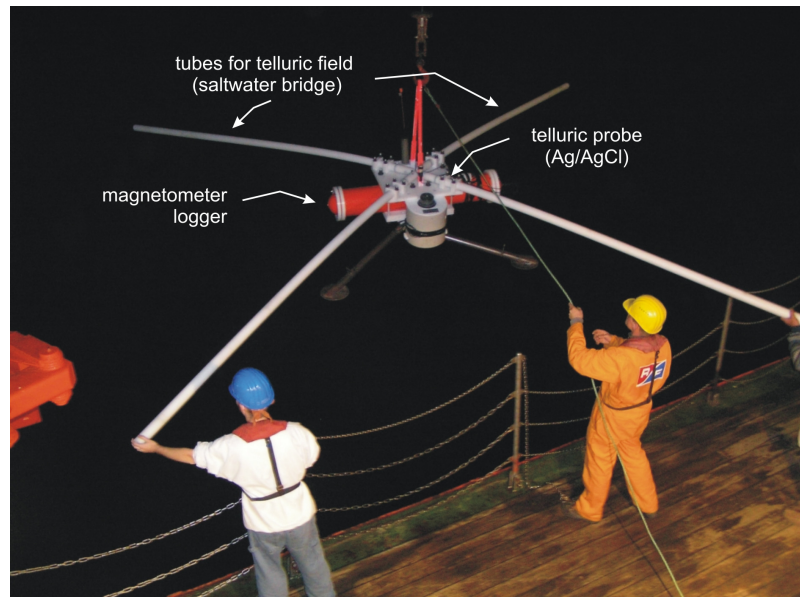


Fig. 2: Deployment of the HEFMAG seafloor magnetotelluric systems during the RV Sonne cruise SO181. The HEFMAG system consists of fluxgate magnetometer and short-span telluric device based on saltwater bridges.

The newly designed HEFMAG system (Woods Hole Oceanographic Institution) measures the natural temporal geomagnetic and geoelectric (telluric) field variations in a period range from $T = 80\text{s} - \text{DC}$.

While fluxgate magnetometers sense the three components of the magnetic field, a short-span device incorporating a saltwater bridge and unpolarizable Ag/AgCl electrodes is used for probing the electric field (Fig. 2).

Mainly due to the tubes for the telluric field, the ocean bottom instruments descends and rises at relatively low speed (approx. 20m/min).

For subsequent modelling the ocean has to be incorporated as an a priori structure in the finite difference mesh and therefore the knowledge of water conductivity is essential. A CTD log to depths until 4000 m was performed close to the measuring area (Fig. 3). The conductivity of seawater depends on pressure, salinity and temperature and has been investigated by Horner and Frysinger (1963). While the effects of pressure and salinity variations in the ocean are only 2.5% and 5%, respectively and are therefore negligible, the resistivity of oceanic water can change from $0.16 \Omega\text{m}$ at 30°C and $0.33 \Omega\text{m}$ at 1.0°C . Thus the temperature is the dominant factor controlling the electrical conductivity (Filloux, 1987).

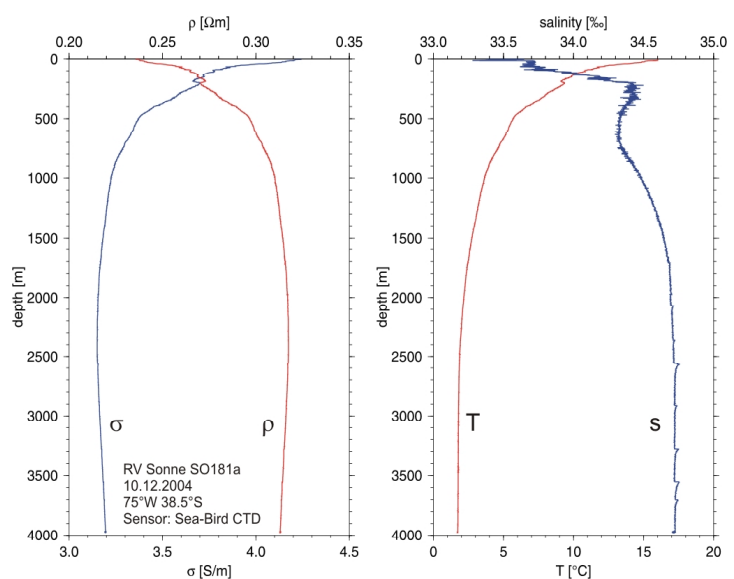


Fig. 3: Logs of electrical conductivity, resistivity (left), temperature and salinity (right).

Time series

The quality of the acquired electric and magnetic signals depends on the measure area. While the stations in the Coastal Cordillera and Volcanic Arc yield data of high quality, the electric field recorded by stations in Longitudinal Valley is strongly contaminated by cultural electrical noise, probably due to a higher density of population.

The offshore time series are attenuated at short periods. On the other hand, electrical induction by water motions (such as tides and ocean currents) could affect the time series at long periods. Fig. 4 shows examples of electromagnetic signals recorded on ocean bottom at 4163 m depth between December 2004 and February 2005. The data were rotated to geomagnetic North. In this plot daily variations and magnetic storms are evident as well as slow drift in the record of the electric field.

In Fig. 5 (left) a short section of the record is picked showing a magnetic storm in Jan 8, 2005. On the right side the time series of a running simultaneously land station is shown. Besides the high correlation between the on- and offshore fields one can clearly observe the filtering effect due to conductance of the ocean. High frequent signals (peaks) vanish nearly completely, because of the strong attenuation at short periods, giving the offshore-curves a smooth shape. Due to this impeding effect in propagation of electromagnetic fields, special care has to be taken with respect to signal-to-noise ratio and very long recording times are essential for obtaining high-quality transfer functions.

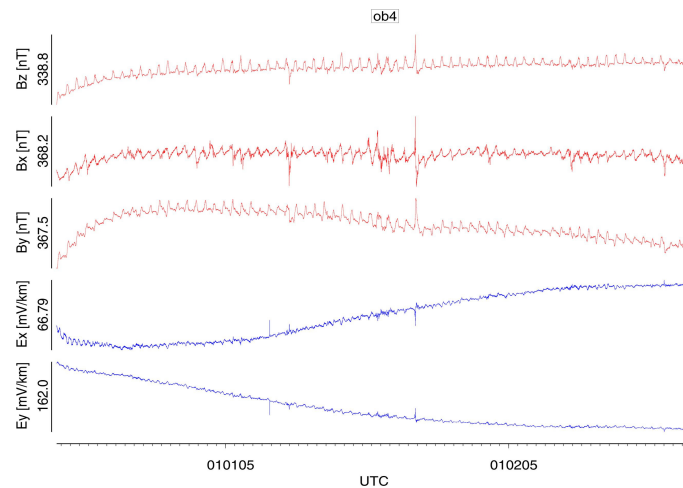


Fig. 4: Record of magnetic and electric field on ocean bottom in depth of 4163 m between December 2004 and February 2005.

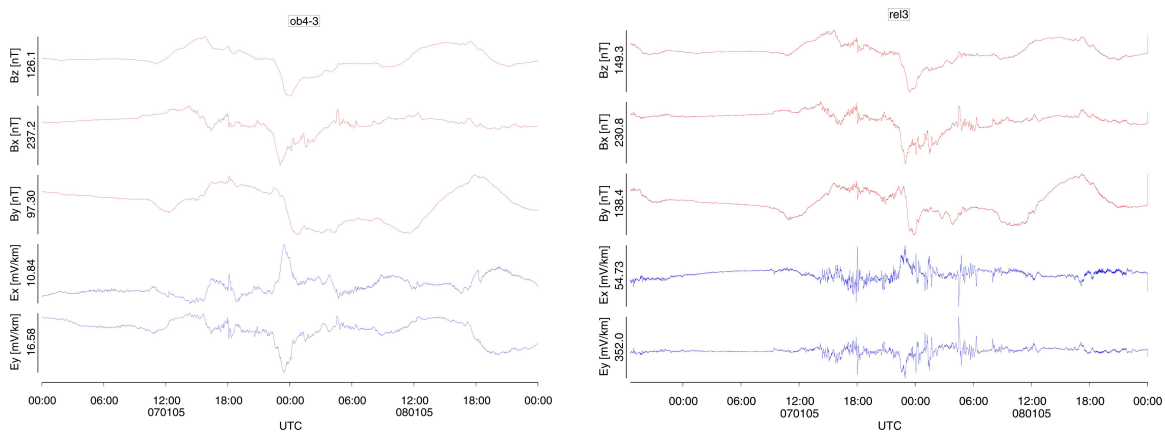


Fig. 5: Short section of time series at offshore site ob4 (see Fig. 4 above) and onshore site rel.

Transfer functions

Analysis of the time series have been carried out with the robust EMTF code of Egbert and Booker (1986). The code is adapted for single station and remote reference analysis and had to be modified for the ocean-bottom station data.

While analysis of offshore data is still ongoing, the remote reference processing of the onshore data yield predominantly smooth transfer functions in the period range of 10s – 10000s. However, in the Longitudinal Valley the contamination of the recorded electric field is responsible for perturbed transfer functions.

Examples of an onshore (left) and offshore (right) transfer functions are shown in Fig. 6. All land transfer functions are formed by multidimensional underground. Low values of the apparent resistivity are revealed in the eastern end of the profile. This indicates a body of enhanced conductivity in the lower crust east of the active volcanic arc and agrees with the behavior of the induction vectors.

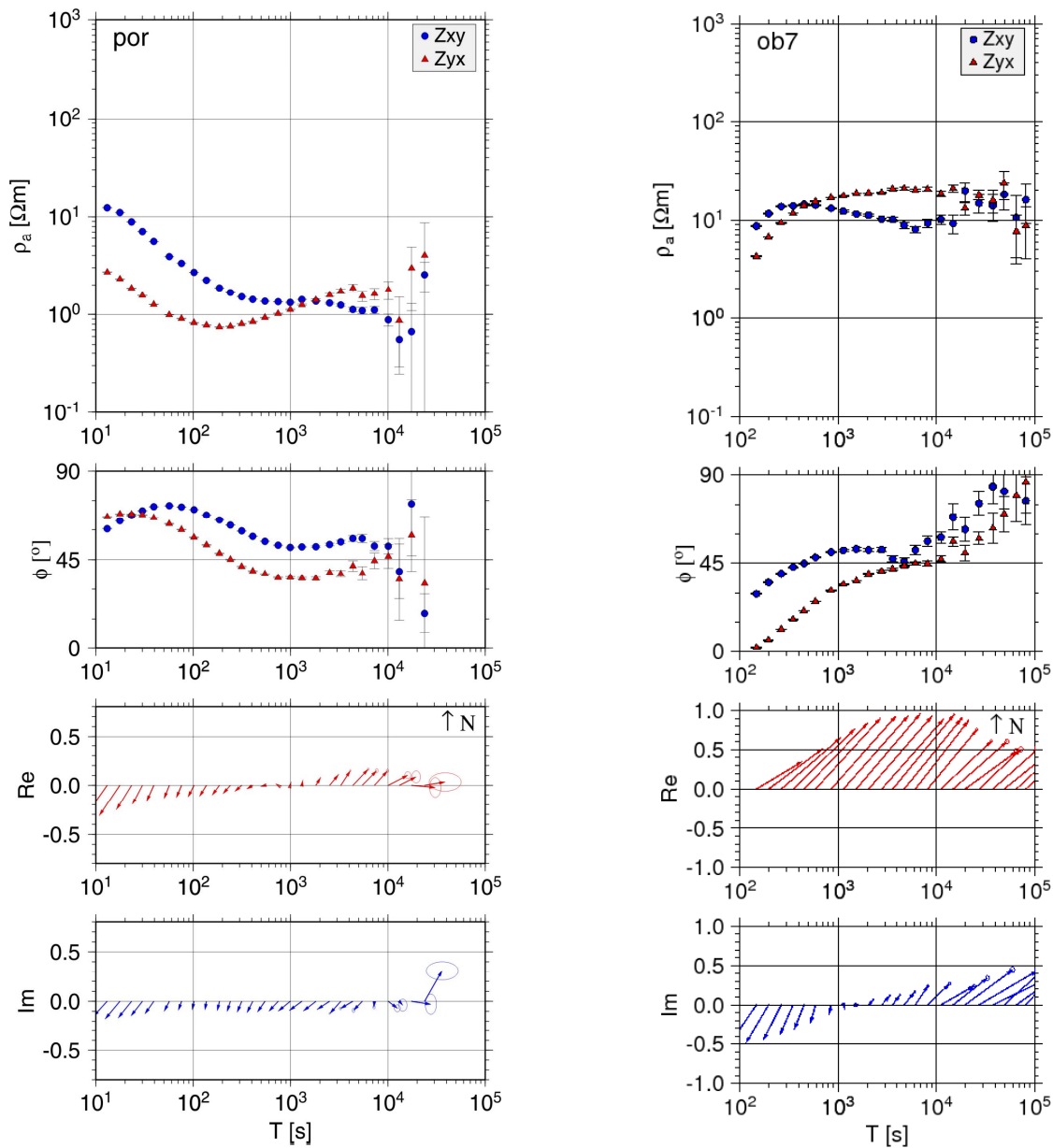


Fig. 6: Transfer functions of on- (left) and offshore profile (right).

Induction vectors

Fig. 7a and 7b show induction vectors from the previous and recent studies in the South Central Chilean continental margin for periods of 102 s and 3277 s.

Except for the westernmost stations, where the inductive influence of the Pacific ocean becomes visible in long vectors, all other vectors at 102 s are short and indicate no major conductivity contrast. In the eastern part of the area they point towards west and turn to east indicating increasing conductivities below the volcanic arc. Especially around Villarrica volcano, induction vectors point away from the center of the volcano and appear to be influenced by enhanced conductivities in the upper crust. However, the observed trend in the induction vectors can be caused by a conductivity structure like a magma chamber as well as perhaps by topography of the volcano edifice itself. But note that this effect isn't observed at Llaima volcano. This suggests that a conductive structure beneath Villarrica volcano rather than topography produces the induction vectors.

A spectacular effect can be seen in the magnetic onshore transfer functions at long periods. Induction vectors were expected to point W-E near the Pacific coast and away from the volcanic arc. Instead, they point consistently to NE over hundreds of kilometres in the whole study area and their orientation seems to agree with the pattern of faults in South Central Andes. This could be explained by an anisotropy in the crust (see Brasse et al., this volume). This effect is not visible on the Nazca plate. The induction vectors are small and don't show any special orientation. This suggests that the geological and tectonical pattern of the Nazca plate differs from that of the South American one.

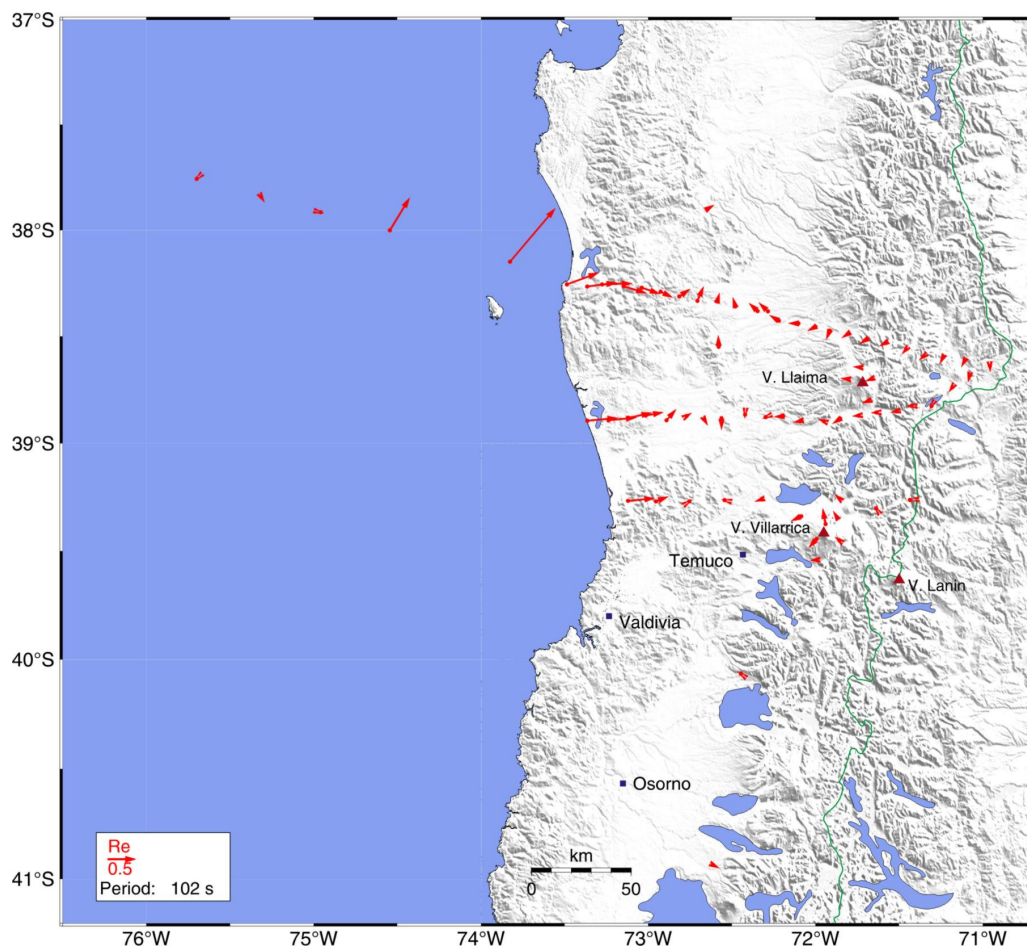


Fig. 7a: Induction vectors for 102 s from the previous and recent magnetotelluric profiles at South Chilean continental margin.

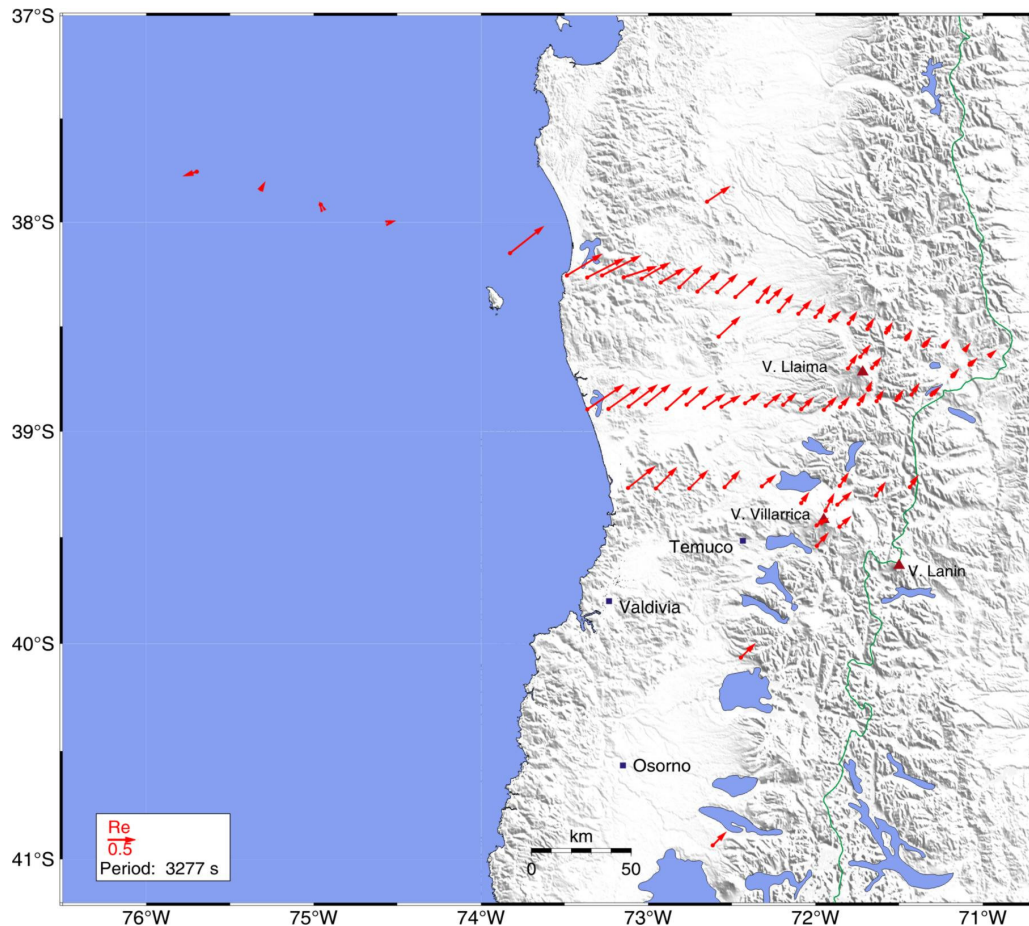


Fig. 7b: Induction vectors for 3277 s .

Discussion and Outlook

The first data analysis confirms the results of previous investigations. The NE orientation of the geomagnetic induction vectors on the continental plate is also visible in the recent profile. This feature could be reasonably reproduced by forward modelling incorporating anisotropy in the crust. The behavior of the induction vectors changes on the Nazca plate and reflects the geological and tectonical differences between these plates.

Unfortunately, the postulated model doesn't fit satisfactorily the measured magnetotelluric transfer function and requires further modifications.

Results of the previous studies reveal an enhanced conductivity in the lower crust below and east of the active volcanic arc and the question arises, whether the existence of such conductors can be confirmed beneath the current profile. In particular the inclusion of the offshore data in the modelling will show if the aim of the experiment can be achieved, which is the resolving of the good conductor on the interface between the plates.

However, simple isotropic 2D Inversion is not sufficient to produce a confident and stable model and has to be combined with the anisotropic model. The crustal anisotropy is a challenge for inversion, because it masks a deep view into the earth and thus complicates the understanding of the conductivity structure of the entire subduction zone.

References

- Brasse, H. and Soyer, W. (2001): A magnetotelluric study in the Southern Chilean Andes, *Geophys. Res. Lett.*, 28 (19), 3757-3760.
- Brasse, H., Li, Y., Kapinos, G., Eydam, D. and Mütschard, L. (2006): Uniform Deflection of Induction Vectors at the South Chilean Continental Margin: A Hint at Electrical Anisotropy in the Crust, this volume.
- Egbert, G. D. (1997): Robust multiple station magnetotelluric data processing, *Geophy. J. Int.*, 130, 475-496.
- Filloux, J. H. (1987): Instrumentation and Experimental Methods for Oceanic Studies, - In: J. A. Jacobs (ed.): *Geomagnetism*, vol. 1: 143-248; *Academic Press*, San Diego.
- Horner, R. A. and Frysinger, G. R. (1963): *J. Geophys. Res.* 7, 1967-1973.
- Melnick, D., Rosenau, M., Folguera, A., and Echtler, H.P. (2006): Neogene tectonic evolution of the Neuquén Andes western flank (37-39°S), in: Kay, S.M. & Ramos, V.A. (eds.): *Evolution of an Andean margin: A tectonic and magmatic view from the Andes to the Neuquén Basin (35-39°S)*, *Geol. Soc. Am. Spec. Paper*, 407, doi:10.1130/2006.2407(04).
- Soyer, W. (2002): Analysis of geomagnetic variations in the Central and Southern Andes, *Dissertation, Fachbereich Geowissenschaften, Freie Universität Berlin*, Berlin 2002.

Acknowledgements

This is publication GEOTECH-213 of the R&D-Programme GEOTECHNOLOGIEN funded by the German Ministry of Education and Research (BMBF) and German Research Foundation (DFG). We thank GIPP for loan of instruments. The Woods Hole Oceanographic Institution managed the offshore measurements and without the support of J. Beyli, A. Gardner, H. Moeller the experiment could not have been done. Many thanks to E. Flüh and the crew on the RV Sonne for an essential support on the ship and in carrying out of the marine campaign. We are grateful to the Universidad de Concepción and in particular to K. Bataille, for collaboration and help in managing of logistical problems. We are greatly indebted to D. Eydam, A. Gerner, M. Muñoz, L. Mütschard, and T. Worzewski for help in the fieldwork and especially to A. Manzanares and F. Sepúlveda for the mediation work with the authorities and local people. We appreciate the support of J. Muñoz (Chilean National Service of Geology and Mining, SERNAGEOMIN) and the National Park Service of Chile (CONAF). Last but not least we would like to thank all local people and farmers, which made available their lands for our measurements.

Untersuchungen der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne mit TEM, HEM und SkyTEM

Annika Steuer und Bernhard Siemon

Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR), Stilleweg 2, D-30655 Hannover,
annika.steuer@bgr.de, bernhard.siemon@bgr.de

Zusammenfassung

Innerhalb eines internationalen Projektes zur Untersuchung von quartären Rinnen als Grundwasserreservoir wurden drei elektromagnetische (EM) Methoden im Bereich der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne eingesetzt und miteinander verglichen. Die Ergebnisse der Methoden Transient-Elektromagnetik (TEM), Hubschrauber-Elektromagnetik (HEM) und SkyTEM stimmen gut miteinander überein. Die HEM erfasst deutlich die laterale Ausdehnung und die Tiefe der Oberkante der Lauenburger Schichten, doch die gut leitenden Tone und Schluffe begrenzen die Erkundungstiefe. Dort, wo dicke leitfähige Schichten existieren, gelingt es mit HEM nicht diese zu durchdringen. TEM-Verfahren helfen hier die Mächtigkeit der tonhaltigen Schichten zu bestimmen und detektieren zusätzlich außerhalb der Rinne eine gut leitende Schicht in größerer Tiefe. EM-Messungen aus der Luft haben den Vorteil, dass eine schnelle Kartierung des elektrischen Widerstands mit einer großen räumlichen Auflösung möglich ist. Die kosteneffiziente HEM im Frequenzbereich konkurriert mit dem teureren Zeitbereichsverfahren SkyTEM, das eine größere Erkundungstiefe erreicht. Bodengeophysikalische Messungen wie die TEM sind andererseits genauer, aber definitiv zeitaufwendiger als die Methoden aus der Luft. Es hängt von Untersuchungsobjekt, notwendiger Erkundungstiefe, Zeit, Geld und Arbeitskraft ab, welche Methode oder Methodenkombination gewählt wird.

Das BurVal Projekt

Das interregionale **Buried Valleys** Projekt (www.burval.org) wird kofinanziert von der Europäischen Union und beschäftigt sich mit der Untersuchung von eiszeitlichen Rinnen in Nordeuropa mit unterschiedlichen Methoden. Diese Rinnen enthalten ergiebige Grundwasserreservoirs, die wichtig für die zukünftige Wasserversorgung sein werden.

Das Ziel vom BurVal-Projekt ist es, das Wissen über die Ausdehnung, den inneren Aufbau und die hydraulischen Eigenschaften dieser Grundwasserressourcen zu vertiefen, die Gefahren durch Schadstoffeinträge von der Erdoberfläche abzuschätzen und die Wechselwirkung mit anderen Grundwasserleitern oder eindringendem Salzwasser zu untersuchen.

Untersuchungsgebiet

Eines der Untersuchungsgebiete ist die Bremerhaven-Cuxhavener Rinne, die durch eiszeitliche Schmelzwässer bis zu 300 m in die tertiären Sedimente eingeschnitten wurde. Die Füllung mit groben Sand und Kies wird von fein- bis mittelkörnigem Sand überlagert. Im oberen Bereich existieren Ton- und Schluffablagerungen, die Lauenburger Schichten, die sich vom umgebenden Material durch ihre hohen elektrischen Leitfähigkeiten abheben. Dadurch sind sie mit elektromagnetischen Methoden gut detektierbar.

Die Karte des scheinbaren spezifischen Widerstands für die Frequenz 1,8 kHz der Hubschrauber-Elektromagnetik (Abbildung 1) zeigt die Salzwasserintrusionen ins Landesinnere, westlich von Cuxhaven einen Süßwasseraustritt ins Wattenmeer und (parallel zur Autobahn) eine lang gezogene Struktur mittleren spezifischen Widerstandes, bei der es sich um die Lauenburger Schichten in der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne handelt. Abbildung 1 enthält auch die Lage des Testgebiets Wanhöden.

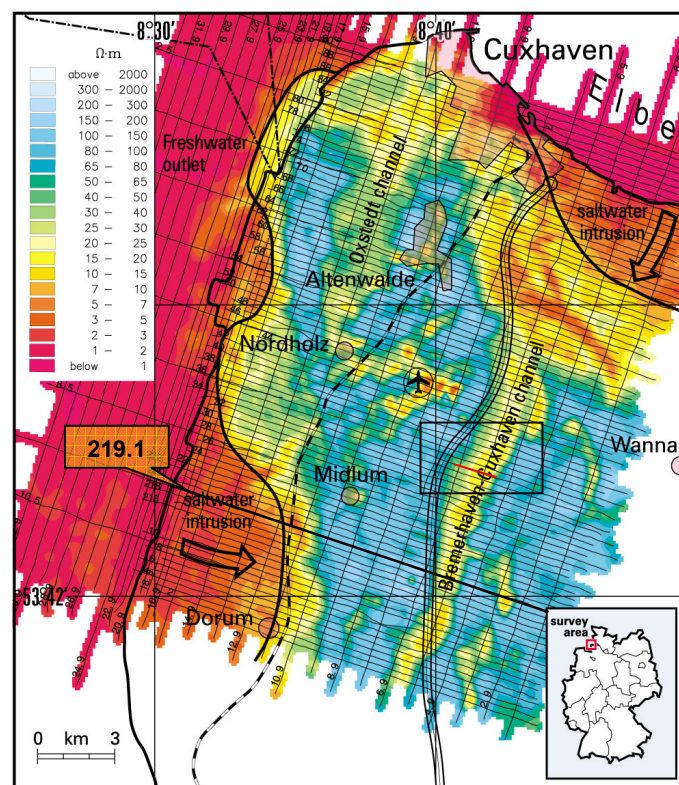


Abbildung 1: Karte des scheinbaren spezifischen Widerstands für die Frequenz 1,8 kHz der Hubschrauber-Elektromagnetik. Der schwarz umrandete Kasten im zentralen Abschnitt der Rinne markiert das Messgebiet Wanhöden.

Hubschrauber-Elektromagnetik (HEM)

Beim Hubschrauber-System der BGR werden drei verschiedene geophysikalische Methoden simultan angewendet. Im Hubschrauber selbst sitzt das Gammastrahlen-Spektrometer der Radiometrie. Etwa 40 m unter dem Hubschrauber wird der so genannte Bird nachgeschleppt. Hierbei handelt es sich um ein System der Firma Fugro Airborne Systems, das aus 5 horizontal-koplanaren Spulenpaaren für die EM und einem Cs-Magnetometer besteht. Der Frequenzbereich der HEM ist 380 Hz – 190 kHz.

Das oszillierende Primärfeld jeder Frequenz induziert Wirbelströme im leitfähigen Untergrund. Diese generieren ein magnetisches Sekundärfeld, das mittels Empfangsspulen registriert wird.

Die Fluggeschwindigkeit beträgt 140-150 km/h. Bei einer Messrate von 10 Hz erhält man einen mittleren Stationsabstand von etwa 4 m.

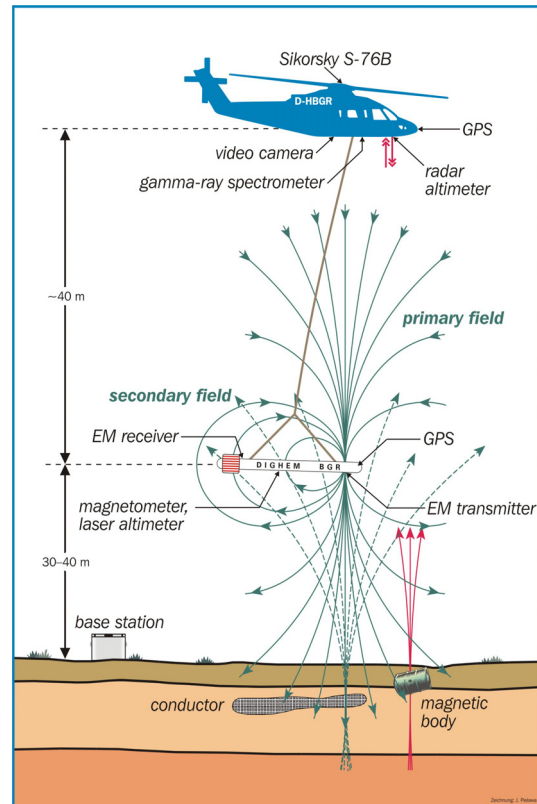


Abbildung 2: Das Hubschrauber-System der BGR.

Die Positionen von Hubschrauber und Bird werden mittels GPS (bis zum Jahr 2001 auch Glonass) gemessen. Der Abstand vom Hubschrauber zur Erdoberfläche wird mit einem Radar-Altimeter bestimmt und der Abstand vom Bird zur Erdoberfläche mit einem Laser-Altimeter [Siemon et al., 2002].

In den Jahren 2000 und 2001 wurden innerhalb des Forschungsvorhabens DAGLA¹ die Messgebiete Cuxhaven und Bremerhaven mit einer Gesamtfläche von über 1000 km² und fast 5000 Profilkilometern mit dem Hubschrauber-System der BGR befliegen, wofür 19 Tage benötigt wurden. Der Fluglinienabstand betrug 250 m. [Siemon et al., 2004]

Die Vertikalsektion in Abbildung 3 ist das Ergebnis der 1D-Inversionen der HEM-Daten.

¹ Detaillierte aerogeophysikalische Landesaufnahme

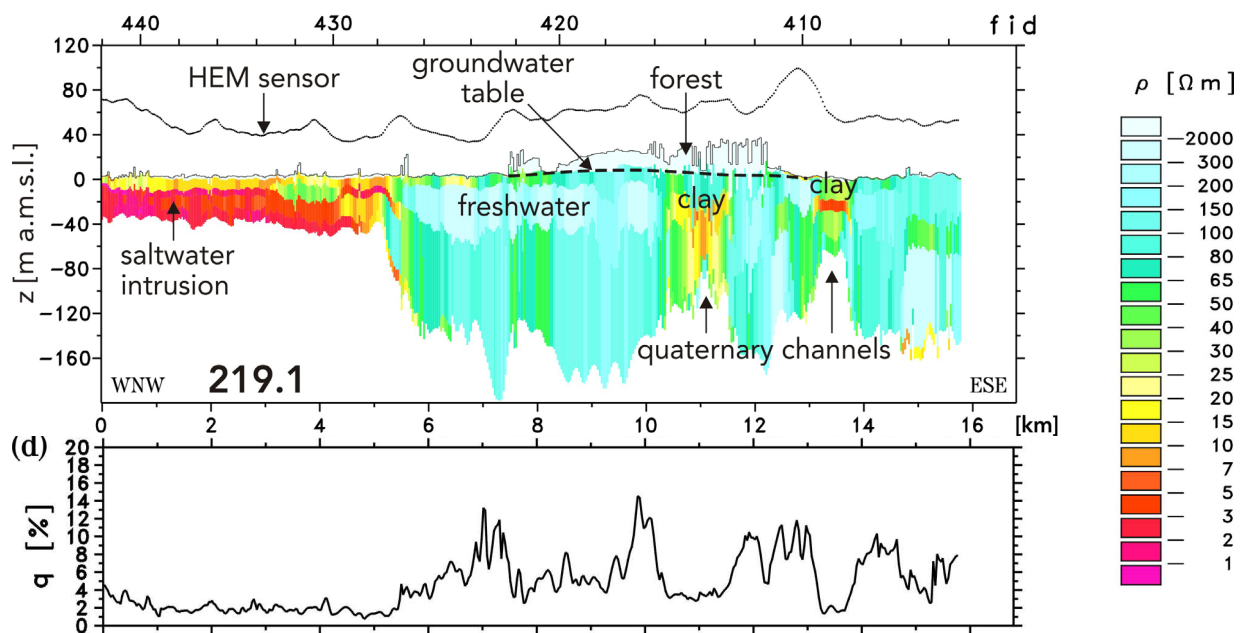


Abbildung 3: Ergebnisse der HEM 1D-Inversion der Fluglinie 219.1 (Lage s. Abb. 1). Die quartären Rinnen werden durch gut leitende Strukturen sichtbar.

An jedem Messpunkt, also alle 4 m, wurde eine 1D-Inversion durchgeführt und die Schichtmodelle als Säulen aneinandergereiht. Über den Modellen ist die Flughöhe des Sensors dargestellt und unterhalb der Anpassungsfehler der Inversion.

Diese Vertikalsektion beginnt an der Küste, die hohen Leitfähigkeiten weisen auf Salzwasserintrusionen ins Landesinnere hin. Geringe spezifische Widerstände dämpfen das induzierte elektromagnetische Feld stärker als hohe Widerstände, die Erkundungstiefe ist deshalb im Bereich der Salzwasserintrusionen stark begrenzt.

Weiter östlich stechen zwei weitere gut leitende Strukturen hervor. Hierbei handelt es sich um quartäre Rinnen mit Tonschichten im oberen Bereich. Auch tonhaltige Schichten haben einen geringen Widerstand. Die Hubschrauber-Elektromagnetik erkundet deutlich sowohl die laterale Ausdehnung als auch die Oberkante der Lauenburger Schichten [Siemon et al., 2004], doch der leitfähige Ton begrenzt die Eindringtiefe der Methode. Dort, wo dicke Tonschichten existieren, wie bei Messkilometer 11 in Abbildung 3, gelingt es mit HEM nicht diese vollständig zu durchdringen und somit deren Mächtigkeit zu bestimmen.

Messgebiet Wanhöden

Die Bremerhaven-Cuxhavener Rinne wurde mit verschiedenen geophysikalischen Methoden untersucht [Gabriel et al., 2003]. Das Messgebiet Wanhöden ist ein ausgesuchtes Testfeld, um die Kombination von unterschiedlichen geophysikalischen Methoden zu erforschen, wie Seismik, Gravimetrie, Geoelektrik, Transient-Elektromagnetik, Hubschrauber-Elektromagnetik, Bohrlochgeophysik [Wiederhold et al., 2005].

Die Seismik liefert uns die grobe Struktur der quartären Rinne, insbesondere die Basis der Rinne in 300 m Tiefe. Geoelektrik und HEM zeugen von der Existenz der gut leitenden Lauenburger Schichten.

Um zusätzliche Informationen über die elektrischen Leitfähigkeiten unterhalb der Tonschicht zu erhalten und die HEM zu verifizieren, wurden TEM-Messungen entlang der HEM-Fluglinie 35.1 im Messgebiet Wanhöden durchgeführt (Abbildung 4). Außerdem wurden auch Geoelektrische Tiefensondierungen durchgeführt [Schünemann & Steuer, 2006].

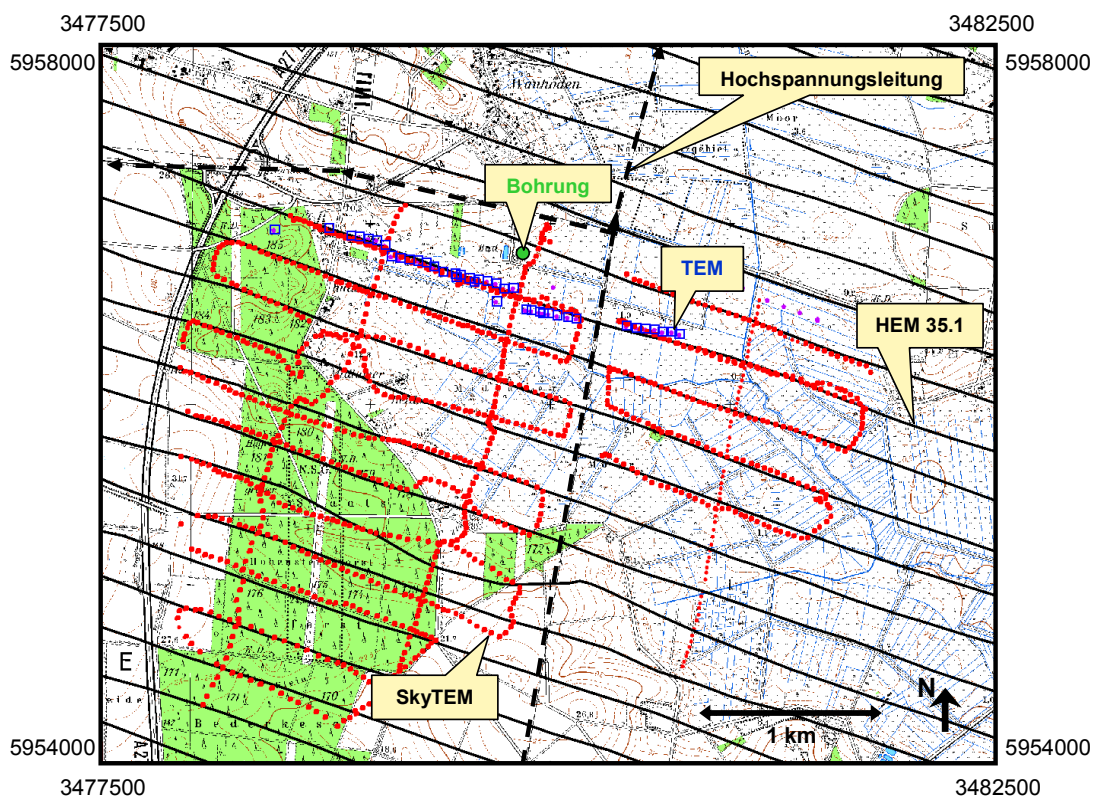


Abbildung 4: Lageplan vom Messgebiet Wanhöden: Eingezeichnet sind die TEM Stationen (blaue Kästen), die Fluglinien von HEM (schwarze Linien) und SkyTEM (rote Punkte) und die Lage der Bohrung (grüner Punkt).

Transient-Elektromagnetik

Die TEM-Messungen wurden mit der analogen Protem47-Apparatur der Firma Geonics durchgeführt. Ein Ziel der TEM ist es, die Basis der Lauenburger Schichten zu bestimmen. Eine zweite Fragestellung ist, ob es in der Tiefe einen weiteren Leitfähigkeitskontrast von Rinnensanden zu Tonen oder Salzwasser gibt und die Basis der Rinne erfasst werden kann. Dieses Messgebiet eignet sich zudem für eine vergleichende Studie von HEM, TEM und SkyTEM.

Wir haben die *Central-Loop* Konfiguration benutzt, da im Zentrum der Sendespule die z-Komponente des sekundären Feldes am größten ist. Das Sendemoment von $30\,000\text{ Am}^2$ haben wir mit einer $100 \times 100\text{ m}^2$ großen Sendespule und 3 A Sendestrom erzeugt. Die effektive Fläche der Empfangsspule war $31,4\text{ m}^2$. Die große Dynamik des Spannungssignals stellt hohe Anforderungen an den Analog/Digital-Wandler. Um die Spannungen über den gesamten Bereich auflösen zu können, wurde in drei Zeitbereichen mit verschiedenen Verstärkungen gemessen. In Abbildung 5 ist am Beispiel von zwei Stationen der Spannungsabfall in $\text{nV}/(\text{Am}^2)$ gegen die Zeit in Sekunden aufgetragen. Der Zeitbereich des Transienten reicht von $6\text{ }\mu\text{s}$ bis 7 ms nach Abschalten des Sendestroms. Ein Transient ist das Ergebnis einer internen Mittelung über 1000 Messungen. Der Stationsabstand der 46 Stationen beträgt 50 m bis 100 m . Die TEM-Sektion ist ca. 3 km lang. Der Messfortschritt war bis zu 7 Stationen pro Tag.

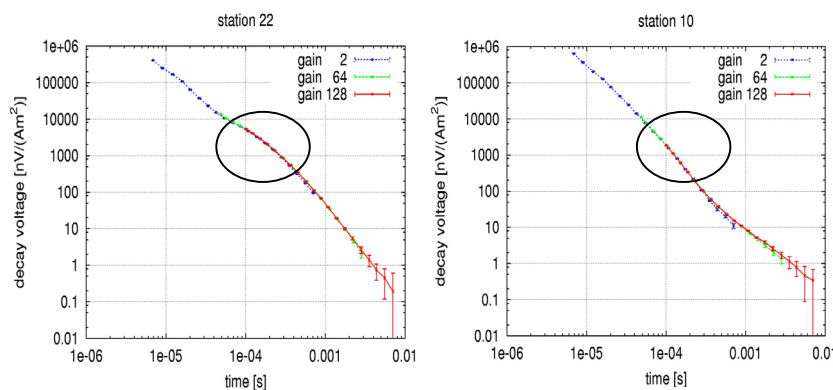
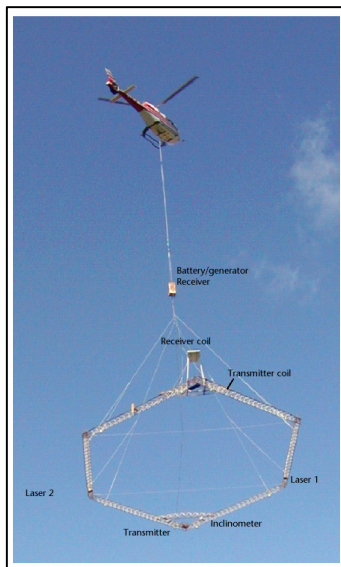


Abbildung 5: Der Vergleich eines Transienten innerhalb und außerhalb der Rinne zeigt deutliche Unterschiede zu mittleren Zeiten. Innerhalb der Rinne fällt der Transient weniger steil ab, was auf eine gut leitende Struktur hinweist.

SkyTEM

Im März 2005 wurde das Messgebiet Wanhöden, insgesamt 8 km^2 an einem Tag, mit SkyTEM [Sørensen & Auken, 2004] vom *Department of Earth Sciences* der Universität Aarhus (Dänemark) befliegen. Das hohe Sendemoment war bei der *Inloop* Konfiguration mit $36\,000\text{ Am}^2$ vergleichbar zu dem der Boden-TEM. Der Hubschrauber flog mit einer Geschwindigkeit von 18 km/h , also wesentlich langsamer als beim HEM-Verfahren. Da es sich um ein Zeitbereichsverfahren handelt und aufgrund der Wiederholungsmessungen ist der Stationsabstand mit ca. 35 m , trotz der langsamen Fluggeschwindigkeit, größer als bei der HEM mit 4 m . Das SkyTEM-System ist in Abbildung 6 dargestellt.



Der Vergleich der 1D-Inversionsergebnisse von TEM und SkyTEM in Abbildung 7 zeigt, dass die Ergebnisse nahezu identisch sind. Es wird eine leitfähige Schicht mit ca. $7 \Omega\text{m}$ zwischen 40 m und 60 m detektiert – die Lauenburger Schicht, die die Bremerhaven-Cuxhavener Rinne markiert. Außerhalb der Rinne in etwa 180 m Tiefe finden die TEM-Methoden eine weitere gut leitende Schicht. Diese kann im Bereich der Rinne nicht detektiert werden. Die TEM-Daten lassen zwar eine gut leitende Struktur erahnen, die aber schlecht aufgelöst ist und deshalb hier nicht dargestellt wurde. Wahrscheinlich liegt sie dort tiefer und wird aufgrund des Abschirmungseffekts der oberen leitfähigen Schicht nicht aufgelöst.

Abbildung 6: SkyTEM-System der Universität Aarhus.

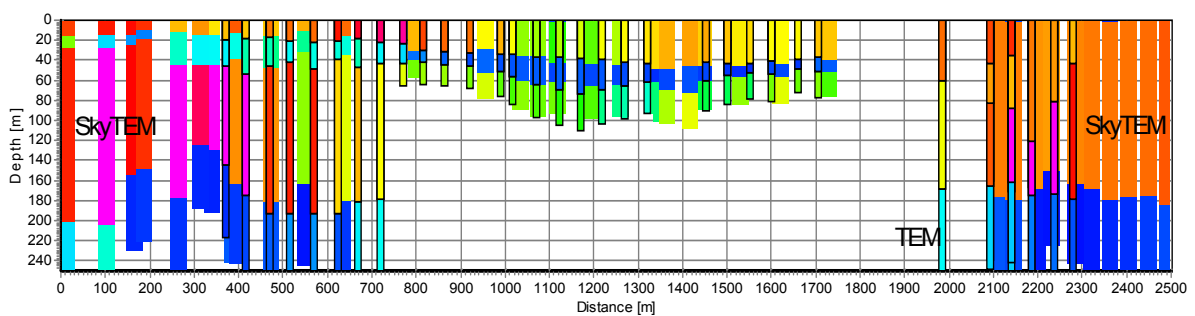


Abbildung 7: 1D-Inversionsergebnisse von TEM (umrahmte Säulen) und SkyTEM (breite Säulen).

Vergleich der Ergebnisse

Die Karten in Abbildung 8 zeigen den mittleren spezifischen Widerstand in einem bestimmten Tiefenabschnitt auf der Basis der 1D-Inversionsergebnisse. Auf der linken Seite sind die Ergebnisse der SkyTEM-Messungen, auf der rechten Seite die der HEM-Messungen dargestellt. Zwischen den Messstationen wurde interpoliert. Pinke und rote Farben weisen auf Schichten mit relativ hohen spezifischen Widerständen hin, wie Sande und Kiese, blaue Farben zeigen Schichten mit geringeren spezifischen Widerständen an, wie ton- oder salzwasserhaltige Schichten. Um den Unterschied zwischen beiden Methoden zu verdeutlichen, sind in den HEM-Karten zusätzlich die Ergebnisse der SkyTEM als farbige Punkte eingefügt.

In den SkyTEM-Daten zeichnet sich zwischen 0 m und 20 m die Tonschicht in der Rinne schon ab, im Gegensatz zur HEM, wo sie nur andeutungsweise zu sehen ist. Zwischen 40 m und 80 m wird bei beiden Methoden die Tonschicht deutlich. Sie scheint zwischen 60 m und 80 m bei der HEM breiter zu sein als bei der SkyTEM. Doch aufgrund der geringeren Eindringtiefe kann die Unterkante der Rinne mit HEM nicht aufgelöst werden. Das EM-Feld ist in der gut leitenden Tonschicht stecken geblieben.

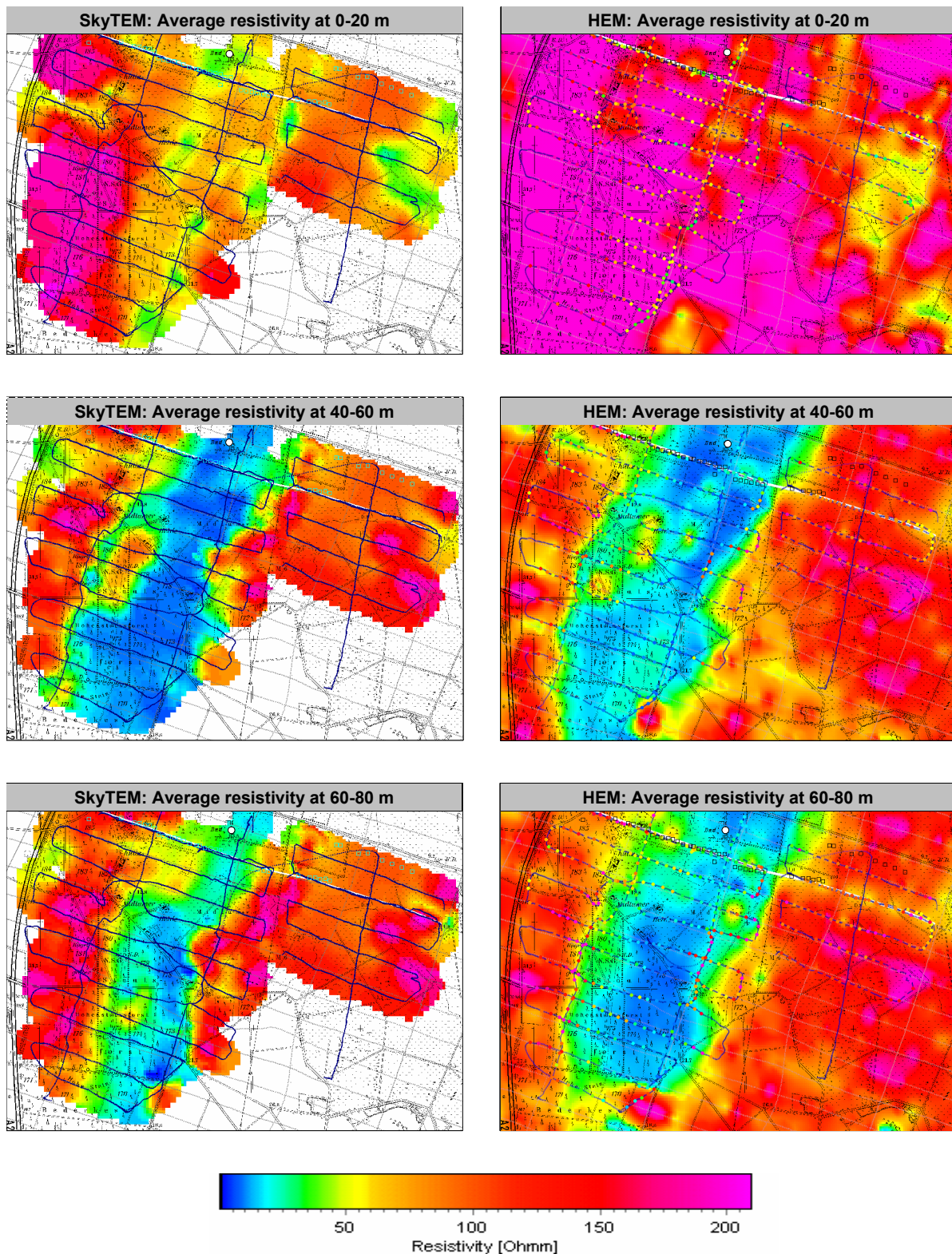


Abbildung 8: Die Widerstandskarten stellen den über einen Tiefenabschnitt gemittelten spezifischen Widerstand dar.

Um die Inversionsergebnisse richtig zu beurteilen ist es deshalb wichtig, die Signifikanz der einzelnen Modellparameter zu betrachten. In Abbildung 9 ist am Beispiel der SkyTEM die Standardabweichung von spezifischem Widerstand und Mächtigkeit der zweiten Schicht dargestellt.

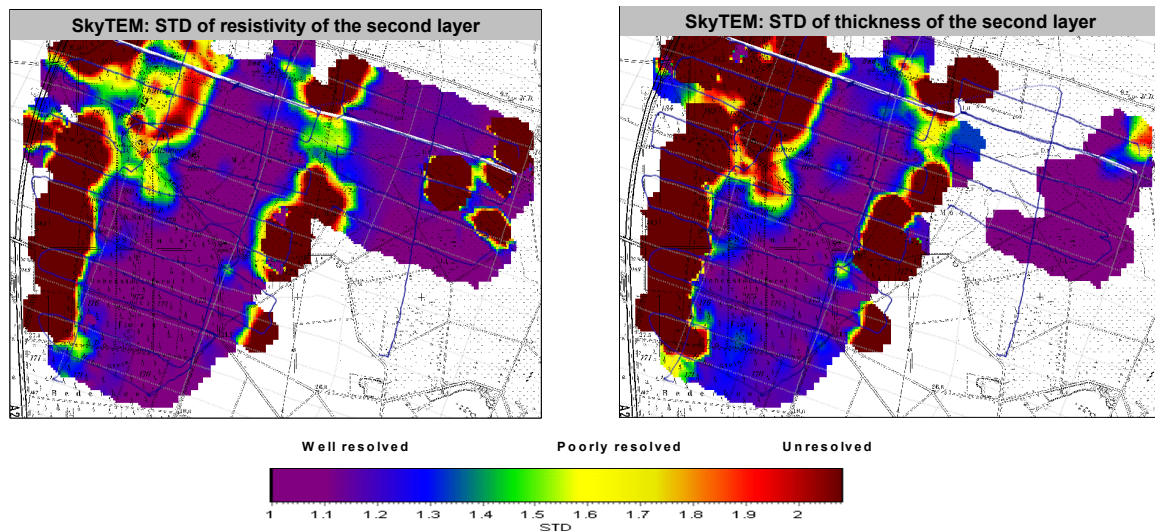


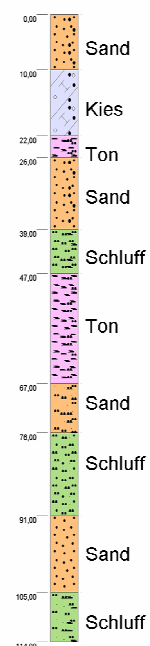
Abbildung 9: Signifikanz-Karten helfen dabei, die einzelnen Modellparameter zu beurteilen.

Innerhalb der Rinne entspricht diese der Lauenburger Schicht. Sowohl spezifischer Widerstand als auch Mächtigkeit sind hier gut bestimmt. Der spezifische Widerstand hat eine Standardabweichung unter 10%, die Mächtigkeit unter 20%. Auch östlich der Rinne ist die zweite Schicht eine gut leitende Schicht, deren spezifischer Widerstand gut bestimmt ist. Dort, wo die Daten mit einem Zwei-Schicht-Fall angepasst wurden, gibt es per Definition keine Mächtigkeit der zweiten Schicht. Westlich der Rinne ist die zweite Schicht eine oberflächennahe etwas schlechter leitende Schicht. Hier sind sowohl spezifischer Widerstand, als auch die Mächtigkeit schlecht bestimmt.

Zusammenfassung

HEM und TEM stimmen in der Lokalisierung der Lauenburger Schichten innerhalb der Rinne überein. Die spezifischen Widerstände liegen bei beiden Methoden zwischen 5 Ωm und 10 Ωm . Die Sektion in Abbildung 11 zeigt, dass HEM zusätzlich eine gut leitende Schicht in 20 m Tiefe detektiert. Diese Schicht wird durch Bohrungen und Widerstands-Logs bestätigt, bei der HEM allerdings als zu mächtig wiedergegeben (Abbildung 10 und Abbildung 11). Mit den TEM-Methoden kann die Basis der Lauenburger Schichten deutlicher bestimmt werden. Zusätzlich wird außerhalb der Rinne eine leitfähige Schicht in ca. 180 m Tiefe sichtbar.

Abbildung 10: Geologisches Profil in der Nähe der TEM-Sektion (Lage s. Abb. 4).



Aufgrund der abschirmenden Wirkung der leitenden Tonschicht konnten die Stromsysteme beider Methoden nicht zur Basis der Rinne bei ca. 300 m durchdringen. Es sind weitere TEM-Messungen mit höherem Sendemoment geplant.

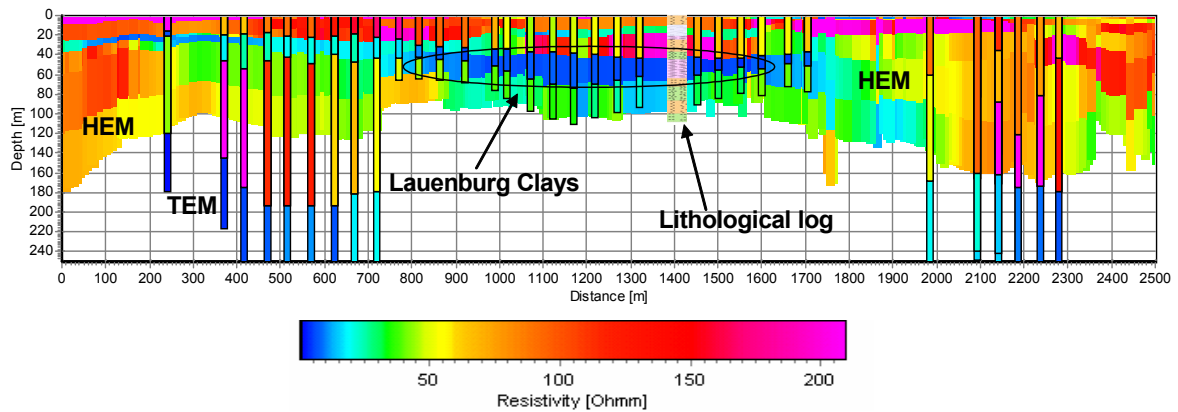


Abbildung 11: Vergleich der 1D-Inversionsergebnisse von TEM (umrahmte Säulen) und HEM (Hintergrund).

Literatur

GABRIEL, G., KIRSCH, R., SIEMON, B. & WIEDERHOLD, H. (2003): Geophysical investigation of buried Pleistocene subglacial valleys in Northern Germany. - Journal of Applied Geophysics, **53**: 159-180.

SCHÜNEMANN, J. & STEUER, A. (2006): Geoelektrische Tiefensondierung über der Cuxhavener Rinne. Protokoll über das 21. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung, Haus Wohlden, 3.10.-7.10.2005, Hildesheim.

SIEMON, B., STUNTEBECK, C., SENGPIEL, K.-P., RÖTTGER, B., REHLI, H.-J. & EBERLE, D.G. (2002): Investigation of hazardous waste sites and their environment using the BGR helicopter-borne geophysical system. Journal of Environmental & Engineering Geophysics, **7**, 4, 169-181.

SIEMON, B., EBERLE, D.G. & BINOT, F.(2004): Helicopter-borne electromagnetic investigation of coastal aquifers in North-West Germany. Zeitschrift für Geologische Wissenschaften, **32** (5/6), 385-395.

SØRENSEN, K. & AUKEN, E. (2004): SkyTEM – a new high-resolution helicopter transient electromagnetic system. Exploration Geophysics, **35**, 191-199.

WIEDERHOLD, H., GABRIEL, G., GRINAT, M. (2005): Geophysikalische Erkundung der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne im Umfeld der Forschungsbohrung Cuxhaven. – Z. Angew. Geol., **1/2005**; Hannover (in press).

Geoelektrische Tiefensondierungen über der Cuxhavener Rinne

Jörn Schünemann¹ und Annika Steuer²

¹GGA-Institut, Stilleweg 2, D-30655 Hannover, j.schuenemann@gga-hannover.de,

²Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR), Stilleweg 2, D-30655 Hannover,
annika.steuer@bgr.de

Das BurVal Projekt

Das Ziel des von der EU kofinanzierten BurVal Projektes ist es eiszeitliche Rinnen auf ihre Struktur- und hydrologischen Eigenschaften zu untersuchen und das Wissen über diese tiefen Grundwasserreservoirs zu erweitern. Die Untersuchungen erfolgen mit verschiedenen geophysikalischen und hydrogeologischen Methoden, deren Ergebnisse zur Entwicklung eines Modells für die Grundwassergewinnung dienen sollen. Die Resultate werden in zwei Handbüchern zusammengefasst. Das technische Handbuch soll Geophysikern, Hydrogeologen und Ingenieuren zur Kartierung der Rinnen und der Bewertung der Grundwasserreserven dienen. Das Handbuch für Wirtschaft und Behörden gibt Empfehlungen, wie die Rinnen genutzt und geschützt werden können.

Die bis zu 400 m tiefen, 1-2 km breiten und mehrere Kilometer langen Rinnen entstanden während der Eiszeit im gesamten Nordseeraum, als Schmelzwasser unter dem Eis abfloss und dabei tief in die tertiären Sedimente schnitt. Während des Abtauens der Gletscher wurden die Rinnen mit quartären Sedimenten verfüllt. Diese Sedimente können je nach Beschaffenheit ergiebige Aquifere bilden. Einige Aquifere werden bereits von Wasserwerken zur Trinkwassergewinnung genutzt. An der Oberfläche sind diese Rinnen

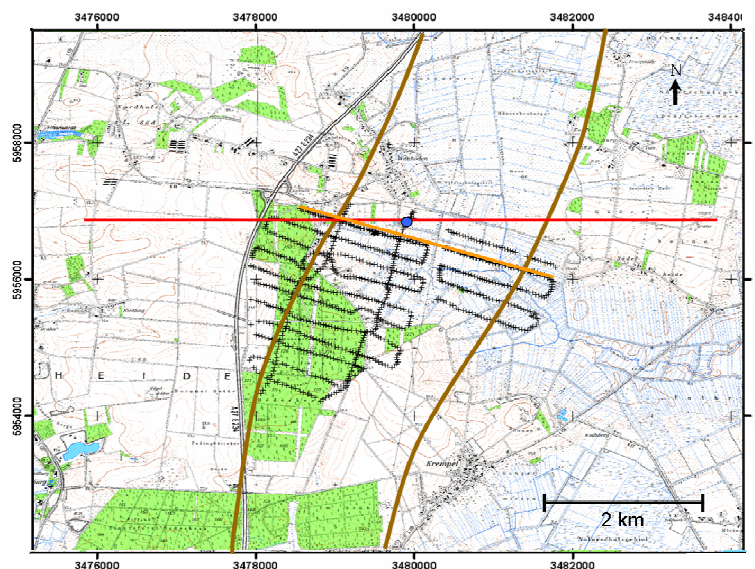


Abbildung 1: Übersichtskarte des Messgebietes Wanhöden. Eingezeichnet sind die Rinne (braun), die Schlumberger Sondierung (rote Linie quer zur Rinne), ein Referenzprofil von TEM (orange), die SkyTEM Fluglinien (schwarze Kreuze) und die Lage der Bohrung (blauer Punkt).

jedoch nicht mehr zu erkennen. Die gute Durchlässigkeit der Sedimente ermöglicht aber auch, vor allem im nordseennahen Bereich, das Eindringen von Salzwasser. Die Gefahr von Schadstoffeinträgen von der Erdoberfläche ist ebenfalls gegeben. Geophysikalischen Verfahren können dazu beitragen die Rinnen zu untersuchen. Beispielsweise wurde durch Hubschrauber-Elektromagnetik (HEM) die Lage der Rinne genau bestimmt [Siemon et al., 2004]. Aus seismischen Messungen ist die Tiefe von Untergrundstrukturen bekannt, wie z.B. die Basis der Rinne im Messgebiet Wanhöden in 300 m Tiefe. Messungen mit gravimetrischen, elektromagnetischen und elektrischen Verfahren können die Untersuchungen bestätigen und ergänzen. [Gabriel et al., 2003; Wiederhold et al., 2005]

Die Cuxhavener Rinne verläuft in Nord-Süd Richtung und ist hauptsächlich mit Sand und Kies gefüllt. Teile der Rinne sind mit dicken Ton- und Schluffschichten abgedeckt.

Geoelektrische Tiefensondierungen

Bei Schlumberger Messungen wird über zwei Elektroden A und B ein Gleichstrom in den Boden eingespeist. Im Untergrund bildet sich ein Potentialfeld aus, das im Wesentlichen von der Verteilung des spezifischen Widerstandes im Untergrund beeinflusst wird. Zwei Sonden M und N an der Erdoberfläche messen den Potentialunterschied (Abbildung 2). Hieraus lässt sich auf die Verteilung elektrischer Leitfähigkeitsstrukturen im Untergrund schließen.

Mit Schlumberger Sondierungen können Aussagen über die spezifischen Widerstände am Mittelpunkt der Auslage in verschiedenen Tiefen gemacht werden, in dem dazu die Abstände der Elektroden schrittweise vergrößert werden. Durch die wachsenden Abstände der Elektroden wird das Potential von immer tiefer liegenden Strukturen beeinflusst. Bei zu geringen gemessenen Spannungen, werden die Abstände der Sonden ebenfalls vergrößert.

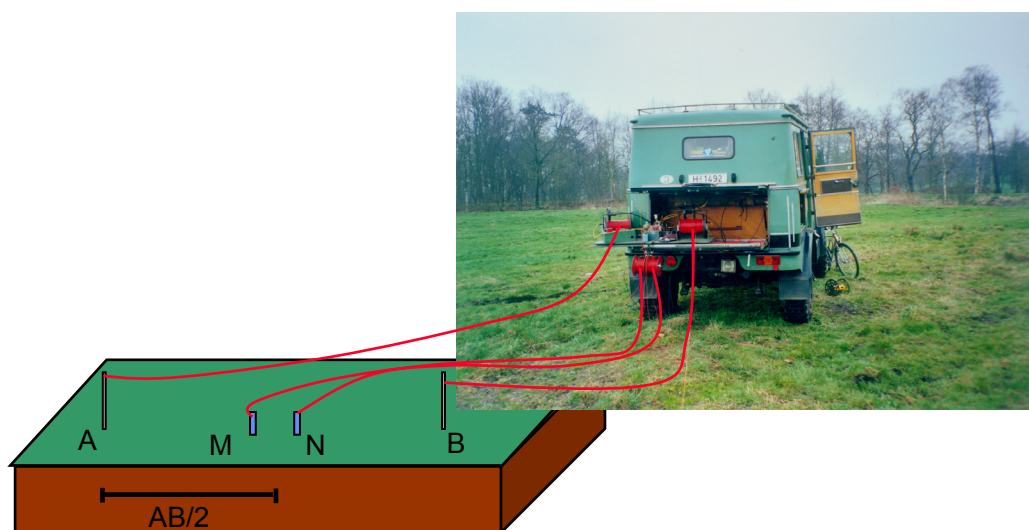


Abbildung 2: Messfahrzeug mit schematischem Aufbau der Schlumberger Anordnung.

Im Messgebiet Wanhöden bereits durchgeführte Schlumberger Sondierungen mit Elektrodenabständen von $AB/2 = 500$ m konnten die tiefen Bereiche der Rinne nicht erreichen. Nach einer

Faustformel kann hier eine Eindringtiefe von ca. 160 m abgeschätzt werden. Für elektromagnetische Methoden war aufgrund der abschirmenden Wirkung der gut leitenden Lauenburger Schichten die Eindringtiefe ebenfalls begrenzt [Steuer & Siemon, 2006]. Weitere Schlumberger Messungen mit $AB/2 = 4000$ m sollten deshalb die Ergebnisse der Elektromagnetik in größeren Tiefen ergänzen.

Zur Gegenüberstellung mit der Elektromagnetik (EM) werden die Daten bis $AB/2 = 300$ m herangezogen, da der Sondierungspunkt über der Rinne lag und die EM hier nicht tiefer als 100 m eingedrungen ist. Bei größeren Elektrodenabständen sind mehrdimensionale Effekte zu beachten.

Inversionsergebnisse Geoelektrik

Die Messdaten wurden mit dem Inversionsprogramm gkf2 [Rodemann & Reitmayr, 1996, 1998] bearbeitet. Hierbei handelt es sich um eine Weiterentwicklung des Marquardt-Inversionsprogramms INGESO [Mundry & Dennert, 1981]. Bei einer Inversion wird in einem Iterationsprozess eine Modellkurve so lange an die Kurve der Messwerte angepasst, bis eine bestimmte Fehlergrenze unterschritten wird. Im Allgemeinen wird die Anpassung bei größerer Schichtzahl besser. Jedoch sollte die Zahl der Schichten so klein wie möglich gehalten werden, weil eine größere Schichtzahl auch größere Parameterfehler zur Folge hat.

Es werden hier zwei Inversionsergebnisse dargestellt, bei denen einmal Kenntnisse über die Lauenburger Tonschicht einfließen und einmal nicht.

Ohne Kenntnisse des Untergrundes ist das Ergebnis der Inversion ein einfaches 3-Schicht-Modell. Die Lauenburger Tonschicht, bekannt aus Bohrungen und der Elektromagnetik, kann nicht aufgelöst werden, da es sich bei der Tonschicht um eine elektrisch dünne Schicht handelt. Die Modellanpassung ist mit 6% dennoch recht akzeptabel.

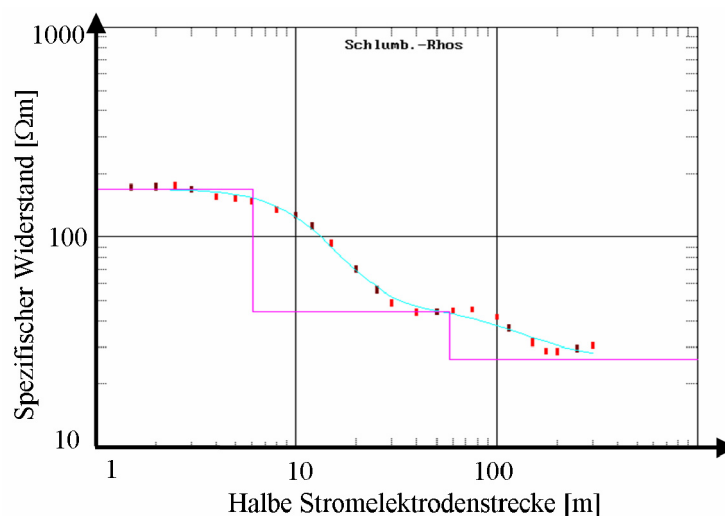


Abbildung 3: 1D Inversionsergebnis ohne Berücksichtigung von Vorinformationen. Es entsteht ein einfacher 3-Schicht-Fall.

Aus Bohrungen (Abbildung 5) und der Elektromagnetik [Steuer & Siemon, 2006] sind Mächtigkeit und Spezifischer Widerstand der Lauenburger Tonschicht bekannt. Wird deren Lage als Vorinformationen bei der Inversion berücksichtigt, ergibt sich ein 5-Schichtfall. Bei der Inversion wurden die Mächtigkeiten der 3. und 4. Schicht festgehalten, da es sich hierbei um dünne Schichten handelt und diese bei der Inversion in der Mächtigkeit gegen Null laufen würden. Der spezifische Widerstand der Tonschicht wurde nicht festgehalten, um das Ergebnis der Inversion später mit dem Ergebnis der EM vergleichen zu können. Als Resultat ergibt sich für den spezifischen Widerstand der Tonschicht mit $5 \Omega\text{m}$ ein Wert, der in der Größenordnung dem Ergebnis der EM entspricht. Die Anpassung für dieses Modell liegt bei 3,5% (RMS).

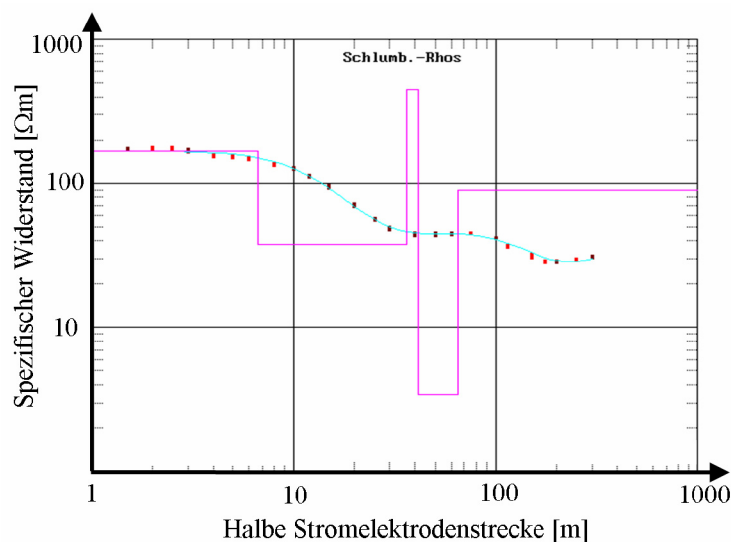
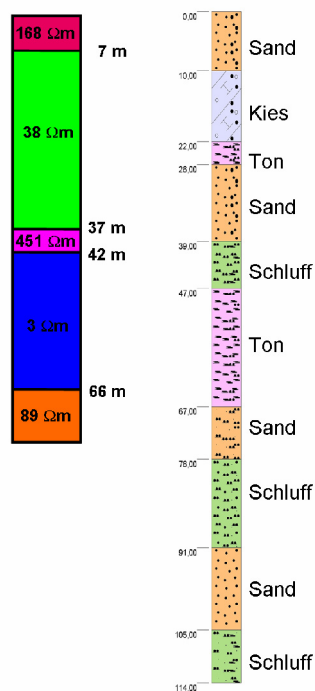


Abbildung 4: 1D Inversionsergebnis mit Berücksichtigung der Lage der Lauenburger Tonschicht. Die Mächtigkeiten der 3. und 4. Schicht wurden festgehalten.

Die Unsicherheiten bei der Bestimmung der einzelnen Parameter schwanken zwischen $\pm 3\%$ und $\pm 10\%$ für den 3-Schicht-Fall, sowie bei der 1. und 2. Schicht des 5 Schichtfalles. Die übrigen Parameter weisen Unsicherheiten von mehr als 23% auf. Die Ursache ist das Äquivalenzproblem.

Im Gegensatz zu einer idealen Kurve ist eine Messkurve mit Fehlern behaftet, die durch Messungenauigkeiten oder Abweichungen vom Horizontalschichtfall verursacht werden und sich wie ein Schlauch um die Messkurve legen. Nach dem Äquivalenzprinzip können viele verschiedene Schichtmodelle die Daten innerhalb des Schlauches erklären. Zusätzliche Informationen, zum Beispiel geologische Informationen aus Bohrungen oder Ergebnisse anderer geophysikalischer Methoden, können bei der Interpretation helfen, indem durch Festhalten von Parametern die Zahl der Äquivalenzfälle eingeschränkt wird. Einige Schichten treten zum Teil nur schwach in der Sondierungskurve hervor. Bei diesen Schichten handelt es sich um dünne Schichten. Eine Schicht kann bereits als dünn bezeichnet werden, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie das Hangende.

Beim gezeigten Modell treten zwei dünne Schichten durch das Festhalten bekannter Schichtgrenzen auf. Daraus ergeben sich die oben genannten großen Unsicherheiten.



Bei der Gegenüberstellung des 5-Schicht Inversionsergebnisses mit einem Bohrprofil aus der nahen Umgebung des Messpunktes (Lage siehe Abbildung 1) ist zu erkennen, dass die Schichttiefen zum Teil gut mit denen des Bohrprofils übereinstimmen. Die spezifischen Widerstände sind denen der HEM ähnlich, vor allem bei der 4. Schicht, der Lauenburger Tonschicht. Der spezifische Widerstand der ersten Schicht spricht für Sand. Das wird auch im Bohrprofil bestätigt. Der zweite Wert ist ein Mischwiderstand aus verschiedenen Materialien (Sand, Ton, Kies). Der spezifische Widerstand der dritten Schicht ist zu hoch und die Mächtigkeit ist recht gering. Hier tritt das Äquivalenzproblem hervor. Ein geringerer Widerstand würde hier zu einer größeren Mächtigkeit der Schicht führen. Das heißt, dass die Parameter nicht genau bestimmt werden können.

Abbildung 5: Gegenüberstellung des 5-Schicht-Inversionsergebnisses mit dem Bohrprofil.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass eine Kombination von elektrischen und elektromagnetischen Verfahren zum Vorteil bei der Auswertung genutzt werden kann. Ohne Vorwissen über den Untergrund ergibt sich bei der Geoelektrik-Inversion ein einfaches 3-Schicht-Modell, dass schon eine relativ gute Anpassung zeigt. Durch die Berücksichtigung der aus der EM gewonnenen Erkenntnisse über den Untergrund, wie hier zum Beispiel die Tiefenlage und die Mächtigkeit der Lauenburger Tonschichten, kann das Inversionsergebnis durch das Festhalten von Parametern sinnvoll beeinflusst und die Anpassung verbessert werden.

Die EM-Verfahren hatten Schwierigkeiten die Lauenburger Tonschicht in der Rinne zu durchdringen und Erkundungstiefen von mehr als ca. 100 m zu erreichen. Es zeigt sich, dass bei beiden Methoden der Widerstand der Lauenburger Tonschicht ähnlich bestimmt wird. Um Kenntnisse über die Widerstandsverhältnisse in größeren Tiefen zu bekommen, wurden Schlumberger Messungen mit $AB/2 = 4000$ m durchgeführt. Bei den hier dargestellten Ergebnissen handelt es sich um Inversionen unter 1D Bedingungen. Bis $AB/2 = 300$ m kann diese Betrachtung erfolgen. Bei größeren Elektrodenabständen muss davon ausgegangen werden, dass mehrdimensionale Effekte der Rinne eine Rolle spielen und deshalb wird eine Auswertung in diese Richtung durchgeführt. Ergebnisse hierzu liegen allerdings noch nicht vor.

Literatur

- GABRIEL, G., KIRSCH, R., SIEMON, B. & WIEDERHOLD, H. (2003): Geophysical investigation of buried Pleistocene subglacial valleys in Northern Germany. - Journal of Applied Geophysics, **53**: 159-180.
- MUNDY, E. (1985): Gleichstromverfahren, in: BENDER, F. (Hrsg.) Angewandte Geowissenschaften, Enke Verlag, Stuttgart.
- MUNDY, E. & DENNERT, U. (1981): INGESO 81, Bericht über ein Programm zur Inversion geoelektrischer Sondierungskurven für horizontal geschichteten Untergrund, NLFb-Bericht Nr. 92894, Hannover.
- REPSOLD, H. (1991): GEOKURZ, Geoelektrik in wenigen Worten, Eine kurze Anleitung für die Interpretation geoelektrischer Tiefensondierungen, Eigenverlag, Isernhagen-Kirchhorst.
- RODEMANN, H. & REITMAYR, G. (1996): Zwei Auswertprogramme für DC-Geoelektrik, in: BAHR, K & JUNGE, A. (Hrsg.) Protokoll über das 16. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung, Burg Ludwigstein, 9.4.-12.4.1996, Göttingen / Frankfurt/Main.
- RODEMANN, H. & REITMAYR, G. (1998): Kurzbeschreibung für das Programm GKF2, Stand 5/98. Technischer Bericht, GGA-Institut/BGR, Hannover.
- SIEMON, B., EBERLE, D.G. & BINOT, F. (2004): Helicopter-borne electromagnetic investigation of coastal aquifers in North-West Germany. Zeitschrift für Geologische Wissenschaften, **32** (5/6), 385-395.
- STEUER, A. & SIEMON, B. (2006): Untersuchungen der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne mit TEM, HEM und SkyTEM. Protokoll über das 21. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung, Haus Wohldenberg, 3.10.-7.10.2005, Hildesheim.
- WIEDERHOLD, H., GABRIEL, G., GRINAT, M. (2005): Geophysikalische Erkundung der Bremerhaven-Cuxhavener Rinne im Umfeld der Forschungsbohrung Cuxhaven. – Z. Angew. Geol., **1/2005**; Hannover (in press).

Messung der TEM-Antwort von Bodenproben

J. Neumann, R. Bergers, S. L. Helwig, T. Hanstein, N. Kozhevnikov, B. Tezkan

Einleitung

TEM-Messungen auf einer ehemaligen Bauschuttdeponie in Köln, die auch als „wilde Deponie“ missbraucht wurde, führten zur Hypothese, dass magnetisch viskoses Material die gemessenen TEM-Transienten verursacht (Gaidetzka et al. (2001)). Um diese Hypothese zu überprüfen, wurden im Labor die TEM-Antworten von Bohrkernproben der Altlast gemessen und mit TEM-Antworten von selbstpreparierten Kontrollproben verglichen. Die Kontrollproben bestehen aus superparamagnetischem Boden und getrockneten Quarzsand mit Kugellagerkugeln.

Motivation: TEM Transienten der Altlast

Auf der rekultivierten Altlast wurden IP, Geoelektrik, Magnetik sowie RMT-Messungen durchgeführt (Recher (2002)). TEM-Messungen wurden zunächst in central-loop Konfiguration im Zeitbereich von 4 μs bis 1 ms durchgeführt (Gaidetzka et al. (2001)). Die bei diesen Messungen gewonnenen Daten zeigen im Zeitbereich von 0,1 bis 1 ms eine Steigung von ca. -1,25. Dies kann charakteristisch für superparamagnetisches Material sein (Barsukov und Fainberg (2001)), andererseits ist superparamagnetisches Material nicht für eine Altlast zu erwarten. Zur genaueren Untersuchung wurden weitere TEM-Messungen in central-loop und separate-loop Konfiguration und größerem Zeitbereich durchgeführt (vgl. Abb. 1). Bei den in central-loop Konfiguration gemessenen Transienten nähert sich die Steigung im Spätzeitbereich dem zu erwarteten Wert von -2,5 an (vgl. Abb. 1(a)). Dafür zeigen die Transienten in separate-loop Messkonfiguration einen doppelten Vorzeichenwechsel (vgl. Abb. 1(b)).

Die in separate-loop Konfiguration gemessenen Transienten können nicht durch ein 1-D Modell ohne magnetisch viskose Schichten erklärt werden. Auch ein IP-Effekt kann die Daten nicht erklären, da dies auch einen Vorzeichenwechsel in den mit central-loop Konfiguration gemessenen Transienten verursachen würde (vgl. Fils et al. (1989)).

Ein doppelter Vorzeichenwechsel in den Transienten kann durch einen Untergrund mit sehr leitfähigen, räumlich begrenzten Objekten oder durch eine Schicht mit magnetisch viskosem Material erklärt werden.

Theorie

Die hier dargestellten Zusammenhänge findet man im wesentlichen bei Lowrie (1997) und Chikazumi (1966).

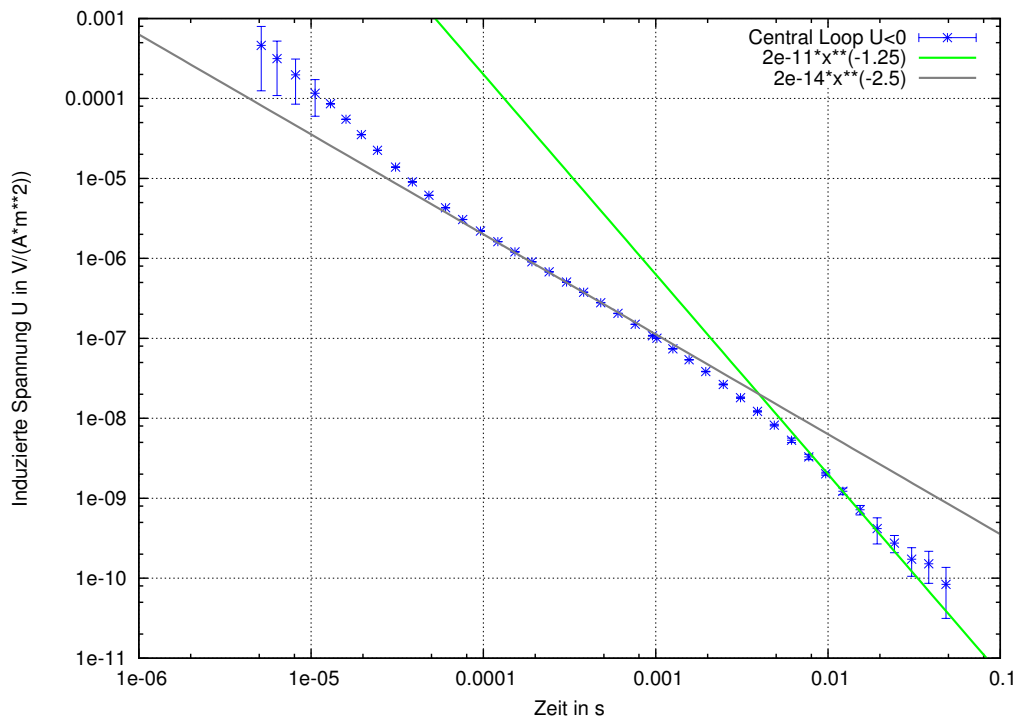
Bei TEM wird die Ausbreitung des Stroms im Untergrund durch die Diffusionsgleichung und das Ohmsche Gesetz beschrieben:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 ; j = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

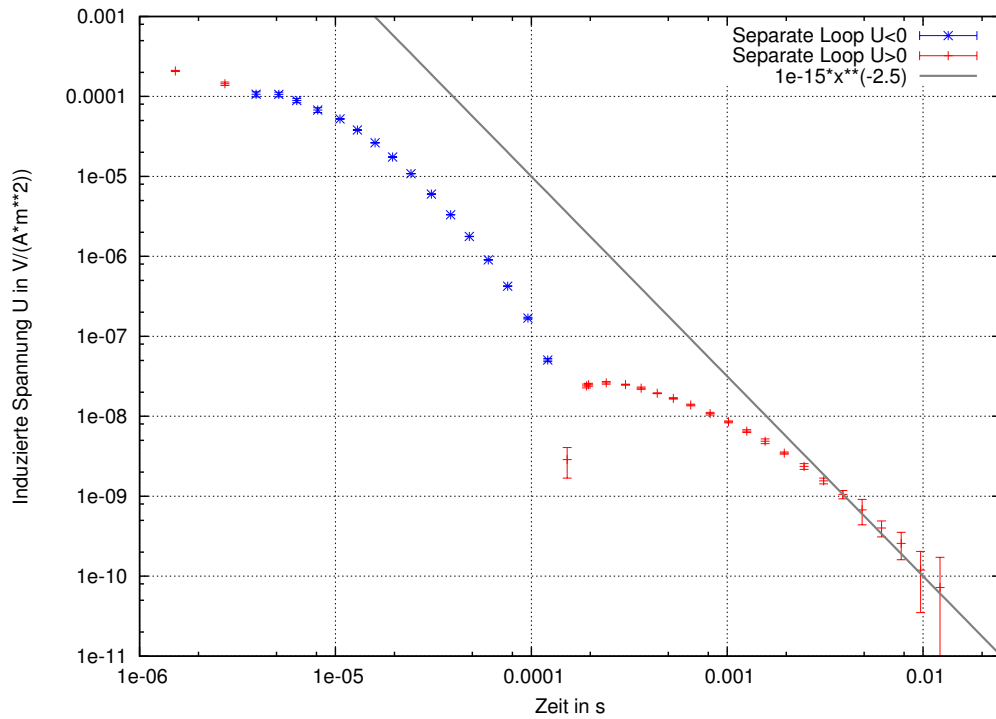
Gemessen wird die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Empfangsspule, der durch abklingende Stromsysteme im Untergrund erzeugt wird. Dies gilt nicht mehr bei magnetisch viskosen Material.

Magnetische Viskosität bezeichnet die Eigenschaft, dass die Magnetisierung verzögert auf die Änderung des Magnetfeldes reagiert. Superparamagnetismus bezeichnet einen Mechanismus für magnetisch viskoses Verhalten.

Superparamagnetismus ist bei remanent magnetisierbaren und insbesondere bei ferrimagnetischen Mineralien mit sehr kleinen Korngrößen beobachtbar. Dies liegt an der Abhängigkeit der Koerzitivität von der Form und der Größe der Körner. Die Koerzitivität bezeichnet die Stabilität der Magnetisierung von remanent magnetisierten Materialien. Die Koerzitivität eines Korn mit einheitlicher Ordnung der atomaren magnetischen



(a) Bei den in central-loop Konfiguration gemessenen Transienten beträgt die Steigung im Zeitbereich zwischen 0,1 und 1 ms nur -1,25. Erst zu noch späteren Zeiten wird ein noch stärkeres Abklingen des Signals beobachtet.



(b) Bei den in separate-loop Konfiguration gemessenen Transienten tritt neben dem typischen Vorzeichenwechsel zu frühen Zeiten ein ungewöhnlicher Vorzeichenwechsel bei ca. 0,1 ms auf.

Abbildung 1: typische Verläufe der über der Altlast gemessenen Transienten in a: central-loop und b: separate-loop Konfiguration.

Dipole nimmt mit der Größe des Korns zu. Bei Superparamagnetismus ist die Magnetisierung eines Korns ohne ein äußeres Magnetfeld nicht mehr stabil. Die Korngröße und damit die Koerzitivität ist so klein, dass die zur Änderung der Richtung der Magnetisierung notwendige Änderung der inneren Energie durch thermische Fluktuationen möglich ist.

Dieser Prozess der Änderung der Magnetisierung ist für ein Korn spontan und kann für viele Körner einer Korngröße durch ein exponentielles Gesetz mit einer Zerfallskonstanten τ geschrieben werden:

$$\tau \propto e^{-\frac{VK_u}{kT}}. \quad (2)$$

Dabei ist K_u die einachsige magnetokristalline Anisotropiekonstante, V das Volumen, T die Temperatur und k die Boltzmannkonstante.

Bei natürlich gebildetem superparamagnetischem Boden kann man von einer Verteilung verschiedener Korngrößen ausgehen. Die zeitabhängige Magnetisierung wird durch Superposition von gewichteten $e^{-t/\tau}$ Termen beschrieben. Wird diese Wichtung $1/\tau$ gesetzt, führt dies zu

$$\vec{M}(t) = \frac{\vec{M}_0}{N} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \quad (3)$$

$$\Rightarrow \vec{M}(t) \approx \vec{M}_0 \frac{1}{\ln(\tau_2/\tau_1)} (\ln(\tau_2) - 0.577 - \ln(t)) \quad \text{für } \tau_1 < t < \tau_2. \quad (4)$$

Hierbei ist τ_1 die kleinste und τ_2 die größte Zerfallskonstante, welche mit der kleinsten und der größten Korngröße korrespondiert und $\vec{M}_0$ die Magnetisierung direkt nach Abschalten des äußeren Magnetfeldes. N ist einer Normierungskonstante, für die $N = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 1/\tau d\tau = \ln(\tau_2/\tau_1)$ gelten muss, da das Integral in Gl. 3 für den Zeitpunkt $t = 0$ die Magnetisierung $\vec{M}_0$ liefern muss. Eine ausführliche Herleitung von Gl. 4 findet man bei Chikazumi (1966).

Für die im Empfängerkabel induzierten Spannung gilt dann:

$$U_{\text{ind}} \propto \int \frac{\partial \vec{M}(t)}{\partial t} dV \propto -\frac{1}{t}. \quad (5)$$

Messung der TEM-Antwort in Labor

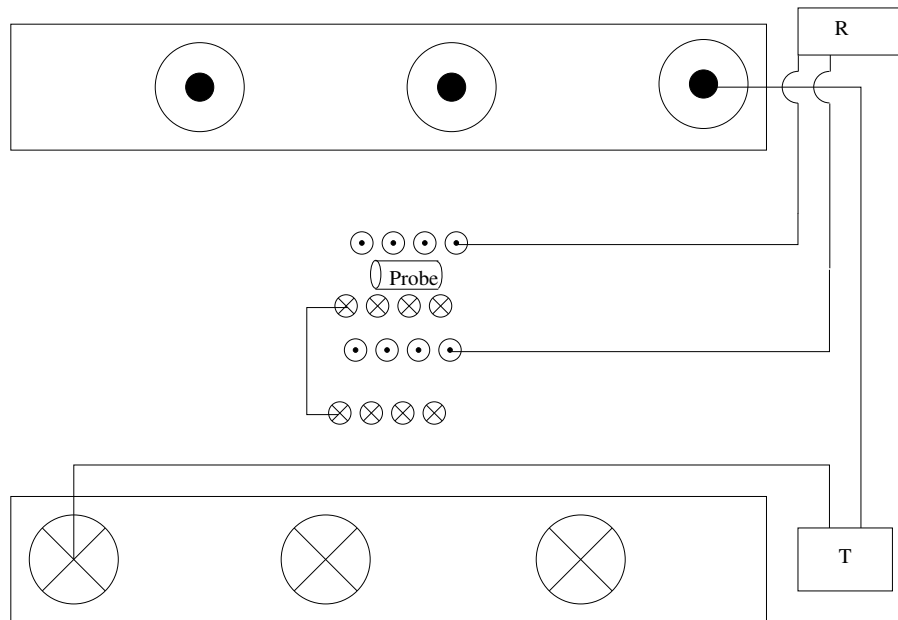


Abbildung 2: Spulenanordnung zur Messung der TEM-Antwort einer Probe

Das Ziel des Baus der Laborapparatur war es, magnetisch viskoses Material in Bohrlochproben der Altlast nachzuweisen (vgl. Buselli (1982)). Das Messsystem besteht aus einer großen Sendespule und zwei differentiell

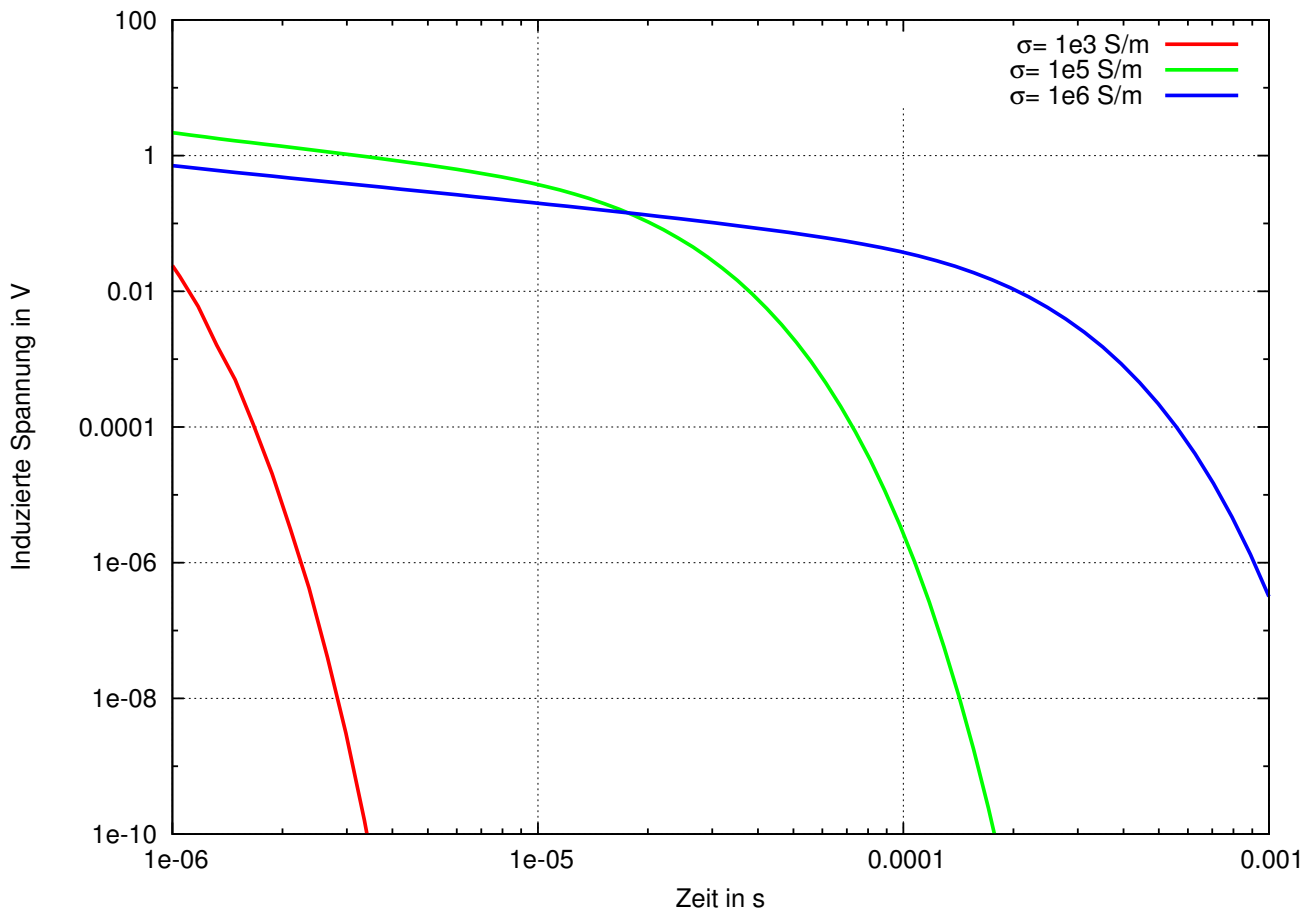


Abbildung 3: Simulation von TEM-Antworten mit homogenen Leitfähigkeiten

geschalteten Empfangsspulen und ist in Abb. 2 schematisch dargestellt. Die Induktion des Primärfelds in den beiden Empfangsspulen hebt sich gegenseitig auf und verhindert die Übersteuerung der Empfangselektronik. zur Datenaufzeichnung wurde die Kölner NanoTEM-Ausrüstung verwendet, was in Abb. 2 mit T (Sender) und R (Empfänger) angedeutet ist. Die Proben sind zylinderförmig, 60 mm hoch und 20 mm im Radius.

Simulation der Messapparatur

Die Messung von Proben ohne magnetische Viskosität wurde mit dem Programm FEMLAB simuliert. Dies wurde genutzt, um die Messapparatur mit einem genau abgemessen Aluminium-Zylinder auf systematische Fehler zu überprüfen. Der relative Fehler zwischen simulierten und gemessenen Transienten liegt bei ca. 25%. Mit den Simulationen kann daher nur die Größenordnung der gemessenen Signale bestimmt werden. Dies ist ausreichend zur Abschätzung der minimalen Leitfähigkeit, die eine Probe haben muss, um ein messbares Signal zu erzeugen. Für drei Proben mit den homogenen Leitfähigkeiten $\sigma = 10^3 \text{ S/m}$, $\sigma = 10^5 \text{ S/m}$ und $\sigma = 10^6 \text{ S/m}$ ist dies in Abb. 3 abgebildet. Die Messelektronik kann Spannungen oberhalb von 10^{-5} s auflösen. Da für natürliche Bodenproben Leitfähigkeiten in der Größenordnung von $\sigma = 10^3 \text{ S/m}$ und größer unrealistisch sind, kann man davon ausgehen, dass die homogene Leitfähigkeit einer Bodenprobe kein messbares Signal erzeugt. Dies wurde mit einer Probe, welche eine gesättigte Salzwasserlösung enthielt, überprüft.

TEM-Antwort der Kontrollproben

Die TEM-Antworten der Bohrkernproben wurden mit TEM-Antworten der Kontrollproben verglichen. Die Kontrollproben teilen sich auf in Proben mit superparamagnetischem Boden (Laterit) und Proben, die eine oder mehrere Stahlkugeln enthalten. Die Stahlkugeln werden in diesen Proben mit trockenem Quarzsand in ihrer Position fixiert.

Die im Labor gemessenen TEM-Antworten einiger Kontrollproben sind in Abb. 4 zu sehen. Die Transienten der Kontrollproben mit den Stahlkugeln zeigen ein exponentielles Abklingverhalten und unterschieden sich damit von dem Abklingverhalten des superparamagnetischen Bodenes. Im Einklang zu Gl. 4 induzieren die

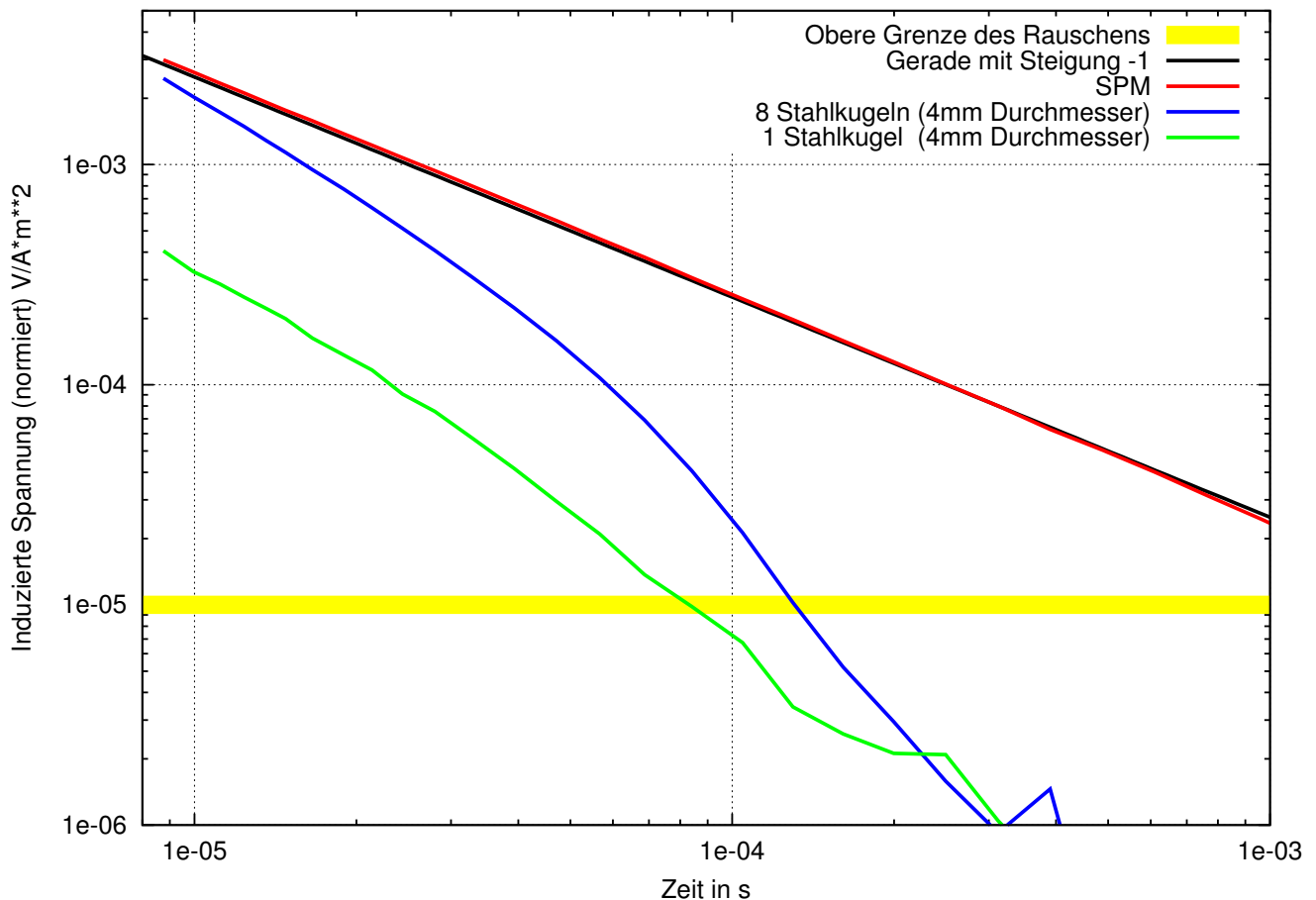


Abbildung 4: TEM-Antwort der Kontrollproben mit Stahlkugeln und mit SPM-Material

superparamagnetischen Proben eine Spannung proportional zu t^{-1} .

TEM-Antwort der Bohrkernproben

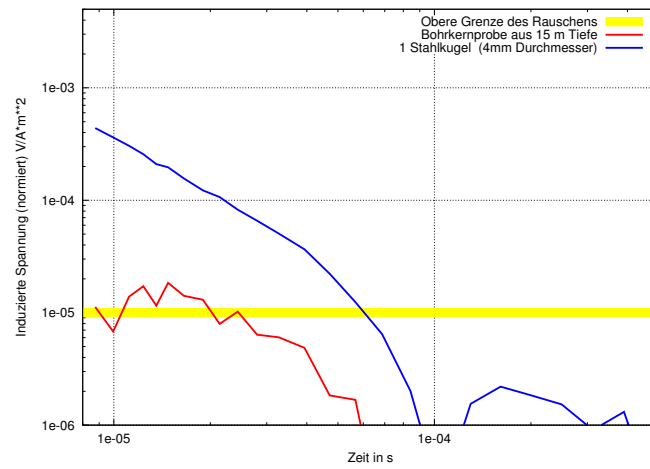
Auf der Altlast wurden drei jeweils 15 m tiefe Bohrungen durchgeführt. Aus jedem Meter gibt es 1 bis 2 Proben, deren TEM-Antwort gemessen wurde. Somit konnte die TEM-Antwort von ca. 50 Bohrkernproben aus drei Bohrlöchern der Altlast gemessen werden.

Die Transienten der Bohrkernproben wurden in drei Kategorien eingestuft:

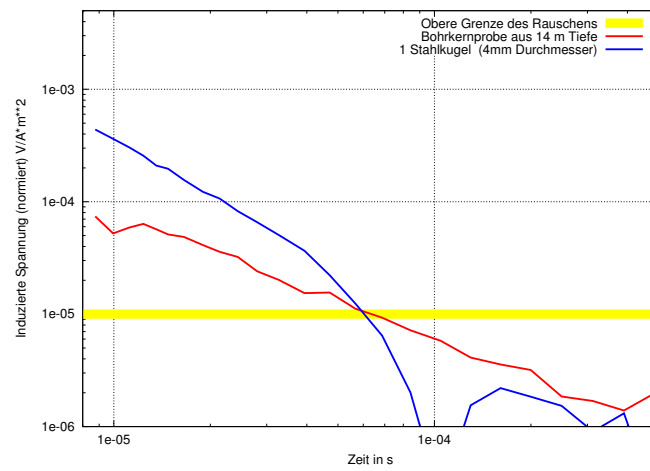
1. Kategorie: schwacher Transient (vgl. Abb. 5(a)): Das Signal kann nicht von Rauschen unterschieden werden.
2. Kategorie: mittlerer Transient (vgl. Abb. 5(b)): Das Signal hebt sich wenig, aber deutlich vom Rauschen ab. Diese Transienten scheinen teilweise langsamer abzufallen als die Transienten der Proben mit Stahlkugeln, was aber nur bei sehr wenigen Proben der Fall ist.
3. Kategorie: starker Transient (vgl. Abb. 5(c)): Das Signal ist sehr ähnlich zu den Kontrollproben mit den Stahlkugelnproben.

Überraschend ist, dass sehr viele Bohrkernproben eine TEM-Antwort zeigen, wie in Abb. 6 zu sehen ist. Dies wurde aufgrund der Ergebnisse der Simulation der Messapparatur nicht erwartet.

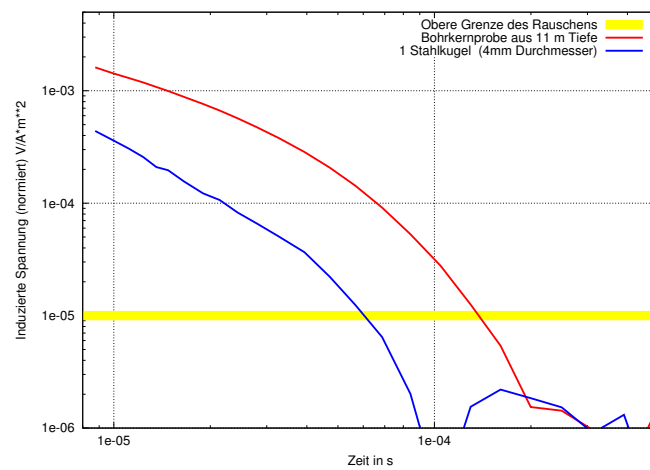
Dabei ist sowohl die Stärke als auch die Form der TEM-Antwort der Bohrkernproben deutlich ähnlicher zu den TEM-Antworten der Kontrollproben mit den Stahlkugeln als zu den Kontrollproben mit den superparamagnetischen Kontrollproben. Es liegt daher der Schluss näher, dass die gemessenen Transienten durch Metalleinschlüsse erzeugt werden. Allerdings ist es theoretisch denkbar, dass die TEM-Antworten der Bohrkernproben durch superparamagnetischen Boden erzeugt werden. Ein durch Superparamagnetismus induzierter exponentieller Abfall des Empfangssignals ist denkbar, wenn die Größenordnung der maximalen Zerfallskonstante τ_2 (vgl. Gl. 3) in der Größenordnung des Zeitfensters des Messbereiches liegt. In diesem Fall wäre die maximale Korngröße begrenzt.



(a) schwacher Transient, Bohrkernprobe aus 15 m Tiefe



(b) mittlerer Transient, Bohrkernprobe aus 14 m Tiefe



(c) starker Transient, Bohrkernprobe aus 11 m Tiefe

Abbildung 5: TEM-Antwort der Bohrkernproben der Kategorie 1,2 und 3

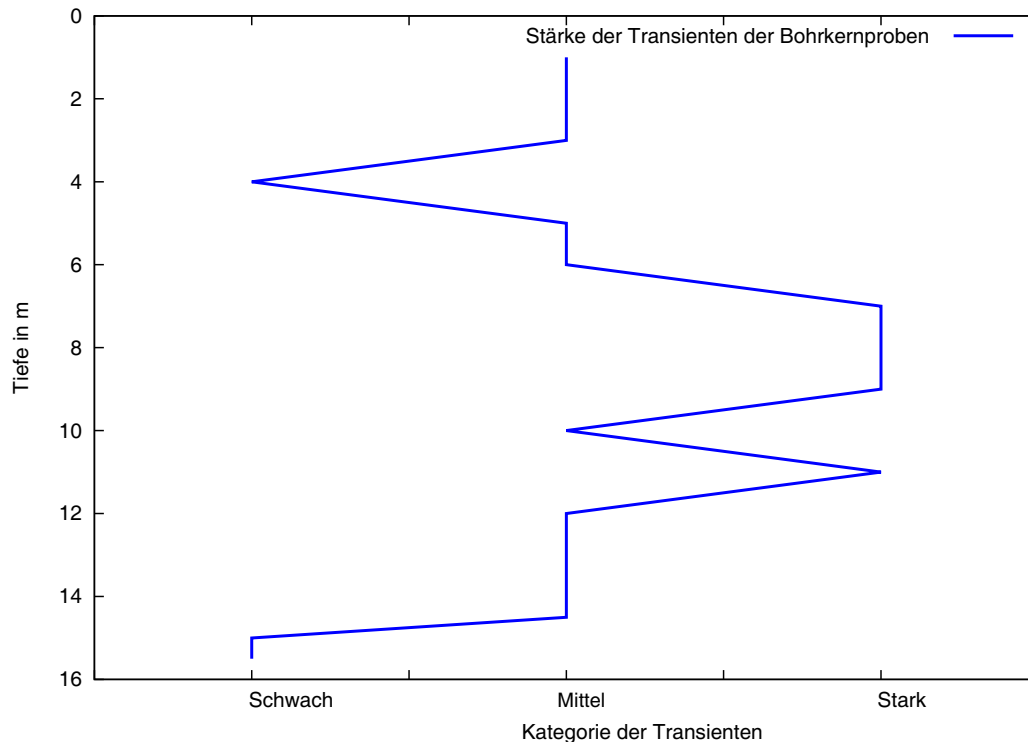


Abbildung 6: Kategorien der TEM-Antworten der Bohrkernproben des dritten Bohrloches

Im Gegensatz zu den bisherigen Messergebnissen bei Barsukov und Fainberg (2001), Buselli (1982) und den Kontrollproben mit superparamagnetischem Boden würde dieser Superparamagnetismus eine um Dekaden kleinere maximale Zerfallskonstante τ_2 haben.

Da die Stärke der Transienten von einigen Bohrkernproben in der Größenordnung der Stärke der Transienten der Kontrollproben mit 8 4mm Stahlkugeln liegen, ist davon auszugehen, dass die Metalleinschlüsse einige mm groß sein müssen. Nach dem Öffnen einer solchen ausgewählten Bohrkernprobe wurde tatsächlich ein Nagel gefunden.

Diskussion

Die Messung von TEM-Antworten von Bodenproben ist mit einer neuen Laboranordnung erfolgreich durchgeführt worden. Die TEM-Antwort des superparamagnetischen Bodens zeigt im Einklang mit der Theorie (Gl. 4) einen Abfall von t^{-1} . Keine der Bohrkernproben der Altlast zeigt einen Transienten ähnlich zu den Kontrollproben mit superparamagnetischem Boden. Die meisten Bohrkernproben zeigen Transienten ähnlich zu den Proben mit Stahlkugeln. Würden die TEM-Antwort der Bohrkernproben durch superparamagnetisches Material erzeugt werden, hätte dieser im Vergleich zu bisher beobachteten Superparamagnetismus eine deutlich niedrigere maximale Zerfallskonstante und damit eine deutlich niedrigere maximale Korngröße. Es ist daher schlüssiger anzunehmen, dass die TEM-Antwort der Bohrkernproben durch Metalleinschlüsse und nicht durch superparamagnetischen Boden erzeugt werden. Überraschend ist aber, wie viele Bohrlochproben einen messbaren Transienten erzeugen. Außerdem ist nach wie vor unklar, warum die auf der Deponie gemessenen Transienten an verschiedenen Orten einen sehr einheitlichen Verlauf zeigen. Wenn kleine Metallkörper die Ursache für den Verlauf der Transienten sind so müssen sie relativ homogen über die Deponie verteilt sein.

Literatur

- Barsukov, P. O. und E. B. Fainberg, Superparamagnetic effect over gold and nickel deposits, *Europ. J. Environ. Eng. Geophys.*, 6, 61–72, 2001.
- Buselli, G., The effect of near-surface superparamagnetic material on electromagnetic measurements, *Geophysics*, 47, (9), 1315–1324, 1982.

- Chikazumi, S.**, *Physics of Magnetism*, John Wiley, 2. Auflage, Juni 1966.
- Fils, M. F., G. A. Newman und G. W. Hohmann**, Induced-polarization effects in time-domain electromagnetic measurements, *Geophysics*, 54, (4), 514–523, 1989.
- Gaidetzka, A., M. Goldman, S. L. Helwig und B. Tezkan**, Erste Erfahrungen mit der NanoTEM-Apparatur, A. Hördt und J. Stoll (Her.) *Protokoll über das 19. Kolloquium Elektromagnetische Tiefenforschung*, 2001.
- Lowrie, W.**, *Fundamentals of Geophysics*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- Recher, S.**, *Dreidimensionale Erkundung von Altlasten mit Radiomagnetotellurik - Vergleiche mit geophysikalischen, geochemischen und geologischen Analysen an Bodenproben aus Rammkernsondierungen*, Dissertation, Köln, 2002.

Investigation of the Groundwater Resources in the Eiseb Graben in Namibia with TEM Soundings

Christopher Stadtler¹, Armin Margane¹, Friedrich Schildknecht¹, Uwe Schäffer¹
& Jens Wrabel²

Abstract: Within the framework of the Namibian-German Technical Cooperation, funded by the German Government, extensive geophysical and hydrogeological investigations were conducted from 2002 to 2005 in the Eiseb Graben in the Namibian Kalahari. The objective was to delineate the aquifer system and to assess its exploitation potential. The investigation comprised time-domain electromagnetic (TEM) soundings, tectonic interpretations of satellite images as well as a drilling program with borehole geophysics and water sampling, followed by a water analysis. A total of 77 TEM soundings were carried out in two field campaigns. The soundings were highly successful to delineate the before unknown extent of the Eiseb Graben, and the resistivity distribution accurately displays its internal structure. A promising area for groundwater exploitation was located at the northern graben flank, possibly bound to a paleo-channel filled with relatively coarse sediments. Based on the TEM results, locations for 7 exploration boreholes were recommended and drilled with a maximum drilling depth of 378 m. The main aims of the drilling program were to establish an interpretation basis for the TEM soundings and to delineate the alluvial aquifer system within the graben. The results reveal that at the northern edge of the graben the alluvial Kalahari filling reaches more than 378 m thickness and contains sections of high permeability. The yield of one of the boreholes was determined to reach 120 m³/h, which exceeds by far formerly achieved yields in this area of max. 3 m³/h. Since the knowledge about the extent of the Eiseb Graben aquifer system is still rather limited, the exploitation potential can presently not be assessed precisely.

1. Introduction

The project 'Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia', a cooperation between the Namibian Department of Water Affairs (DWA) and the Federal Institute for Geosciences and Natural Resources (BGR), started in October 2002 and ended in March 2005. The program was based on the findings of two desks studies carried out several years before (BIWAC, 1999; FIELITZ, 1999). Three exploration areas in Eastern Caprivi, in the Oshivelo area and in the eastern part of the Namibian Kalahari in Omaheke were defined for detailed studies on the available groundwater resources. Concerning the Omaheke region, the project chose the Eiseb Graben, a tectonic graben at the border with Botswana (Fig. 1), as investigation target.

Due to the lack of infrastructure and the low availability of water resources, the Omaheke region, a traditional settling area for the Hereros, is only sparsely populated. The total population presently is about 80,000 (AFRICON, 2002), but for the survey area a total number of less than 3,000 people were counted. The development of the local groundwater resources is difficult because of unfavourable geological conditions. The success rate of boreholes drilled in the area was therefore less than 10 % and a lot of money had been wasted for the drilling of dry boreholes in areas known for its generally low exploitation potential. Long-term averages of rainfall and potential evaporation are around 400 mm/a and 3,000 mm/a, respectively. Therefore generally limited possibilities for groundwater recharge may exist.

¹ Federal Institute for Geosciences and Natural Resources (BGR), P.O. Box 510153, 30631 Hannover, Germany, e-mail: c.stadtler@bgr.de

² Department of Water Affairs (DWA), Private Bag 13193, Government Office Compound, Windhoek, Namibia

The Omaheke target area was integrated into the DWA-BGR project on an initiative of the former German President Roman Herzog. Accepting the German responsibility for the eviction of the Hereros from their traditional tribal land in the course of the Herero War, Herzog promised Germany's help in a resettlement project planned by the Ministry of Lands Resettlement and Rehabilitation in 1993. It was planned to develop 862,000 ha of grazing land in a region north of the Eiseb Graben with the purpose to resettle about 4,000 Hereros and Mbanderus that were to be repatriated from Botswana. The estimated water supply requirement would be about 900,000 m³/a. The plan, however, had to be given up due to the lack of available groundwater resources.

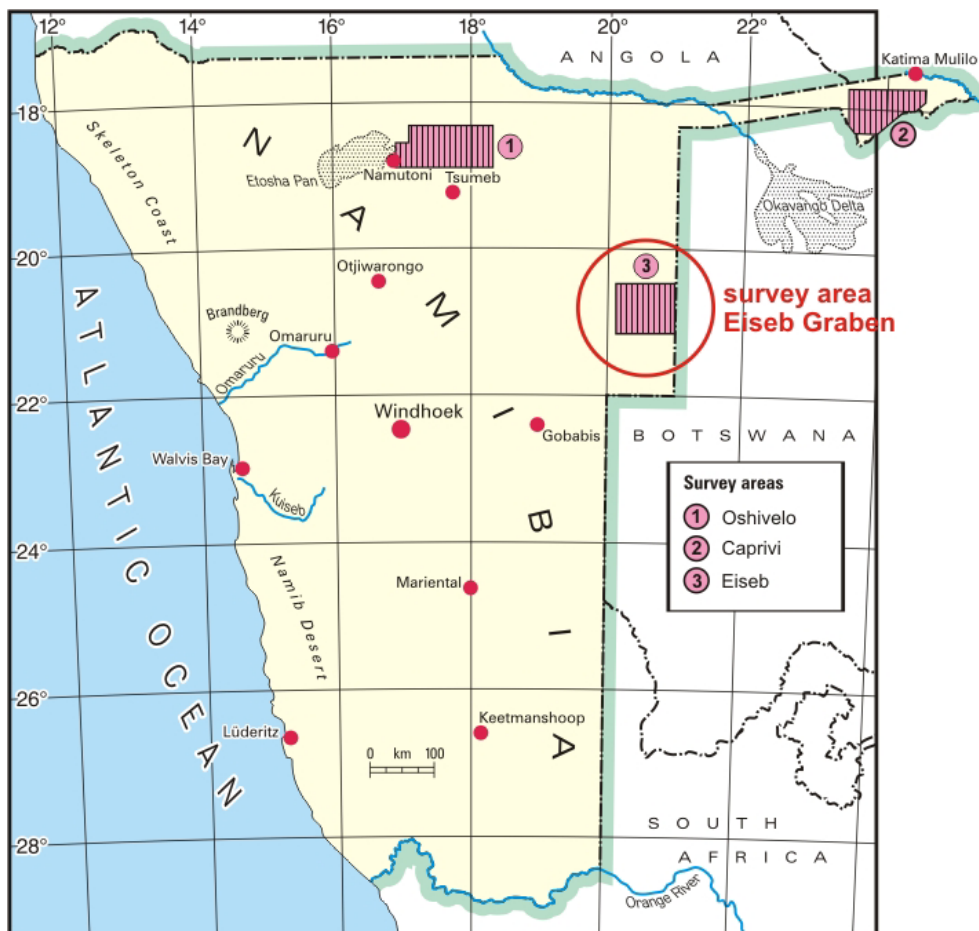


Figure 1: DWA-BGR survey areas in Namibia

The resettlement project area was then shifted towards the Eiseb Graben area where an extensive primary aquifer was assumed according to earlier studies. The evaluation of drilling reports and geoelectrical soundings carried out at the Eiseb lineament indicated a graben structure in this area. Exploration boreholes drilled to depths between 160 and 200 m yielded between 1 and 3 m³/h. The groundwater reserves in the area assumed on this experience were not considered sufficient for the requirement of the repatriation project, and the resettlement plan was abandoned. Nevertheless, it developed a steady flow of Hereros resettling from Botswana to their former grazing area in the Kalahari of Namibia and after the conclusion of the repatriation programme, a total of about 3,000 people with an estimated 12,000 head of cattle were registered as new Namibian citizens.

For the supply of the growing population, the aim of the DWA-BGR project in the Eiseb Graben was to verify groundwater reserves with a yield of 300,000 m³/a and to improve the success rate of drilling activities.

The Eiseb Graben was exclusively selected as survey area because it was considered a promising target. While in most parts of the region around the Eiseb Graben the sedimentary cover is relatively thin and the groundwater table is encountered within the bedrock formations, it was expected from earlier activities that in the Eiseb Graben a deep freshwater aquifer might exist within Kalahari or Karoo sedimentary layers. Since freshwater in bedrock formations is constrained to fractures and voids, a detection of favourable drill sites by geophysical methods is notoriously difficult, particularly if the water table is encountered at greater depths (approx. 150 m below surface). A successful geophysical groundwater survey was considered to be by far more promising in the porous aquifer conditions within the Eiseb Graben than in the bedrock formations outside. Furthermore the Graben was believed to drain the surrounding areas, leading to a regional groundwater flow towards east into the swamps of the Okavango Delta in Botswana. Hence, it was planned to delineate the alluvial aquifer system in the Graben by analyzing the resistivity distribution of its sedimentary fill.

In the survey area, the terrain gently descends from about 1,300 m in the west to about 1,000 m in the east. The satellite image (Fig. 4) clearly reveals the presence of W-E stretching longitudinal dunes. Geologically, the area is dominated by Kalahari sediments. KLOCK (2001) differentiates the Tsumkwe, Eiseb, Otjinene and Aeolian units (from bottom to top). Alluvial breccias of the Tsumkwe Formation form the base of the Kalahari. They are overlain by the Eiseb Fm., which is made up of massive or laminated limestones, pebbly sandstones and silcretes. Both formations are only partly consolidated.

The project started in October 2002 with geophysical measurements in order to facilitate the establishment of geological and hydrogeological concept models for the investigation areas. Time-domain electromagnetic measurements (TEM) were conducted along profiles perpendicular to the graben axis (Fig. 2). In a first phase, TEM measurements along four profiles with 54 soundings were conducted in 2003 (FIELITZ et al., 2004). They were extended by another 23 TEM soundings along three profiles in a second phase in early 2005 (SCHILDKNECHT et al. 2005). The intention of this second campaign was to verify the existence of the detected freshwater aquifer, to delimit its extent and to improve the horizontal resistivity resolution by additional soundings in area of special interest.

2. TEM soundings

The TEM measurements were carried out by Poseidon Geophysics Limited, Botswana. All soundings were completed using Zonge GDP-32 equipment, manufactured by Zonge Engineering and Research Organization, Tucson, USA. The system uses an air cored TEM/3 sensor with an effective coil area of 10,000 m². For the current supply a Zonge GGT10 was available, producing a ramped square wave from DC to 8 kHz.

The transmitter loop size for all soundings was 200 m x 200 m, with a single turn wire of 10 ga. Soundings were recorded with the receiver coil axle oriented vertically and located in the centre of the transmitter loop. Three base frequencies of 1 Hz, 4 Hz and 16 Hz were used for each station. Single readings were averaged (stacked) with 64, 256 and 512 cycles for 1, 4, and 16 Hz respectively. Transmitter currents of 20 A for the 1 Hz frequency base, 15 A for the 4 Hz and 5 A for the 16 Hz base frequency were used.

Because of the large transmitter loop size of 200 m x 200 m, the resistivity distribution at shallow depths is rather uncertain. Additional soundings with smaller transmitter loop sizes to resolve shallow layers were rejected in favour of a denser sounding grid with 200 m x 200 m transmitters, in view of the limited budget and because of the great depth of the groundwater table.

Delay time corrections and averaging of readings from repeated soundings were done by the standard Zonge software SHRED and TEMAVG. TEMAVG was additionally used to provide quick look plots for data quality control in the field. Interpretation of the soundings was accomplished with the software TEMIX from Interpex, USA, which executes a 1-dimensional inversion (ridge regression).

Figure 2 shows the locations of the TEM soundings. The sites and numbers of the phase I measurement campaign are marked in black; the soundings of phase II in red. Some of the new soundings fill gaps in the phase I profiles 2 and 4. Additional short profiles (5, 6 and 7) were placed near the northern graben flank.

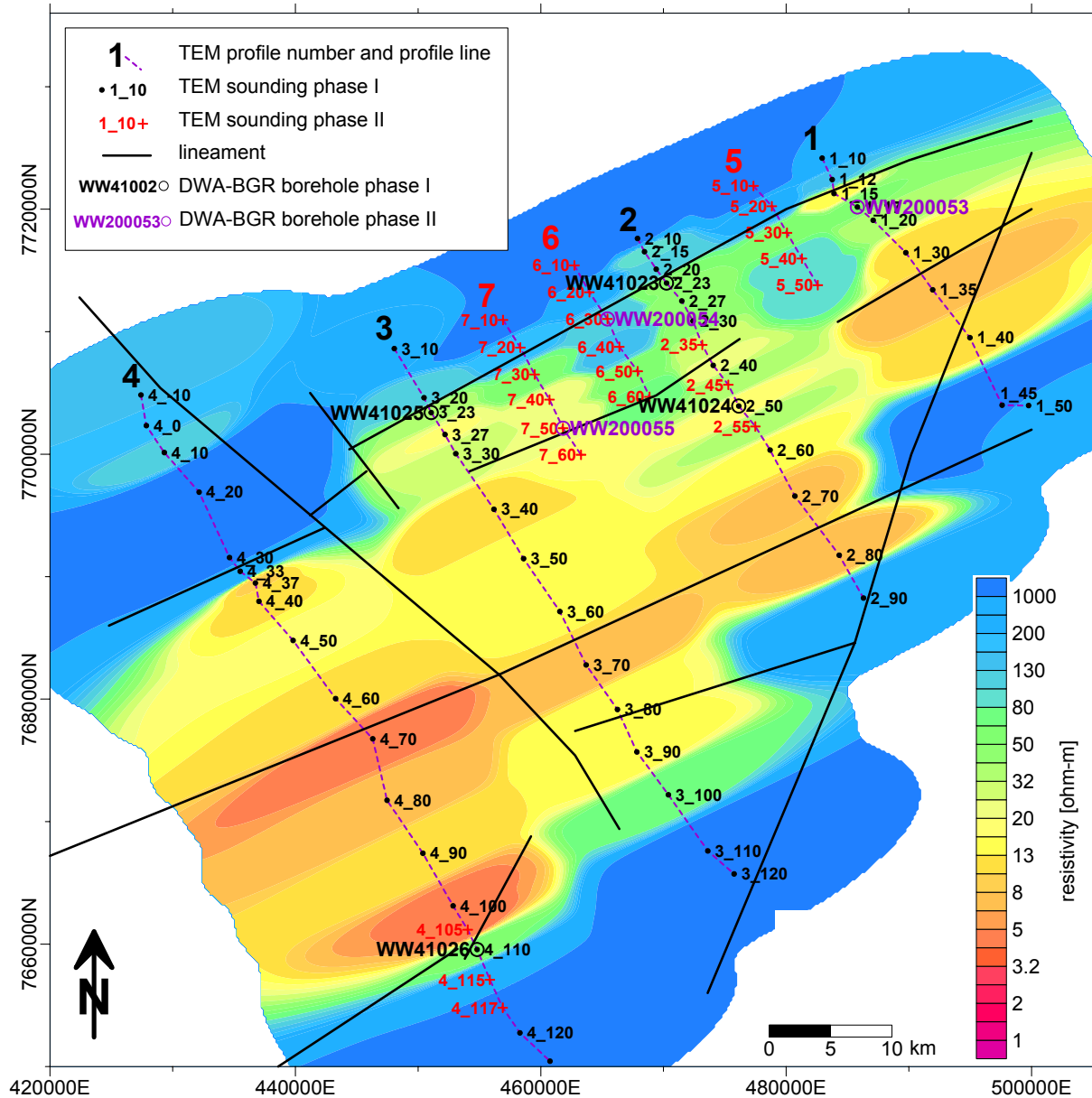


Figure 2: Distribution of averaged resistivities between 150 and 200 m depth in the Eiseb Graben area based on TEM soundings, together with TEM sounding positions, groundwater exploration wells and lineaments

In the TEM soundings in the Eiseb Graben area, two archetypes of TEM apparent resistivity curves prevail. Curve type 1 is a bowl shaped form, typical for soundings on the graben shoulder (Fig. 3a). The very curve presents the northernmost sounding of profile 2. The curves of type 1 are characterized by high resistivities (250 Ω m and more) in depths which are caused by consolidated rocks and the basement rocks of the graben shoulder. Generally, late time readings of the transient of type 1 soundings on the graben shoulder are disturbed by noise caused by weak signals from the low induction inside the high resistive basement. Noisy data points were deleted during data processing.

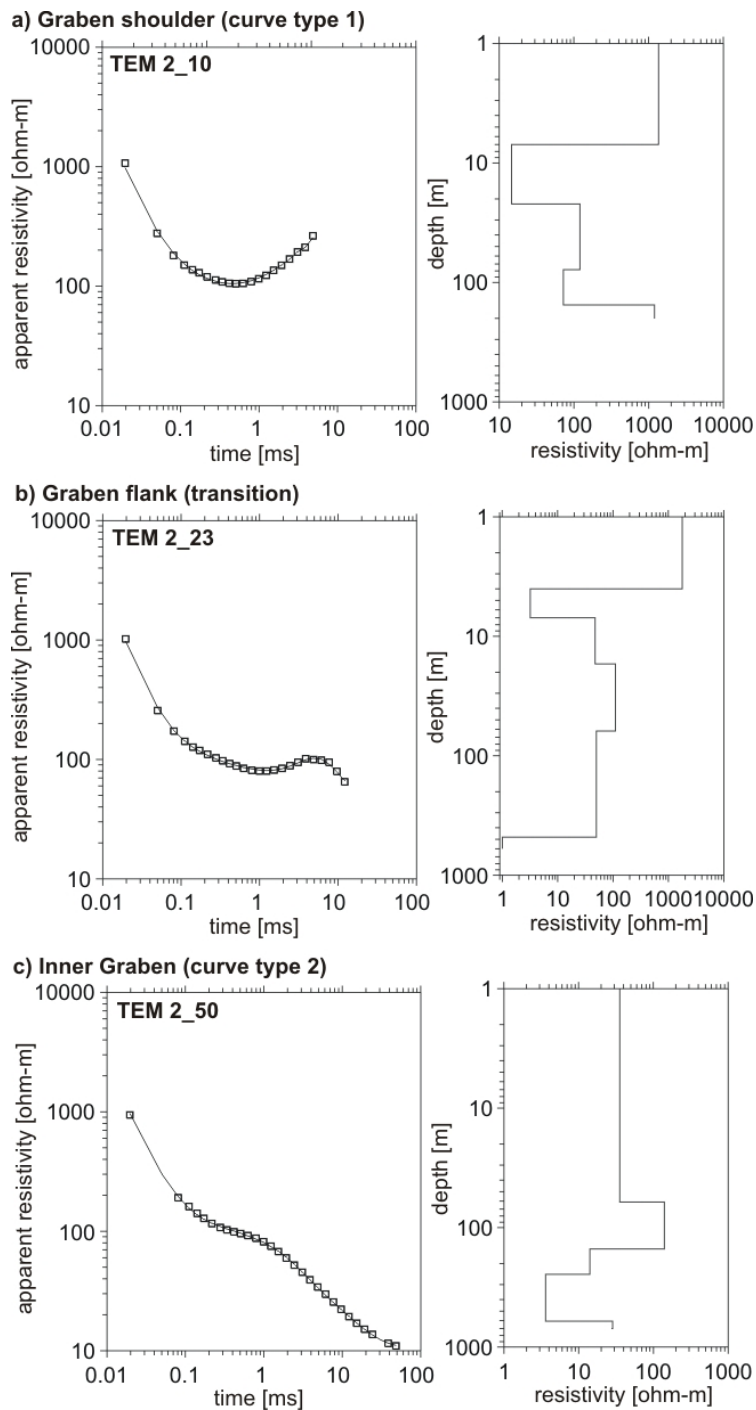


Figure 3: TEM sounding and 1d inversion model of profile 2 a) on the graben shoulder, b) at the graben flank and c) in the inner graben

Type 2 soundings present a double descending curve-type, typical for locations inside the inner graben (Fig. 3c). From moderate to high values above the water table (150 m depth), the resistivity decreases to moderate and low values at greater depths. Particularly in the eastern part of the Eiseb Graben, the depth to the highly conductive layer decreases with distance to the northern graben flank. This conductive layer represents higher water salinity in connection with higher clay contents (see Chap. 4, borehole WW41024).

The apparent resistivity curve of sounding 2_23 in Figure 3b represents a transition from curve type 1 to type 2, hence the transition at the graben flank from the shoulder to the inner graben. It is characterized by a distinctive maximum, here at 8 ms.

The described characteristics of the curve types on the graben shoulder, at the flank and in the inner graben are observed at each profile at the northern flank of the Eiseb Graben but

with different clarity. The characteristics are also evident at the southern graben flank, although the transition is less pronounced probably due to the greater spacing of the TEM soundings.

Due to the characteristic resistivity distribution in the survey area, the resistivity measurements were particularly suitable to delineate the before unknown extent of the Eiseb Graben, to investigate the internal structure of the graben sediments and to give an idea of the prevailing water salinity. The horizontal resistivity section in Fig. 2 shows the distribution of the average resistivity between 150 m and 200 m depth. The section comprises the upper part of the water saturated sediments within the graben. The graben shoulders are clearly displayed by high resistivities (blue colours), caused by consolidated rock and basement rocks at shallow depth. Since the water table lies within the hardrock, water in the area of the graben shoulder is completely constrained to fractures and therefore difficult to locate by resistivity measurements.

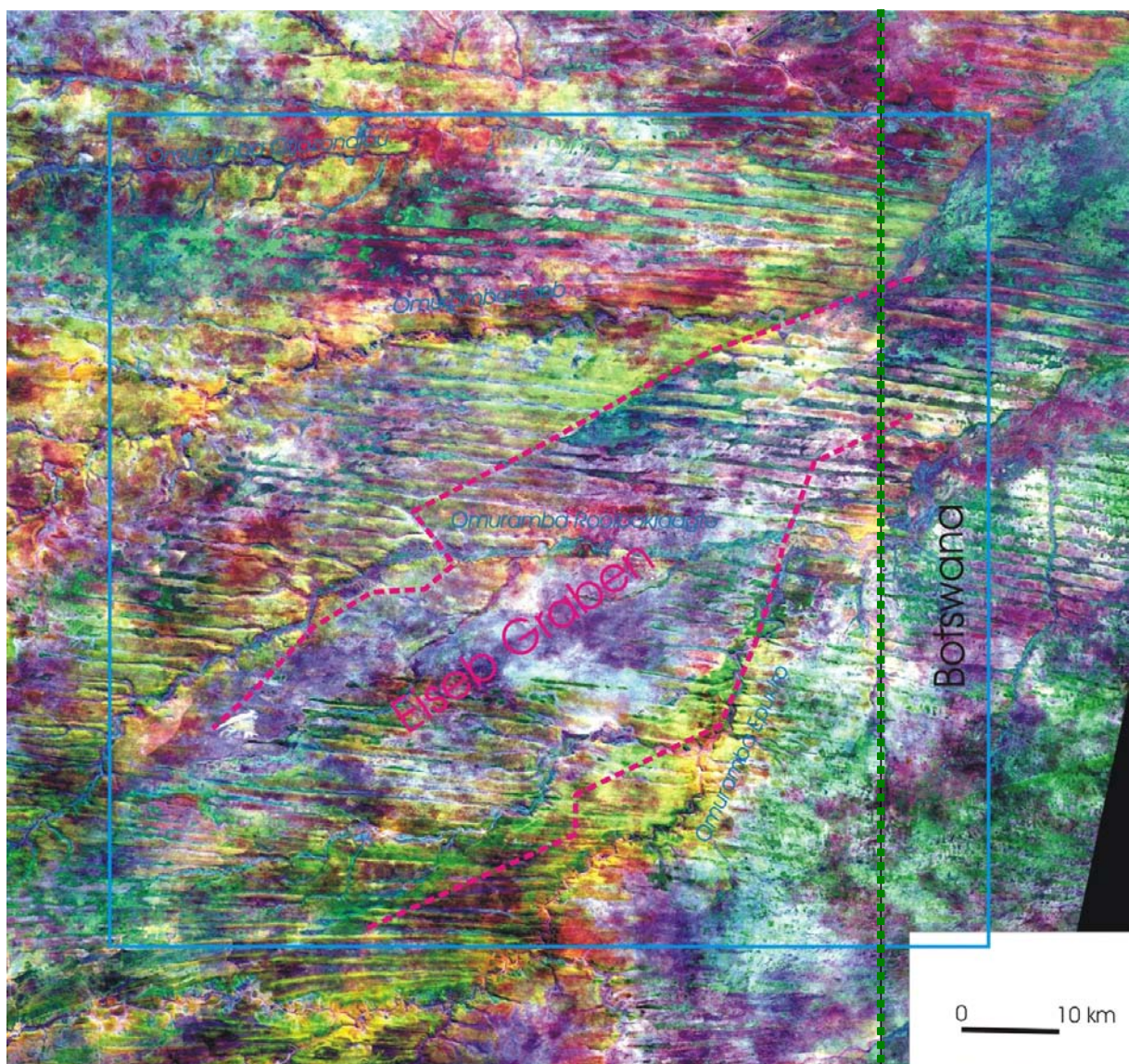


Figure 4: Satellite image of the project area with assumed extent of the Eiseb Graben

An interpretation of the Landsat TM 7 scene (Fig. 4) was conducted by BGR (SCHAEFFER, 2004). It shows several lineaments with SW-NE (around 50°) direction and few lineaments striking in a more or less perpendicular direction. This interpretation does not coincide with

that performed by INTERCONSULT (1996), based on similar data. The lineaments of the BGR interpretation are plotted in Fig. 2. This lineament interpretation was derived entirely independent from the TEM interpretations. The lineaments and the horizontal resistivity distribution correspond surprisingly well and provide a plausible image of the graben structure.

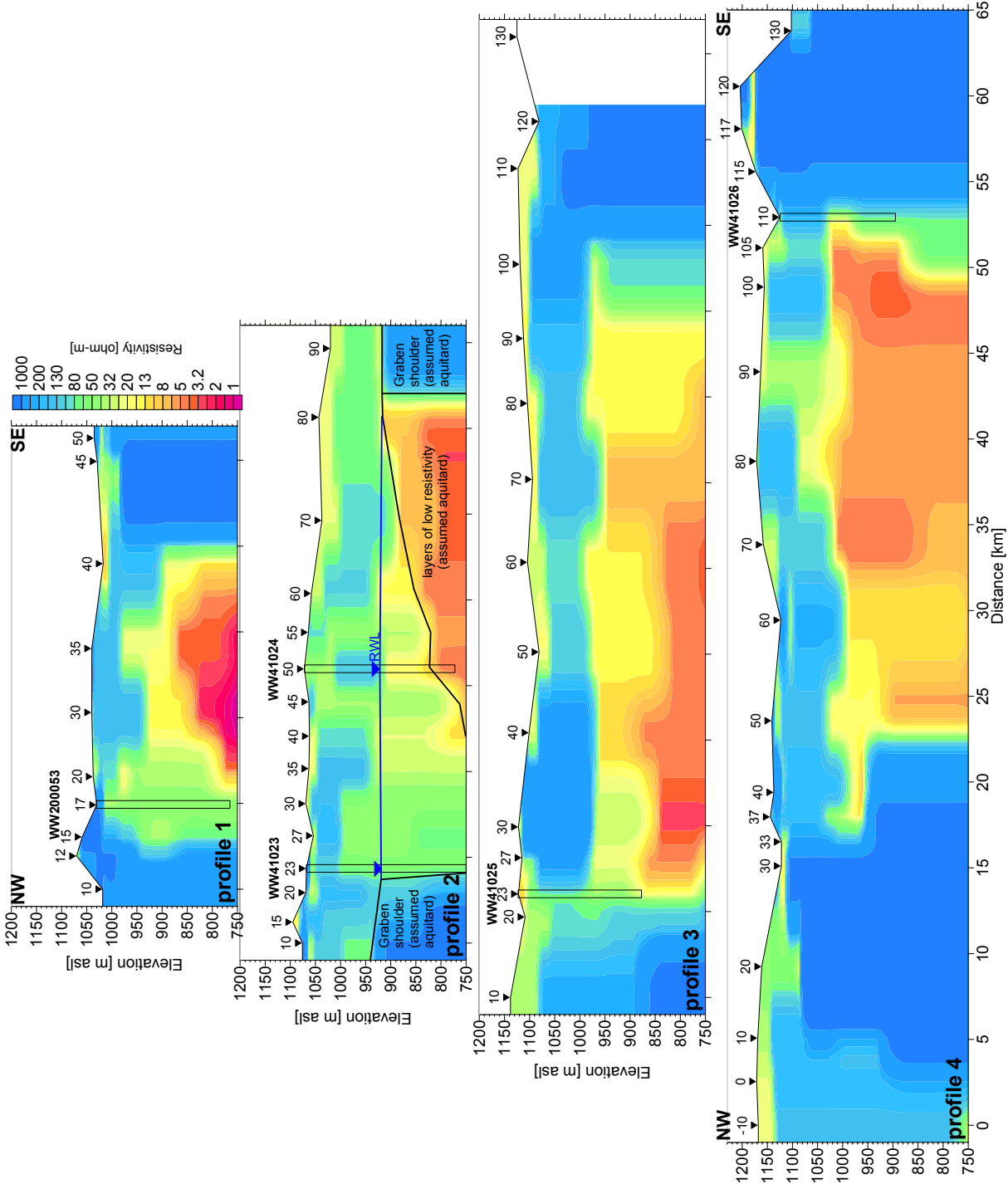


Figure 5: Vertical resistivity sections crossing the Eiseb Graben along TEM profiles 1 to 4, together with locations of the DWA-BGR boreholes. Profile 2 with hydrogeological interpretation

Figure 5 displays the vertical resistivity distribution the TEM profiles 1 to 4, crossing the graben. The sections are arranged on top of each other in order to provide a view along the axis

of the graben. The vertical sections demonstrate that in most parts of the inner graben low resistivities, unfavourable for groundwater exploitation, prevail below the water table. These low resistivities are probably caused by cohesive to clayey formations in combination with brackish to saline groundwater. Moderate resistivities, ranging from 30 to 80 Ωm , indicating freshwater conditions, were detected within an elongated strip along the northern rim of the graben. This resistivity structure was interpreted as a narrow water bearing structure, eventually representing a paleo-channel.

Based on the results of the phase I survey, four locations for groundwater exploration boreholes were recommended. Rather than to achieve high water yields, the boreholes were sited to establish an interpretation basis for the TEM soundings. Nevertheless, the first borehole at the northern Graben flank, drilled into the supposed paleo-channel revealed a water yield unusual for the area under investigation (see Chap. 3). Due to this excellent drilling result, the second TEM campaign was decided and carried out in early 2005 with soundings measured along short profiles crossing the detected channel near the northern graben flank. Based on the new results locations for three additional exploration boreholes were recommended. The borehole locations of phase I and II are marked in Figure 2.

3. Results of drilling campaigns and hydrogeological investigations

The drilling program for the four selected borehole sites, based on the interpretation results of the first TEM campaign, was conducted between July and August 2004 (MARGANE et al., 2004; MARGANE & WRABEL, 2004; WIERENGA et al., 2004). A second drilling campaign for another three boreholes followed in September and October 2005 (BEUKES et al., 2005). Simultaneously to the drilling the following activities were carried out: hydrogeological survey to improve the information basis for the overall interpretation, borehole geophysics, step- and constant discharge pumping tests with corresponding interpretation and hydrochemical- and isotope geochemical sampling with analysis.

The Eiseb Graben is the westernmost extension of the Linyanti-Gomare Fault. The existence of the graben has been assumed since the mid 1970s (SCHOLZ et al., 1976) but only now its horizontal and vertical dimensions could be determined by the project activities. For the delineation of the graben and its internal structure the TEM measurements have been essential. The interpretation of these data, combined with borehole data and lithological logs from boreholes of the project area show that the graben is bound by rocks of high resistivity (gneiss) to the north and south and that outside the graben area the chances of finding groundwater are slim. The yields of boreholes previously drilled in the graben area have been comparatively low with values between 1 and 3 m^3/h (INTERCONSULT, 1996). In the first drilling campaign conducted by this project, 4 boreholes were drilled. Two of them were sited at the northern margin of the graben, one at the central graben and another at the southern margin. The boreholes gave evidence that at the northern graben margin a narrow part of the graben floor may have been deeply downlifted (trench with a Kalahari sequence filling of supposedly more than 380 m).

With a recommended yield of around 120 m^3/h , borehole WW41023, drilled at the northern graben rim, exceeds all groundwater-expectations. It encountered coarse, freshwater bearing horizons at greater depths. The borehole in the central part (WW41024, Fig. 6) penetrated clay at greater depths, as was predicted by the geophysical measurements. The borehole at the southern margin could not confirm the assumption of another freshwater filled trench here. With the second TEM and drilling campaign the position of the trench at the northern margin of the graben was confirmed. Packer tests, conducted in two boreholes, showed that the inflow into the wells occurs mainly at depths below 200-250 m.

As water from the shallow part of the aquifer system mostly exhibits electric conductivities between 1,000 and 1,500 $\mu\text{S}/\text{cm}$, the low electric conductivities around 500 $\mu\text{S}/\text{cm}$ encountered in the three very productive boreholes WW41023, WW200053 und WW200054, point to a different groundwater recharge mechanism in the lower part of the aquifer system. It cannot be excluded that groundwater in the lower part of the aquifer system is of relatively

old age and was recharged under different climatic conditions than the shallow groundwater. However, isotopic and hydrochemical analyses are not yet conclusive concerning this matter.

The exploitation potential in the Eiseb Graben is currently estimated at 0.7 MCM/a. The mechanism of groundwater recharge, however, is still insufficiently known so that it will be necessary to monitor water levels in case the water resources in the Eiseb Graben will be developed.

KLOCK (2001) and AQUALOGIC & WATER SURVEYS BOTSWANA (2003) suggest that a NW-SE trending structure, termed NE-Namibia Graben, enters the Eiseb Graben from the north. This hypothesis could not be confirmed by the findings of the project.

Table 1: Summary of drilling results of both drilling campaigns

IDN	TEM	Elevation (SRTM)	TD	Started	Completed	Sceens/open	Recommended Yield (m³/h)	T (m²/d)	EC (µS/cm)
		m	m	dd.mm.yyyy	dd.mm.yyyy	m	m³/h	m²/d	µS/cm
WW41023	2_23	1068	378	29.06.2004	05.07.2004	148.2-218.6, 226.30-378	123	553	430
WW41024	2_50	1072	300	09.07.2004	17.07.2004	147.31-206.43, 229.23-251.75	2.5	52.1	1380
WW41025	3_23	1122	244	17.07.2004	27.07.2004	145.16-203.31, 203.31-226.56	< 1	-	960
WW41026	4_110	1125	230	30.07.2004	06.08.2004	not installed	< 1	-	750
WW200053	1_17	1039	267	08.09.2005	29.09.2005	133-196, 199-267	40	34	520
WW200054	6_30	1084	302	14.09.2005	06.10.2005	156-240, 246-302	35	177	480
WW200055	7_50	1093	249	13.10.2005	20.10.2005	151-175, 181-249	3.5	8	720

4. Comparison of litho-log, γ -ray, resistivity log and TEM model

In all of the projects exploration boreholes γ -ray logs (GR) and focused electric logs (FEL) were run with an ANTARES logging system using an ANTARES GR/FEL-combi-probe (ANTARES Datensysteme GmbH, Germany). In order to compare resistivities from borehole logs with TEM resistivities from surface measurements, logging results and corresponding TEM model are plotted together with a lithological log in Figure 6.

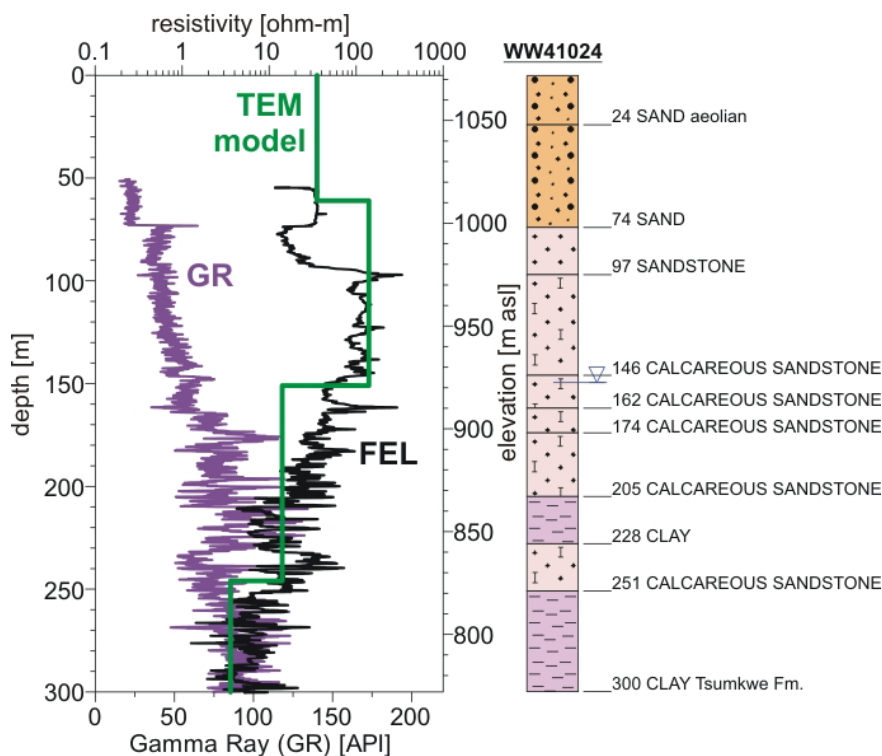


Figure 6: Litho-log, γ -log and resistivity log (FEL) of borehole WW41024 and TEM model of sounding 2_50

The logging results (GR, FEL) from borehole WW41024 and the resistivity models from TEM sounding 2_50 demonstrate a good correlation with respect to resistivity values as well as interface depths. Furthermore they are in good agreement with the geologists' litho-log of the borehole. This fact can be observed in all of the boreholes of the first drilling campaign. The borehole logs of the second drilling campaign are not yet available. In Figure 6 the FEL-resistivities below 150 m depth show a general decrease with depth which is also reflected in the TEM model. Above 90 m depth the correlation is weak, which probably is attributed to the insufficient resolution of shallow layers by TEM soundings.

5. Conclusions and recommendations

The TEM measurements proved to be highly successful for delineating the extent of the Eiseb Graben and the main freshwater bearing zone at its northern margin. The latter consists of a deep reaching trench with a filling of semi-consolidated Kalahari sediments of more than 380 m thickness. Three boreholes drilled into this zone have recommended yields and transmissivities by far exceeding previously encountered yields. Already the first drilled well exceeded the yield which was aimed by the project. The main groundwater inflows to these wells occur at depths below 200 to 250 m. They are particularly related to coarse grained sedimentary sections in the lower part of the Kalahari sequence.

The encountered water is of a good quality and is suitable for drinking purposes. The exploitation potential of this aquifer is currently estimated at 0.7 MCM/a. However, the groundwater recharge mechanism is not yet well understood. It is recommended to monitor the impact on water levels and groundwater quality during an eventual exploitation of the aquifer.

References

- AFRICON (2002): Regional Rural Water Supply Development Plan for the Omaheke Region. – Prepared for MAWRD, 177 p.; Windhoek.
- AQUALOGIC & WATER SURVEYS BOTSWANA (2003): Northwest Ngamiland TGLP Groundwater Potential Study TB 10/2/19/2000-2001. – Prepared for Department of Geological Survey (DGS) of Botswana, 9 Vols.; Lobatse/Botswana.
- BEUKES, H., KATJIMUNE, M. & WRABEL, J. (2005): Eiseb Graben Drilling and Test Pumping of Boreholes, Phase II. – Department of Water Affairs, 34 p.; Windhoek.
- BIWAC (1999): Data Base for Further Decisions Regarding the Necessity and Feasibility of Future Geophysical and Hydrogeological Investigations in the Study Areas Oshivelo, Eastern Caprivi and Eastern Tsumkwe-Otjinene (North-Eastern Namibia). - Prepared for Technical Cooperation Project Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia, 62 p.; Windhoek.
- FIELITZ (1999): Existing and Proposed geophysical investigations in the study areas Oshivelo, Eastern Caprivi and Eastern Tsumkwe-Otjinene (Namibia). BGR archive no. 0119266, Hannover
- FIELITZ, K., STADTLER, C. & SCHILDKNECHT, F. (2004): Results of Time-Domain Electromagnetic Soundings and Direct Current Soundings for Groundwater Exploration in Three Regions of NE-Namibia. – Prepared for Technical Cooperation Project Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia, 17 p.; Hannover.
- INTERCONSULT (1996): Groundwater Exploration in the Gam Area of Eastern Namibia. – Report prepared for Department of Water Affairs, 27 p; Windhoek.

- KLOCK, H. (2001): Hydrogeology of the Kalahari in North-Eastern Namibia with Special Emphasis on Groundwater Recharge, Flow Modelling and Hydrochemistry. – PhD, University of Wuerzburg, 239 p.; Wuerzburg/ Germany.
- MARGANE, A., WRABEL, J., SCHILDKNECHT, F., WIERENGA, A. (2004): Groundwater Investigations in the Eiseb Graben – Main Hydrogeological Report. – Technical Cooperation Project ‘Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia’, Volume IV.GW.2.1, BGR archive no. 0125832 : 4,3, 70 p.; Windhoek.
- MARGANE, A. & WRABEL, J. (2004): Groundwater Investigations in the Eiseb Graben – Evaluation of Pumping Tests. – Technical Cooperation Project ‘Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia’, Volume IV.GW.2.3, BGR archive no. 0125832 : 4,3, 26 p.; Windhoek.
- SCHILDKNECHT, F., STADTLER, C. & MARGANE, A. (2005): Time Domain Electromagnetic Soundings – Extension Campaign in Caprivi and Eiseb Graben. – Technical Cooperation Project ‘Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia’, Volume III.GW.6, BGR archive no. 0125832 : 3,6, 31 p.; Windhoek.
- SCHAEFFER, U. (2003): Grundwassererkundung im Nordosten Namibias und aerogeophysikalische Untersuchungen ausgewählter mineralhoeffiger Zonen - Bericht über eine Dienstreise vom 02.10. - 14.11.2003. – Report prepared for Technical Cooperation Project ‘Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia’, BGR archive no. 0124108, 16 p.; Hannover.
- SCHOLZ, C.H., KOCZYNSKI, T.A. & HUTCHINS, D.G. (1976): Evidence for Incipient Rifting in Southern Africa – A Study of Microearthquakes in Northern Botswana. - Royal Astronomical Society Geophysical Journal, 44: 135-144; Oxford/UK.
- WIERENGA, A., MARGANE, A., WRABEL, J., SCHILDKNECHT, F., MUUNDJUA, M. & METZGER, W. (2004a): Groundwater Investigations in the Eiseb Graben – Documentation Compendium on the 2004 Drilling Campaign. – Technical Cooperation Project ‘Investigation of Groundwater Resources and Airborne-Geophysical Investigation of Selected Mineral Targets in Namibia’, Volume IV.GW.2.2, BGR archive no. 0125832 : 4,3, 120 p.; Windhoek.

GAS HYDRATE ASSESSMENT USING A MARINE BOTTOM-TOWED CONTROLLED SOURCE ELECTROMAGNETIC SYSTEM: LATEST RESULTS FROM CASCADIA

Katrin Schwalenberg

Federal Institute for Geosciences and Natural Resources, Stilleweg 2, 30655 Hannover, Germany, Phone: + 49 511 643 2718, Fax: +49 511 643 3663, Email: k.schwalenberg@bgr.de

Carsten Scholl, Reza Mir, R. Nigel Edwards

University of Toronto, Department of Physics, 60 St. George St., Toronto M5S 1A7, Canada

Ele C. Willoughby

Pacific Geoscience Centre, Geological Survey of Canada, 9860 West Saanich Road, P.O. Box 6000, Sidney, B.C. V8L 4B2, Canada

Introduction

CSEM data collected along four profiles over a cold vent field in an area characterized by expanded gas hydrate deposits on the Cascadia Margin, Western Canada, show highly anomalous resistivity anomalies over the vents. The resistivities are more than 4 times higher than the regional background.

Submarine gas hydrates have been identified along the Cascadia Margin in many seismic data through the occurrence of bottom simulating reflectors (BSRs) and during the Ocean Drilling Program (ODP Leg 146). Hydrate deposits occur over large portions along the slope (e.g. Spence et al., 2000). A series of seismic blank zones was found in different seismic data sets in a cold vent field (Riedel et al., 2002). The vent field is located on a bathymetric bench in approximately 1300m water depth close to ODP site 889 and consists of at least 4 vents with diameters from 80m to 400m in an area of roughly 1km x 3km (Figure 1). Massive hydrate samples have been recovered from piston cores just below the seafloor at “Bullseye” which is the largest of the vents (Riedel et al., 2002). Bullseye is also one of four drill sites along a transect crossing the Cascadia Margin which was completed in fall 2005 within the Integrated Ocean Drilling Program (IODP Leg 311, Expedition 311 Scientists, Prelim Rep. 2005).

The causes of venting at Bullseye have been diversely discussed, taking mainly seismic data, seafloor observation and core data into account (see review by Riedel et al., 2006). Alternative methods like compliance (Willoughby et al., 2005) and controlled source electromagnetics (CSEM) (Schwalenberg et al., 2005) operate on a different scale. Compliance data are particularly sensitive to the shear modulus and therefore to the strength of the seafloor sediments. The electrical conductivity derived from CSEM data is mainly controlled by the amount of interstitial seawater and is therefore a function of the porosity and subsequently of the salinity and temperature of the seawater. Regionally, the conductivity or its reciprocal, the resistivity, is in the order of 1-2 Ωm for the upper 100 mbsf.

Gas hydrate forms within the temperature and pressure controlled gas hydrate stability zone (GHSZ) where it replaces conductive pore fluid. Subsequently the bulk resistivity of the seafloor is enhanced if gas hydrate is present in sufficient quantities. Gas hydrate concentrations can be estimated from the empirical relation known as Archie's law (Archie, 1942). It is

$$\rho_f = a \rho_w \Phi^{-m}$$

for a simple two-phase system, or

$$\rho_f = a \rho_w \Phi^{-m} S_w^{-n}$$

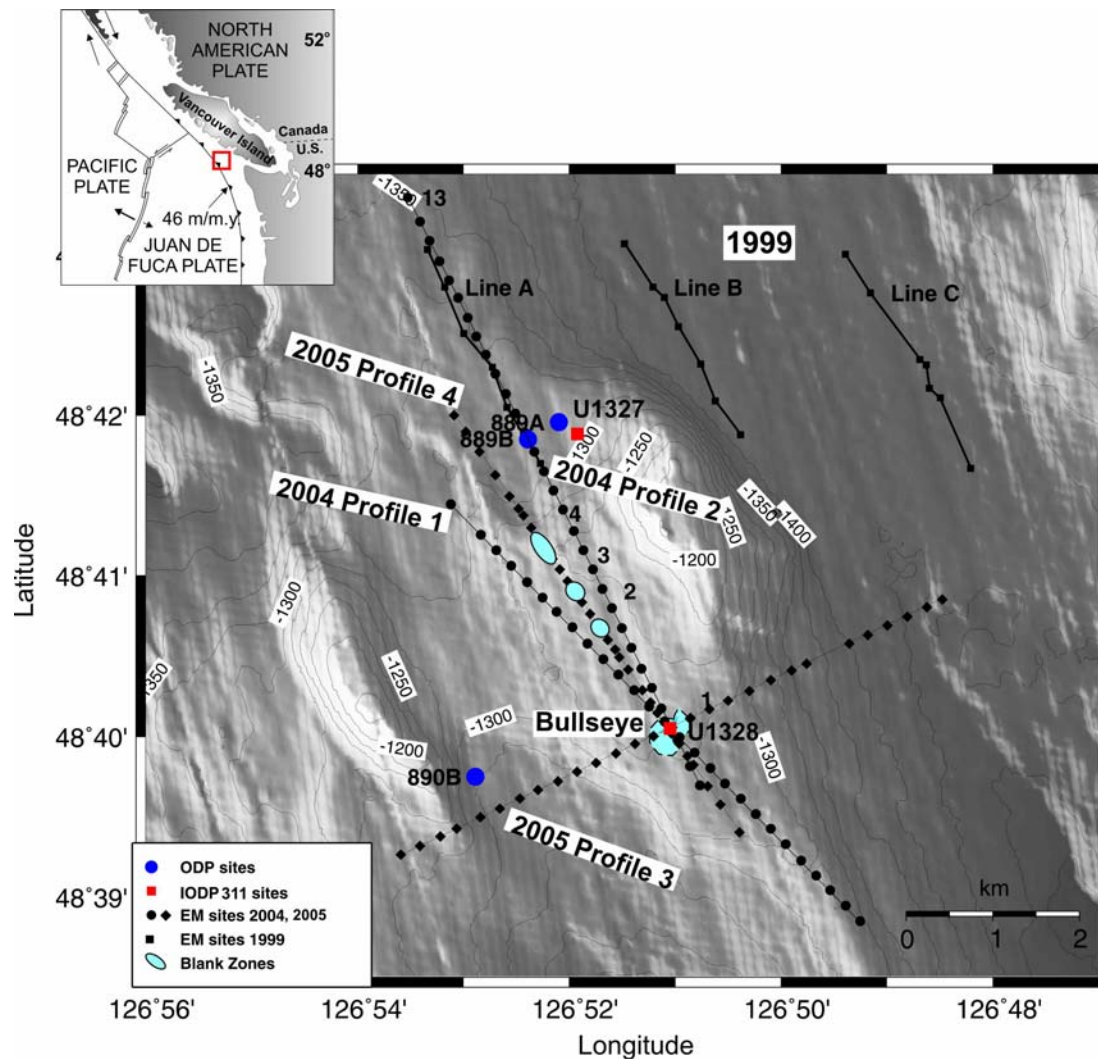


Figure 1: Survey area on the Cascadia Margin in vicinity of ODP site 889. A series of seismic blank zones has been detected on a bathymetric bench in 1300m water depth between two topographic heights. BSRs have been identified in the entire area. Samples of gas hydrate were collected within the largest of the blank zones called 'Bullseye'. CSEM data along four profiles have been obtained across Bullseye and close to the other cold vents. Bullseye is also the location of IODP site U1328. Lines A, B, and C are the survey lines by Yuan and Edwards (2000).

if gas hydrate is present (ρ_f : formation resistivity, ρ_w : seawater resistivity, Φ : porosity, $S_h = 1 - S_w$: gas hydrate saturation). Applying Archie's law requires estimates of the coefficients a , m and n which is described in e.g. Collett and Ladd (2000). Hydrate quantification also requires a reference no-hydrate-bearing data set. However, the additional hydrate concentration may be deduced by subtraction a background concentration from the data (Schwalenberg et al., 2005).

The University of Toronto has developed a bottom-towed transient electric dipole dipole system to sound the electrical resistivity distribution of the seafloor to a depth of several hundred meters. On the seafloor, the system consists of a transmitting dipole and two receiving dipoles (RX1, RX2) which are dragged in an inline configuration behind the transmitter (TX) (Figure 2). The two receivers are sensitive to different depth scales and provide a better resolution with depth. Typical transmitter receiver separations are between 150 and 400 m. The current source

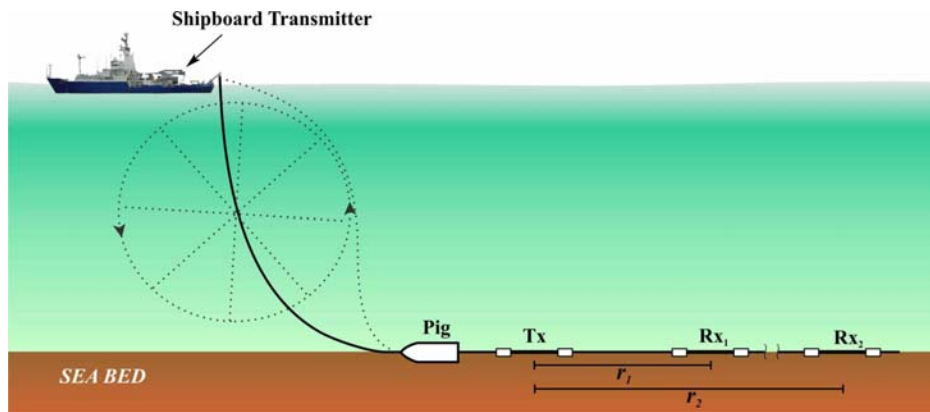


Figure 2: Geometry of the inline dipole system. On the seafloor the array consists of a transmitter dipole Tx followed by two receiver dipoles, Rx1 and Rx2 at distances r_1 and r_2 . The pig, a heavy weight, is attached to the front of the array to keep it in contact with the sediments. The seafloor array is connected to the deep sea cable. A current signal is generated by a transmitter on board and sent through the cable to the transmitter dipole on the seafloor. The cable follows the shape of a catenary (solid line). If pulled in, the cable appears to move over an imaginary wheel below the ship (dotted line) (Schwalenberg et al., 2005).

is located on the ship, has a maximum output of 9 kW, and follows any given reference signal. The system is operated in the time domain. For the chosen experimental set up, the signal has a square wave form and is sent through the coaxial cable to the transmitter dipole on the seafloor. On the seafloor, the electrical disturbance travels along two pathways to the receivers. One path is through the seawater and the other path is through the sediments. In shallow water, if the water depth is about or smaller than the transmitter receiver separation, a third path must

be considered, namely the one through the air which may mask the seafloor signal (Edwards, 2006). The signal propagating through the sediments arrives at the receiver first. The late time signal is mainly a function of the seawater conductivity and is generally eliminated from the analysis. Delay times and shapes of the signal sampled at the receiver depend on the resistivity structure of the seafloor and the transmitter receiver separation and may be analyzed similarly to seismic reflection data (Edwards, 2006).

Measurements are taken along profiles from site to site. The seafloor array stops during the data acquisition to avoid streaming potentials of the receiver electrodes due to movements in the seawater. Each receiver dipole is equipped with a self-contained electrical unit for data storage, signal synchronization, analog electronics and battery supply for up to 36h deployment time (see Schwalenberg et al., 2005 and 2006 for more detailed descriptions). Both, time domain (Scholl, open software 2006) and frequency domain software (Edwards, open software, 2005) exists to convert the data into one-dimensional models. However, it was generally possible to interpret the data with a single parameter - the resistivity of the lower halfspace. 3D modeling approaches are currently on the way using Druskin and Knizhnerman's code (1994) to explain the highly anomalous data over the vents.

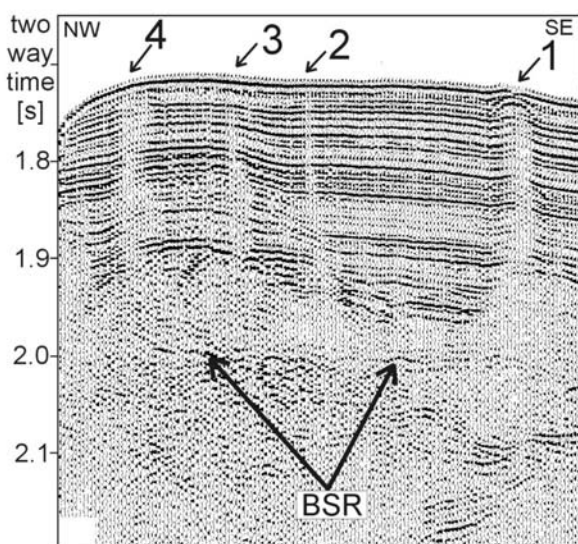


Figure 3 Seismic section shows a BSR and four blank zones associated with cold vents (Riedel et al., 2002).

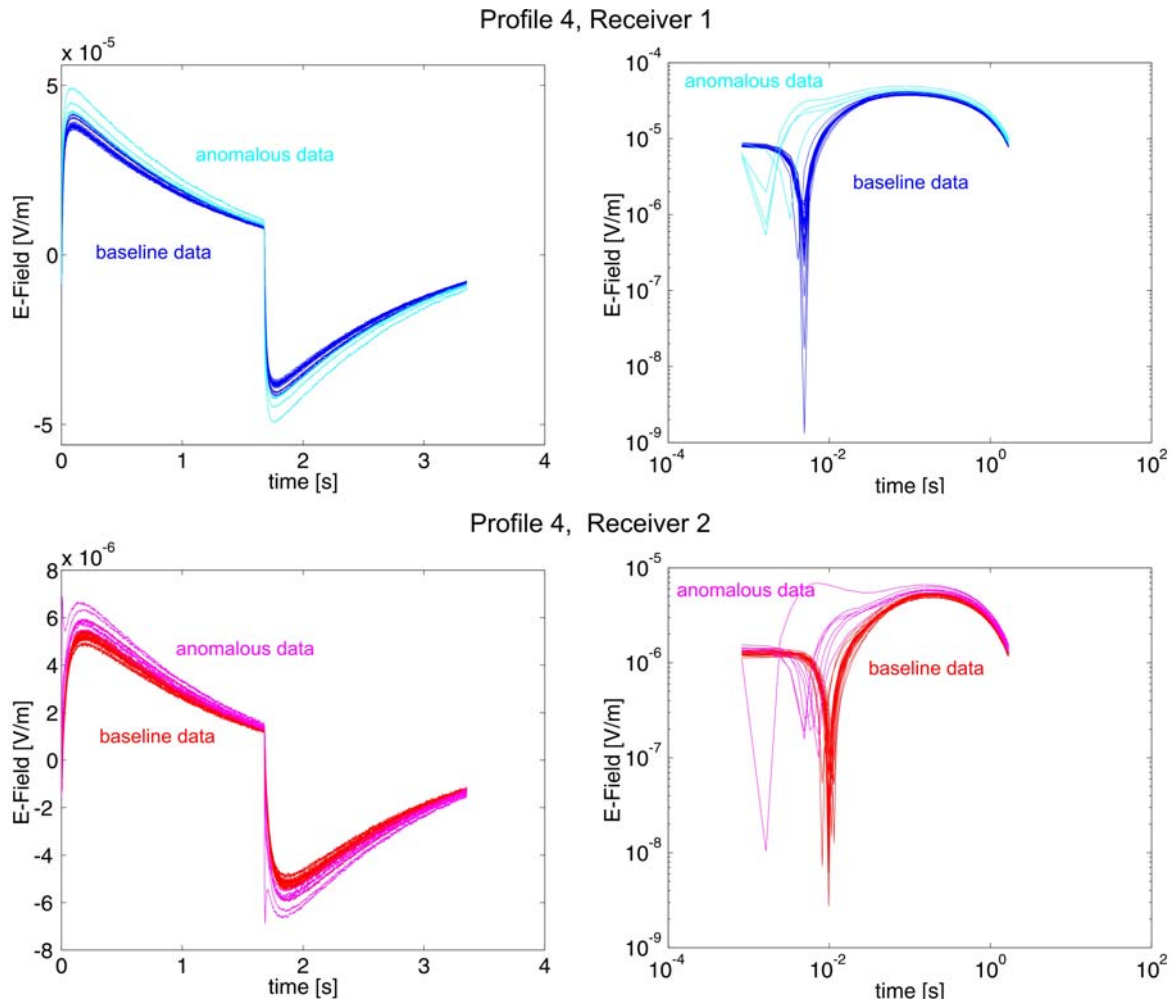


Figure 4: Data along profile 4 as linear (left panels) and loglog plots (right panels) for receiver 1 (top, separation: 174m) and receiver 2 (bottom, separation 292m). The decay of the signal is caused by the low cut filter at the input of the receiver electronics. The anomalous data over the vents (cyan or magenta) have higher amplitudes and different signal shapes.

CSEM Surveys

ODPSite 889

The first CSEM experiments on the Cascadia Margin using the Toronto system were conducted by Yuan and Edwards (2000) (also Yuan, 2003). They were designed to determine the electrical signature of the gas hydrate deposits in vicinity of ODP site 889 (Lines A, B, C in Figure 1). The analysis of the collected data resulted in uniform resistivities over areas with and without BSR signature. The BSR is an expression of the seismic impedance contrast between hydrate bearing sediments above and a layer of free gas below the base of the GHSZ (e.g. Hyndman and Davis, 1992). The BSR may disappear if the gas layer does not exist - without excluding the formation of gas hydrate within the GHSZ. Therefore the CSEM data suggest that gas hydrates are present in the survey area even where no BSR is visible (Yuan and Edwards, 2000).

Electrical resistivity logs of site 889 revealed increased resistivities between 1 and 2 Ωm . These values have been attributed to an increased hydrate concentration within the GHSZ. Hyndman et al., (2001) calculated gas hydrate concentrations from core data and showed values varying on average between 20 to 35% of the pore volume. Riedel et al. (2005) used logging data from ODP Leg 146 to re-evaluated the hydrate concentration and showed that the concentrations could be alternatively between 5 and 10%.

Gas hydrate concentrations were also calculated using Archie's law. The coefficients involved were determined by Hyndman et al. (1999) to $a=1.4$, $m=1.76$, and $n=1$ using core data from sites 888 and 889/890. Collett (2001) redefined these parameters to $a=1$, $m=2.8$, and $n=1.9$. All these values will be revised by the analyses of the observations made during the recent IODP transect, but these data are not available to the general public yet.

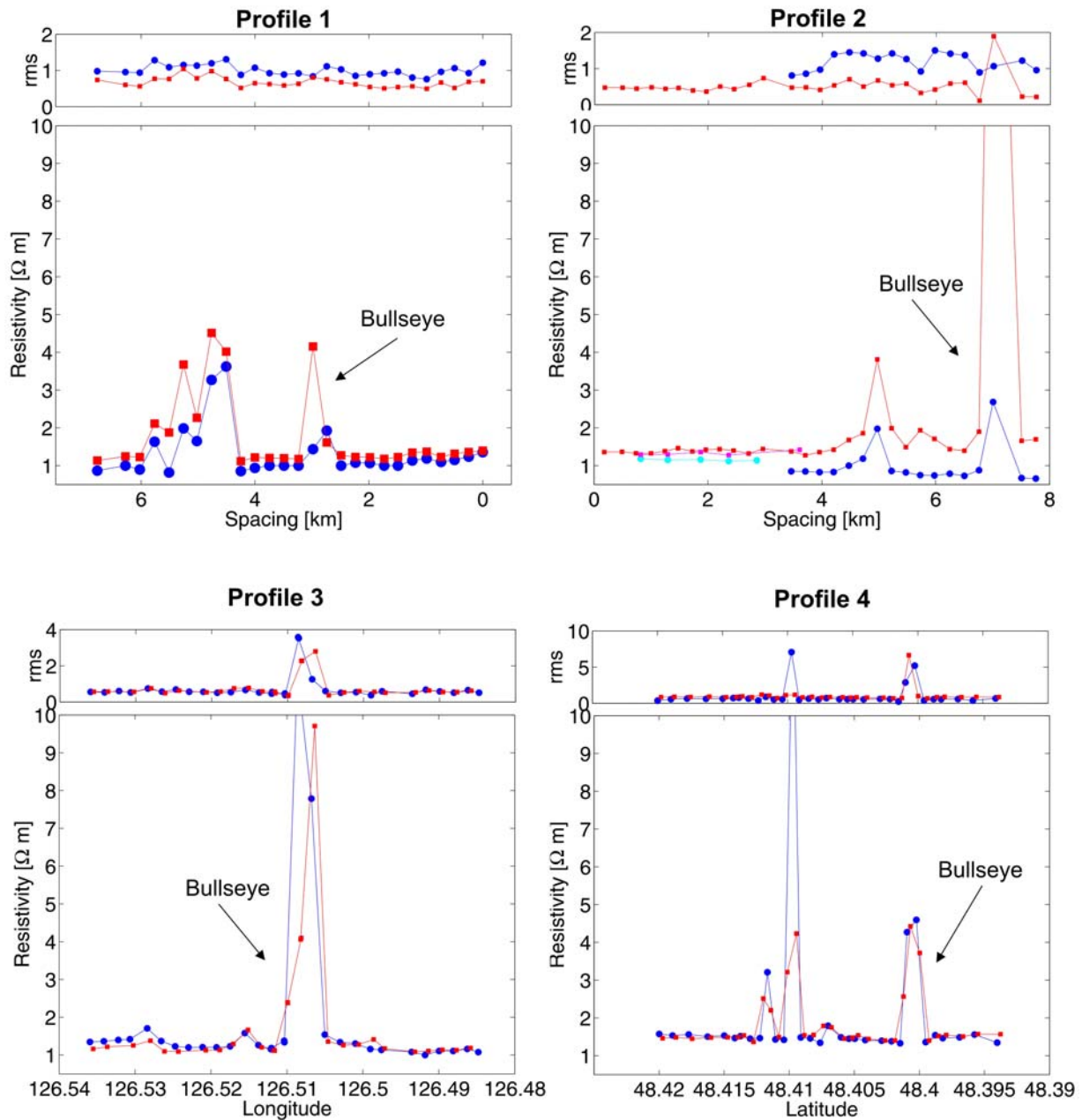


Figure 5: *Highly anomalous resistivities have been inverted over the vents along all four profiles. The resistivities are 4 times or more higher than the baseline resistivities which are surprisingly uniform. Small rms errors suggest the lower halfspace assumption is a good approximation outside the vents. Within the vents the models have to be refined, but clearly indicate the existence of large amounts of very resistive material. The top right panel also shows the results of Yuan and Edwards (2000) along Line A.*

Vent Field

The vent field is characterized by at least 4 distinct seismic blank zones underlain by a BSR seen in different seismic data sets (Figure 3, Riedel et al., 2002). Whether the origin of the blank zones is due to free gas or gas hydrate or a combination of both has been strongly debated. Discussions of the vents and Bullseye in particular can be found in Wood et al. (2002), Zühlsdorff and Spiess (2004), Riedel et al., (2002, 2006).

In the summers of 2004 and 2005, CSEM data have been collected on Canadian Coast Guard Ship J.P. Tully. Four profiles have been completed, each about 7 km long with a site spacing of 250m and 150m, respectively. The transmitted current is a square wave switching between plus and minus 10 A with a period of 6.7 s or 3.4 s, respectively. The data collected are sets of stacked and raw time series of the receiver transients (Figure 4).

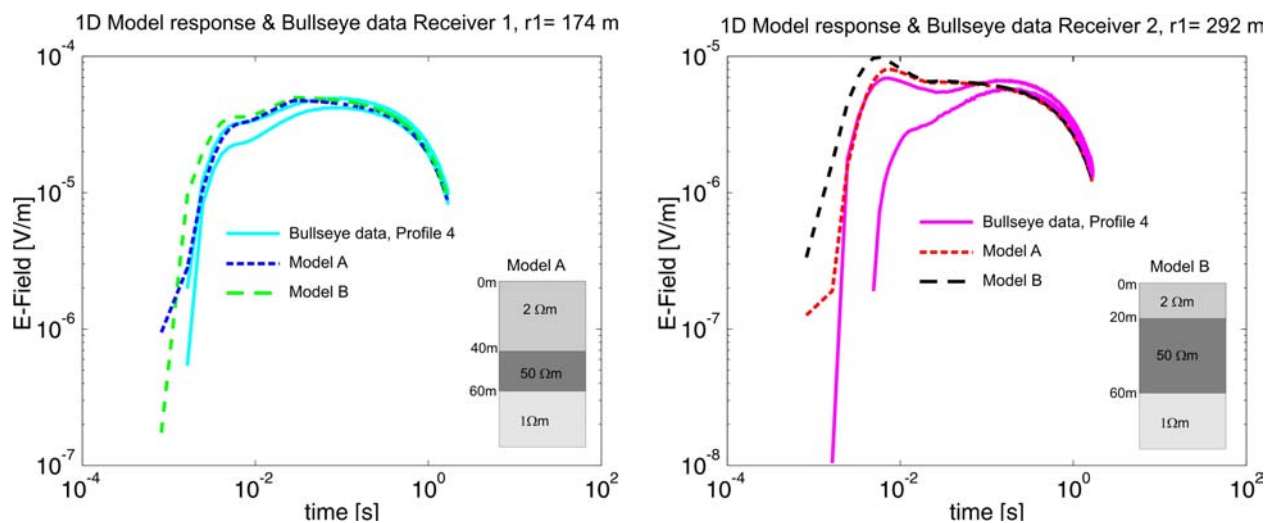


Figure 6: 1D layered modeling has been started to fit the anomalous data over bullseye. Displayed are the results for two models A and B compared with bullseye data from profile 4. Model A shows a reasonable fit to the data from one site. However, this is work in progress and will be applied to cross-check 1D inversion and 3D modeling results.

Results

At first, the data from profiles 1 to 4 have been inverted to lower halfspace resistivities using Edwards (open software, 2005). All four profiles in Figure 5 show highly anomalous resistivities over the vents and remarkably uniform values otherwise. The resistivities rise up to values about 5 Ωm or even higher over baseline resistivities which vary between 1 and 1.5 Ωm from profile to profile. Small root mean square errors demonstrate at least the baseline data can be explained by a single parameter. This is not true over the vents. Being clearly anomalous, the modeled resistivity values above 10 Ωm are presumably artifacts and the results of a false a priori assumption.

In a next step, 1D layered modeling has been employed to better fit the anomalous data over the vents. In Figure 6, data at Bullseye from profile 4 are compared with the 1D impulse responses of models A and B convolved with the system response. Model A partly explains the data reasonably well, but

Also multi-layered 1D inversion is on the way. Figure 7 shows a preliminary section of stitched 1D results along profile 4. The data from both receiver dipoles were used in a time domain joint smooth model inversion. Again, the results for the vent sites differ significantly from those for the baseline data sets, which are mutually similar. The average background or baseline model has essentially three layers: a very conductive upper layer, 0.9 Ωm 25m thick, followed by a more resistive layer, 1.7 Ωm ~75m thick, terminated by a more conductive

halfspace around 1 Ωm which is poorly resolved. The models associated with the vent sites show extreme resistivity structures and strong lateral changes. This indicates that – despite of the moderate misfits at most of these sites – a 1D model may not fit the data and the data are distorted by a multidimensional structure associated with the vents.

However, the vents are clearly 3D targets and the process of 3D forward modeling has been started using the 3D finite difference code by Druskin and Knizhnerman (1994).

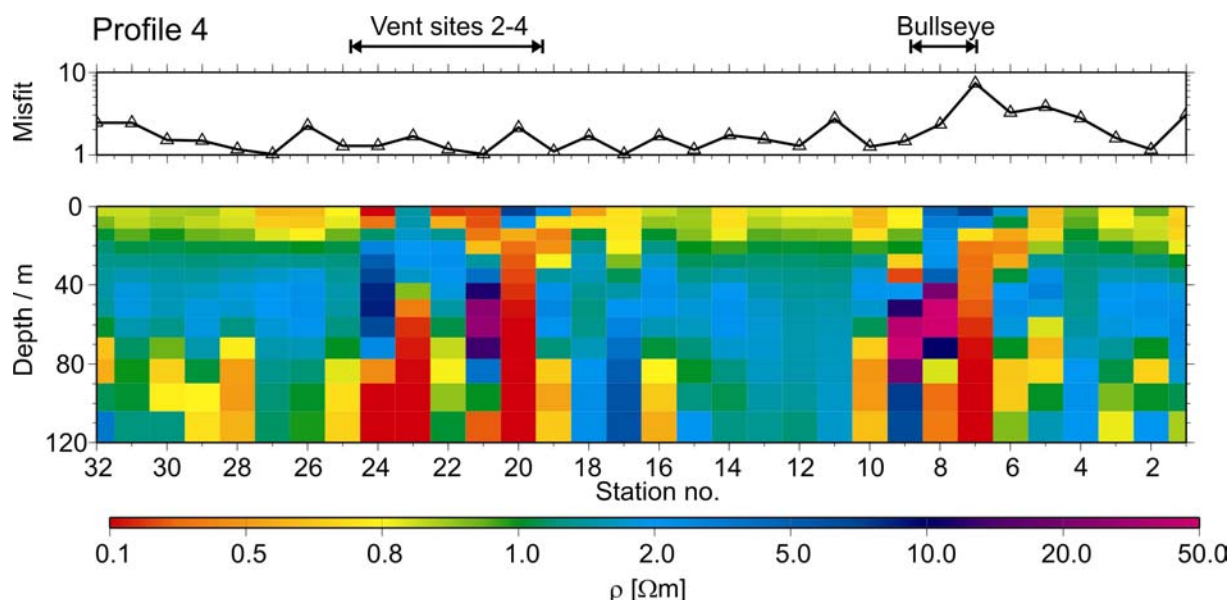


Figure 7: Stitched results of 1D joint inversions for the data set recorded along profile 4. The displayed misfit is an error weighted RMS. The models obtained at stations close to the vent sites (“Bullseye” and “Vent sites 2-4”) show strong lateral and vertical variations, indicating distortions by multidimensional structures.

Discussion

Very large amounts of resistive material are required to explain the highly anomalous resistivities observed over the cold vents. Possible candidates are a higher gas hydrate concentration within the vents, free gas, or a combination of both. Free gas alone or in a predominantly concentration is very unlikely. This would contradict observations made by e.g. Willoughby et al., (2006) who observed higher shear moduli derived from compliance data at Bullseye. The presence of free gas within the GHSZ would also result in the formation of hydrate until the pore water is depleted. A higher hydrate concentration may explain the observed anomalies, probably combined with sufficient free gas to scatter seismic reflection signals. Further, the presence of the BSR below the vents in Figure 3 suggests that gas hydrate is present in the entire area.

For a first rough estimate we may calculate the additional hydrate concentration from Archie’s modified law by subtraction a background concentration from the “total” observed concentration. The background concentration is derived from the baseline resistivities as the total concentration is derived from the inverted resistivity profile. Figure 8 shows the resistivity profile and the additional hydrate concentration derived from profile 1 (see also Schwalenberg et al., 2005). Archie’s law parameter were set to $a=1$, $m=2.8$, and $n=1.9$ (Collett, 2000, Riedel et al., 2005), and an average porosity of 60% (e.g. Hyndman et al., 1999) was employed in the calculation. This approach results in an additional hydrate concentration of more than 50% maximum and about 25% on average. Taken into account a solid to gas ratio of 1:164 the related methane gas volume at STP would be 0.62 billion m^3 for a cylindrical volume with a diameter of 400m and a depth of 200m (Schwalenberg et al., 2005).

Recent drilling results at IODP site U1238 at Bullseye suggest, that the hydrate distribution is heterogeneous within the logs and from drill hole to drill hole. The highest gas hydrate concentration has been found in an interval of 0 to 40 mbsf in the centre of a seismically imaged hydrate cap (M. Riedel, personal communication). Based on the seismic data, the hydrate would be expected to be progressively deep with radial distance from the centre of the Bullseye vent. These information will be incorporated in the ongoing modeling process. However, CSEM data and logging data are sensitive on a different scale. The former are averaging over a larger volume while the latter provide detailed information of a comparable small volume.

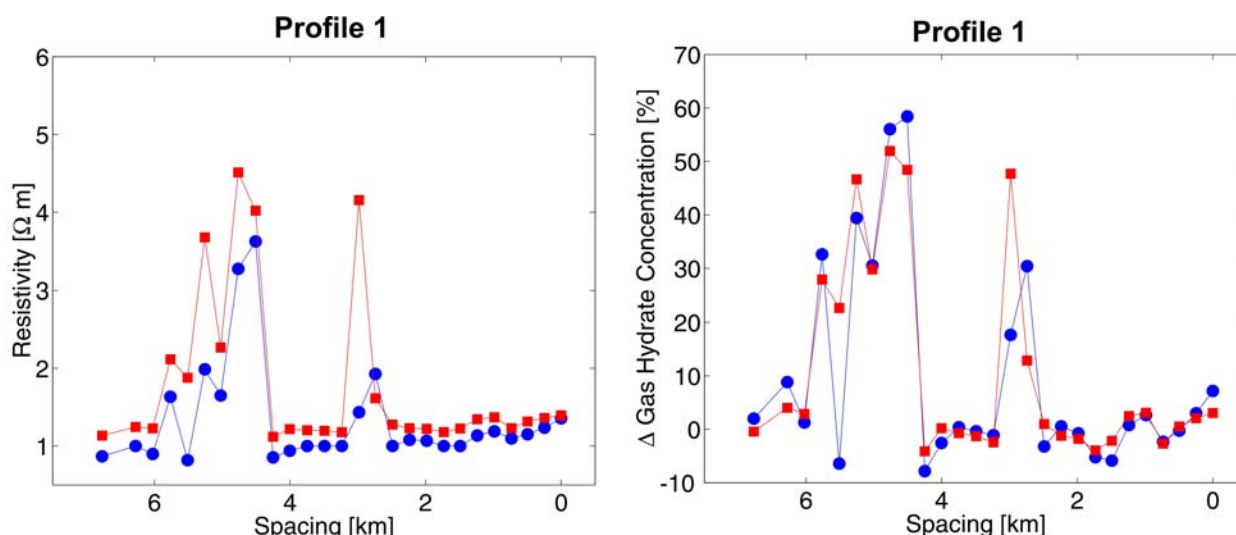


Figure 8: The left panel shows again the resistivity profile 1. Assuming the anomalous resistivities are caused by a locally higher gas hydrate concentration within the vents, we may estimate the additional gas hydrate concentration using Archie's modified law. Therefore, the regional gas hydrate concentration derived from baseline resistivities has been subtracted from the "total" observed concentration (right panel).

Outlook

The Toronto design is currently updated towards a modular multi-receiver system with a fibre optic link between the data acquisition box towed behind the transmitter and the receiver units. Ship time is scheduled in Cascadia in summer 2006 for instrument tests and gas hydrate surveying. Borehole to borehole measurements are being considered to sound the sediment section of the GHSZ. Software developments aim at multi-dimensional time - and frequency domain solutions.

Acknowledgements

We thank the captains and crews of C.C.G.S. John P. Tully for excellent support. The research is funded by grants to RNE from the Natural Science and Engineering Research Council of Canada. Ship time was provided by the Geological Survey of Canada. KS was holding a Fellowship from the German Research Foundation and ECW holds a NSERC Fellowship. The Institute of Geophysics and Meteorology, University of Cologne, Germany kindly allowed us to use their 3D code.

Literature

- Archie, G.E. [1942] The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. *Journal of Petroleum Technology*, 5, 1-8.
- Collett, T.S. and Ladd J. [2000] Detection of gas hydrate with downhole logs and assessment of gas hydrate concentrations (saturations) and gas volumes on the Blake Ridge with electrical resistivity log data, in Paull, C. K., Matsumoto R., Wallace, P. J., and Dillon, W. P. (eds.), *Proceedings of the Ocean Drilling Program, Scientific Results*, Vol. 164, 179 – 191.
- Collett, T.S., [2001] A review of well-log analysis techniques used to assess gas-hydrate-bearing reservoirs, in: *Natural gas hydrates, Occurrence, Distribution and Detection*, (ed. C.K. Paull and W.P. Dillon), *Geophysical Monograph Series No. 124*, pp. 189 – 210, American Geophysical Union (AGU).
- Druskin, V., and Knizhnerman, L. [1994] Spectral approach to solving three dimensional Maxwell's diffusion equations in the time and frequency domains: *Radio Science*, 29, No. 4, 937–953.
- Edwards, R.N. [1997] On the resource evaluation of marine gas hydrate deposits using sea-floor transient electric dipole-dipole method. *Geophysics*. Vol.62, No.1, 63-74.
- Edwards R.N. [2006] *Marine Controlled Source Electromagnetics: Principles, Methodologies, Future Commercial Applications*, Invited Review Paper, *Surveys in Geophysics*, 26, 675-700.
- Expedition 311 Scientists, 2005. Cascadia margin gas hydrates. *IODP Prel. Rept.*, 311. doi:10.2204/iodp.pr.311.2005
- Hyndman, R.D., and Davis, E.E. [1992] A mechanism for the formation of methane gas hydrate and seafloor bottom-simulating reflectors by vertical fluid expulsion: *Journal of Geophysical Research*, v. 97, p. 7125-7041.
- Hyndman, R.D., Yuan, T., Moran, K. [1999] The concentration of deep sea gas hydrates from downhole electrical resistivity logs and laboratory data. *Earth and Planetary Science Letters* 172, 167-177.
- Hyndman, R.D., G.D. Spence, R. Chapman, M. Riedel, and R.N. Edwards [2001] *Geophysical studies of marine gas hydrate in northern Cascadia. Natural Gas hydrates: Occurrence, Distribution, and Detection*, AGU Monograph, Vol. 124, 273-295.
- Riedel, M., Spence, G.D., Chapman, N.R., Hyndman, R.D. [2002] Seismic investigations of a vent field associated with gas hydrates, offshore Vancouver Island. *Journal of Geophysical Research* 107 (B9), doi:10.1029/2001JB000269.
- Riedel, M., Collett, T.S., and Hyndman, R.D. [2005] Gas hydrate concentration estimates from chlorinity, electrical resistivity and seismic velocity. *Geological Survey of Canada, Open File No. 4934*.
- Riedel, M., Novosel, I., Spence, G.D., Hyndman, R.D., Chapman, N.R., Solem R.C., and Lewis, T. [2006] *Geophysical and geochemical signatures associated with gas hydrate related venting at the northern Cascadia Margin. Review paper, GSA Bulletin*, Jan/Feb 2006, Vol. 118, No. 1/2, 23-38, doi: 10.1130/B25720.1.
- Schwalenberg K., Edwards R.N., Willoughby E.C., Yuan J, Cairns G, and Diaz-Naveas J [2004] *Marine controlled source electromagnetic experiment to evaluate gas hydrates off the coastlines of North and South America. Proceedings, 4th MARELEC Conference*, London, UK 17-18 March 2004.
- Schwalenberg K., E.C. Willoughby, R. Mir, and R.N. Edwards [2005] *Marine gas hydrate electromagnetic signatures in Cascadia and their correlation with seismic blank zones. First Break*, Vol. 23, 57-63.
- Schwalenberg, K., Edwards, R.N., Cairns, G.M. and Willoughby, E.C. [2006] *A controlled source electromagnetic experiment to assess gas hydrates in marine sediments offshore Chile. Submitted to J. Geophys. Res.*
- Spence, G.D., R.D. Hyndman, N.R. Chapman, M. Riedel, N. Edwards, and J. Yuan [2000] *Cascadia margin, northeast Pacific Ocean: Hydrate distribution from geophysical observations. Natural Gas Hydrate in Oceanic and Permafrost Environments*, Kluwer Acad. Publ., 183-198.
- Willoughby E.C and Edwards R.N. [2000] *Shear Velocities in Cascadia from Seafloor Compliance Measurements. Geophysical Research Letters*, 27, 1021-1024.
- Willoughby, E.C., K. Latychev, R.N. Edwards, K. Schwalenberg and R.D. Hyndman [(2006) *Seafloor Compliance Imaging of Marine Gas Hydrate Deposits and Cold Vent Structures, J. Geophys. Res (submitted)*
- Wood, W.T., Gettrust, J.F., Chapman, N.R., Spence, G.D., and Hyndman R.D. [2002] *Decreased stability of methane hydrate in marine sediments owing to phase boundary roughness. Nature* Vol. 420, 656-660.
- Yuan J. and R.N. Edwards [2000] *The assessment of marine gas hydrate through electrical remote*

- sounding: Hydrate without a BSR? *Geophysical Research Letters*, 27, 2397-2400.
- Yuan, J. [2003] Electromagnetic assessment of offshore methane hydrate deposits on the Northern Cascadia Margin, PhD Thesis, *Geophysics Laboratory, University of Toronto*
- Zühlsdorff, L., and V. Spiess, [2004] Three-dimensional seismic characterization of a venting site reveals compelling indications of natural hydraulic fracturing: *Geology*, Vol 32, No. 2, 101-104.

Monitoring der Bodenfeuchte mit Georadar und FDR

I. Löhken, R. Bergers, B. Tezkan

(Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln)

Zusammenfassung

In der Nähe von Köln wurden in Zusammenarbeit mit dem Geographischen Institut Untersuchungen zur Bodenfeuchte durchgeführt. Dabei wurde die Bodenfeuchte sowohl mit Georadar als auch mit in verschiedenen Tiefen vergrabenen FDR-Sonden und einer beweglichen FDR-Sonde an der Oberfläche gemessen. Außerdem wurden Bodenproben entnommen und ausgewertet und anschließend mit den FDR- und Georadardaten verglichen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung von den Ergebnissen der Bodenproben und den im Feld durchgeführten FDR-Messungen. Die Georadardaten erreichen die größte Übereinstimmung mit den Daten der in 10 cm Tiefe vergrabenen FDR-Sonden.

Einleitung

In Zusammenarbeit mit dem Geographischen Institut der Universität zu Köln wurden in der Nähe von Köln Untersuchungen zur Bodenfeuchte durchgeführt. Die Geographen interessieren sich dabei für die Fliessbewegung des Wassers im Untergrund zur Überprüfung eines hydrologischen Modells. Die Bodenfeuchte wurde über einen Zeitraum von ungefähr sechs Monaten sowohl mit Georadar als auch mit Frequency-Domain-Reflectometry (FDR) gemessen. Die Georadarmessungen fanden einmal wöchentlich statt, zusätzlich wurde die Bodenfeuchte mit einer beweglichen FDR-Sonde an der Oberfläche gemessen. Die Geographen führten an den gleichen Stationen kontinuierlich FDR-Messungen mit in drei verschiedenen Tiefen vergrabenen Sonden sowie kontinuierliche Niederschlagsmessungen durch.

Bestimmung der Bodenfeuchte

Bei der Bestimmung der Bodenfeuchte mit elektromagnetischen Verfahren macht man sich zu Nutze, dass die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r des Bodens hauptsächlich vom Wassergehalt abhängt (für Wasser ist $\epsilon_r = 80$, für trockene Böden liegt ϵ_r zwischen 1 und 4). Das bedeutet, dass durch Messung von ϵ_r der Feuchtegehalt von Böden gut bestimmt werden kann. Zur Umrechnung der ϵ_r -Werte in Feuchtwerte gibt es empirische Formeln, wie z.B. die Formel von Topp (1980):

$$\Theta_v = -5,3 \cdot 10^{-2} + 2,92 \cdot 10^{-2} \cdot \epsilon_r - 5,5 \cdot 10^{-4} \cdot \epsilon_r^2 + 4,3 \cdot 10^{-6} \cdot \epsilon_r^3$$

Georadar

Bei den Georadar-Messungen wird ϵ_r aus der Geschwindigkeit der Bodenwelle bestimmt. Die Bodenwelle hat hierbei gegenüber den anderen beim Georadar auftretenden Wellen den Vorteil, dass ihr Laufweg durch den Sender-Empfänger-Abstand einfach abgeschätzt werden kann. Da die beim Georadar verwendeten Frequenzen (10 MHz bis 1 GHz) relativ hoch sind und die Leitfähigkeit der meisten Böden eher niedrig, kann der Dämpfungsterm der Telegraphengleichung vernachlässigt werden. Berücksichtigt man außerdem, dass für die meisten geologischen Materialien $\mu_r = 1$ gilt, so erhält man für die Wellengeschwindigkeit im Medium:

$$\nabla^2 \vec{F} - \underbrace{\mu\sigma \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}}_{\text{Dämpfung}} - \underbrace{\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}}_{\text{Ausbreitung}} = 0 \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

FDR (Frequency-Domain-Reflectometry)

Die Bestimmung des volumetrischen Feuchtegehaltes erfolgt bei den FDR-Sonden über eine Messung der Impedanz.

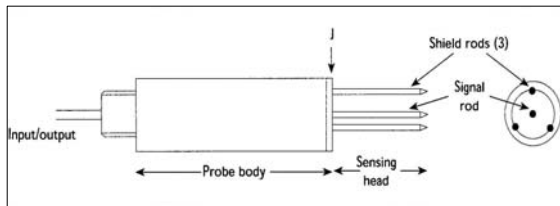


Abb. 1: Schematische Darstellung der FDR-Sonde

Die Spieße der Sonde verhalten sich dabei wie ein Koaxialkabel (siehe Abbildung 1). Werden die Spieße in den Boden gesteckt, verhält sich dieser wie ein Dielektrikum. Die von der Sonde gemessene Impedanz hängt dann von der Dielektrizitätszahl des Bodens zwischen den Spießen ab. Das Gerät rechnet die ϵ_r -Werte für mineralische Böden über folgende Formel in Feuchtewerte um (Gaskin und Miller, 1996):

$$\Theta_v = \frac{(\sqrt{\epsilon_r} - 1,6)}{8,4}$$

Das Messgebiet

Die Messungen fanden auf einer Weidefläche in Hausdorp, ca. 30 km südwestlich von Köln, statt. An drei Stationen, die sich an Oberhang (Station I), Mittelhang (Station II) und Unterhang (Station III) befinden, wurden von den Geographen FDR-Sonden in 10 cm, 30 cm und 90 cm Tiefe vergraben sowie Regensensoren zur kontinuierlichen Aufzeichnung aufgestellt. Eine Karte des Messgebietes zeigt Abbildung 2. Die Georadar-Messungen verliefen an jeder Station über ein Profil von 20 m Länge. Dabei wurde versucht, das Profil genau über die mitteltiefe Sonde (in 30 cm Tiefe) zu legen, da zuerst von einer Erkundungstiefe von ca. 30 cm ausgegangen wurde. Da die Profile in 3 m bis 10 m Entfernung von einem Stacheldrahtzaun lagen, wurde bei den Messungen ein Georadar-Gerät mit abgeschirmten Antennen verwendet.



Abb. 2: Das Messgebiet in Hasdorp

Erste Messungen

Die Georadar-Messungen wurden mit einer SIR 10 und zwei 400 MHz-Antennen der Firma GSSI durchgeführt. Gemessen wurde mit einem festen Antennenabstand von 80 cm. Der Messpunktabstand betrug 20 cm. Außerdem wurden auf jedem Profil noch zwei Messungen in der WARR-Anordnung von jeweils 5 m Länge durchgeführt, die zur eindeutigen Identifikation der Bodenwelle dienen sollen. Abbildung 3 zeigt ein Radargramm einer Profilmessung.

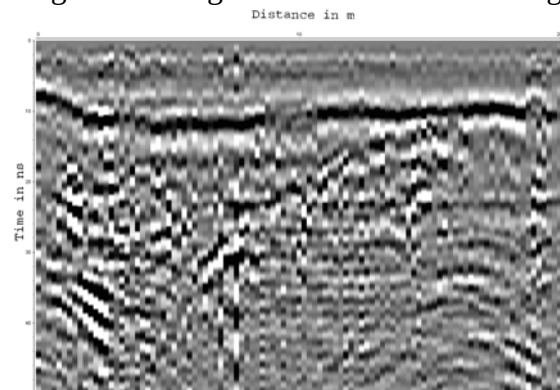


Abb. 3: Radargramm einer Profilmessung vom 21.06.2005

Man erkennt, dass die Laufzeit der Bodenwelle (um 10 ns) auf den ersten Metern kürzer ist als auf dem nachfolgenden Teil. Auf der Abbildung 4 sind die aus dem Radargramm in Abbildung 3 errechneten Feuchtewerte zu sehen. Auch hier erkennt man, analog zur höheren Bodenwellengeschwindigkeit im Radargramm, die niedrigeren Werte der Bodenfeuchte auf den ersten Profilm Metern.

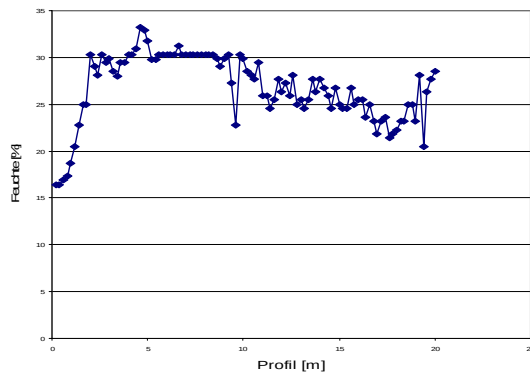


Abb. 4: Aus dem Radargramm errechnete Bodenfeuchte

Den Vergleich von Georadar- und FDR-Daten für das Profil III zeigt die Abbildung 5.

Um die Daten der FDR-Sonden und die Georardaten besser vergleichen zu können, werden vorerst nur die ϵ_r -Werte verglichen. Die Übereinstimmung der Werte ist sehr gut. An jedem FDR-Messpunkt wurden vier bis fünf Einzelmessungen gemacht, da die Werte zum Teil sehr stark schwanken. Daher kommen auch die relativ großen Fehlerbalken.

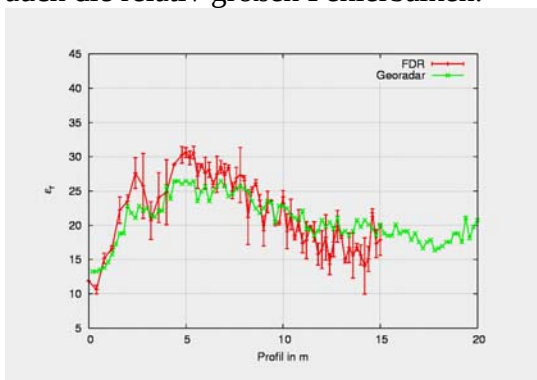


Abb. 5: Vergleich von Georadar- und FDR-Daten für ein Profil vom 21.06.2005

Abbildung 6 zeigt die Aufzeichnungen der Bodenfeuchte und der Niederschlagsmengen der Geographen. Man erkennt, dass die FDR-Sonde in 10 cm Tiefe die größten Variationen aufweist und am schnellsten auf Niederschlag bzw. Abtrocknen reagiert. Die 90 cm tiefe Sonde zeigt dagegen erwartungsgemäß die geringsten Variationen.

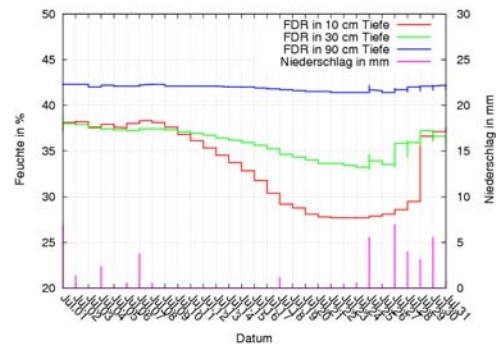


Abb. 6: FDR- und Niederschlagsdaten der fest installierten Sensoren für Juli

Den Vergleich der FDR- und Georardaten für die drei Stationen zeigt Abbildung 7. Es ist wiederum zu erkennen, dass die Kurven der FDR-Daten umso glatter werden, je tiefer man misst. Der Verlauf der Radardaten stimmt an allen drei Stationen am besten mit dem Verlauf der FDR-Sonde in 10 cm Tiefe überein. Daher kann man beim Georadar auf eine Erkundungstiefe von ungefähr 10 cm schließen. Auch die Absolutwerte der Georardaten und der Daten der 10 cm tiefen Sonde stimmen an den Stationen I und II gut überein. An der dritten Station werden mit den Radarmessungen relativ hohe ϵ_r -Werte erreicht. Das liegt daran, dass die Radardaten einen integrierten Wert widerspiegeln, der sich aus den enorm hohen Werten an der Oberfläche und den relativ niedrigen Werten in 10 cm Tiefe ergibt.

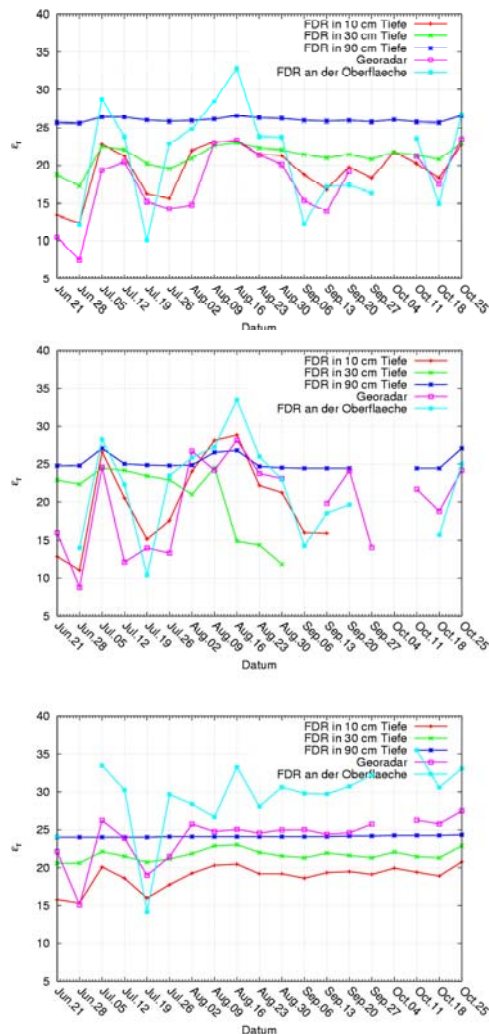


Abb. 7: Vergleich der FDR- und Georadardaten für die Stationen I bis III für einen Zeitraum von 5 Monaten

Auswertung von Bodenproben

Um die FDR-Sonde für die im Feld vorliegende Bodenart zu kalibrieren, wurden an zwei Messtagen jeweils acht Bodenproben entnommen. Durch Trocknen und Wiegen wurde der gravimetrische Feuchtegehalt bestimmt, der dann in den volumetrischen Feuchtegehalt umgerechnet wurde und mit den Ergebnissen der FDR-Sonde verglichen wurde.

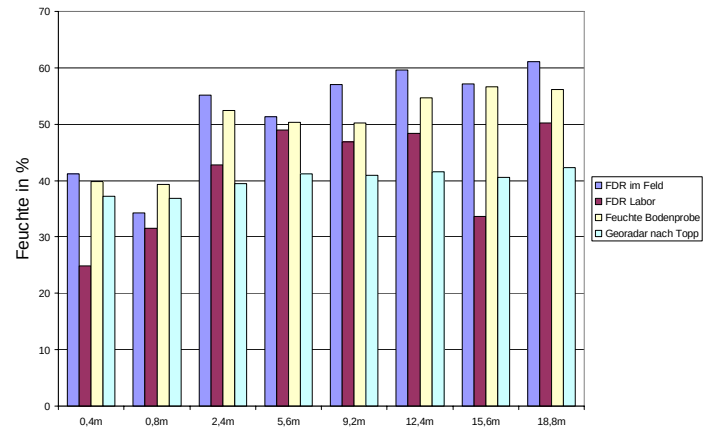


Abb. 8: Vergleich der aus den Bodenproben gravimetrisch bestimmten Feuchte und der FDR- und Georadardaten

Wie man in der Abbildung 8 erkennt, stimmen die aus den Bodenproben errechneten Feuchtwerte gut mit den im Feld gemessenen FDR-Werten überein. Es fällt auf, dass die im Labor gemessenen FDR-Werte relativ stark abweichen, was eventuell daran liegen könnte, dass der Probenbehälter, beziehungsweise das geringe Messvolumen, die Messung beeinflusst. Auch die aus den Radardaten errechnete Feuchte zeigt immer niedrigere Werte, was aber wieder daran liegt, dass das Georadar einen integrierten Wert misst und die Bodenproben nur an der Oberfläche entnommen wurden.

Aus der Kalibrierung der FDR-Sonde ergibt sich für die vorliegende Bodenart eine große Übereinstimmung mit der Formel von Topp und der Formel, die das FDR-Gerät zur Umrechnung benutzt.

Diskussion

Die FDR-Sonden liefern nur punktuelle Feuchtedaten und zeigen zum Teil sehr große Schwankungen bei Wiederholungsmessungen, so dass der Einsatz für größere Gebiete sehr zeitaufwendig ist. Das Georadar hat ein größeres Messvolumen, welches sich aus dem Antennenabstand, der Antennenbreite und der Erkundungstiefe ergibt. Außerdem können die Messungen relativ schnell durchgeführt werden und sind daher für Anwendungen auf größeren Flächen geeignet. Der zeitliche und der

laterale Verlauf der FDR- und Georadardaten stimmen gut überein. Bei den Absolutwerten erreichen Georadar und die FDR-Sonde in 10 cm Tiefe die größte Übereinstimmung, was auf eine Erkundungstiefe der Bodenwelle des Georadars von ungefähr 10 cm schließen lässt. Der Vergleich mit den Bodenproben zeigt, dass die Formel, die das FDR-Gerät zur Umrechnung in Feuchtwerte benutzt, für die vorliegende Bodenart benutzt werden kann.

Literaturangaben

Gaskin, G. J. und Miller, J. D., 1996, Measurement of soil water content using a simplified impedance measuring technique: Journal of agricultural engineering research, **68**, 153-160.

Topp, G. C., 1980, Electromagnetic determination of soil water content: Measurements in coaxial transmission lines: Water Resources Research, **16**, 574-582.

Applicability of RMT, VES and Dual Loop EM for the mapping of a Quaternary buried valley in the area "Heiliges Feld" (NRW, Germany)

Frank P. Bosch

Institute for Geophysics, University of Münster, Germany

Introduction

Investigating aquifer systems of glacial buried valleys as potential sources for groundwater catchment areas is of actual interest in several scientific projects in northern Europe (Huuse et al. 2003) including northern Germany (Gabriel et al. 2003). This paper presents first results of a recent geophysical survey carried out by the Institute for Geophysics of the University of Münster (Germany) in an area called "Heiliges Feld" northwest of Ibbenbüren (North-Rhine-Westphalia, Germany).

Table 1: Borehole information in the area "Heiliges Feld" (from Thiermann (1975))

Bohrungen	Hörstel 1008	Hörstel 1009	Hörstel SP 651	Hörstel 1015	B3 Hopsten
Zweck	Klärung der Stratigraphie und Tektonik zwischen Ibbenbürener Karbonscholle und der Struktur Dreierwalde	Erdöl-Untersuchungsbohrung	Erdöl-Untersuchungsbohrung	Klärung der Stratigraphie und Tektonik in nordwestlicher Fortsetzung der Ibbenbürener Karbonscholle	Keine Angaben
Lage	R: 3403670 H: 5801360	R: 3404690 H: 5803520	R: 3406400 H: 5803150	R: 3406820 H: 5802630	R: 3407025 H: 5802425
Höhe über NN	ca. 41m	ca. 40m	ca. 43m	ca. 45m	ca. 45m
Auftraggeber	Preußag	Preußag	Preußag	Preußag	K. Angaben
Bohrzeit	~1954	~1954	~1954	8.5-17.5.1954	K. Angaben
Endteufe	64.3m	65.0m	33.5m	159.0m	49.0m
Geologisches Profil (unter GOK)	- 28.0m Quartär - 55.0m Kimmeridge - 64.3m Oxford	- 27.5m Quartär - 65.0m Münder-Mergel	- 18.0m Quartär - 33.5m Münder-Mergel	- 82.5m Quartär - 159.0m Münder-Mergel	- 47.1m Quartär - 49.0m Münder-Mergel

In this area, Quaternary deposits (sands and silts) cover lower Cretaceous/ Jurassic marls ("Münder Mergel"), a sequence of marl- and clay stones with interlaced anhydrite and gypsum benches followed by rock salt (Lotze 1956; Thiermann 1975; Weinert 1999). A particularity of this region is a number of several lakes oriented on a NE-SW striking axis. These lakes were caused by subsurface collapses due to dissolution processes in the Jurassic layers. Some collapses occurred in quite recent times i.e. the so called "Erdfallsee" in the year 1913.

This survey aims to estimate the applicability of several electromagnetic geophysical methods to successfully map the subsurface with regard to the following general geological/ hydrogeological points of interest:

- Mapping of the Quaternary basis (QB) to delineate the dimension of the porous aquifer system
- Estimating the possibilities of groundwater quality mapping (brines)
- Delineation of future collapse regions

The current map of the QB extension (Figure 1) is based on some few drill holes (Table 1) showing a varying QB depth from 25 to 83 m beneath the surface

(Thiermann 1975). The punctual in-situ information from the wells is extensively distributed on a large area. To provide additional useful geophysical information, the applied methods have to be both able to survey quickly large areas and to investigate the QB at least to a depth of about 90 m.

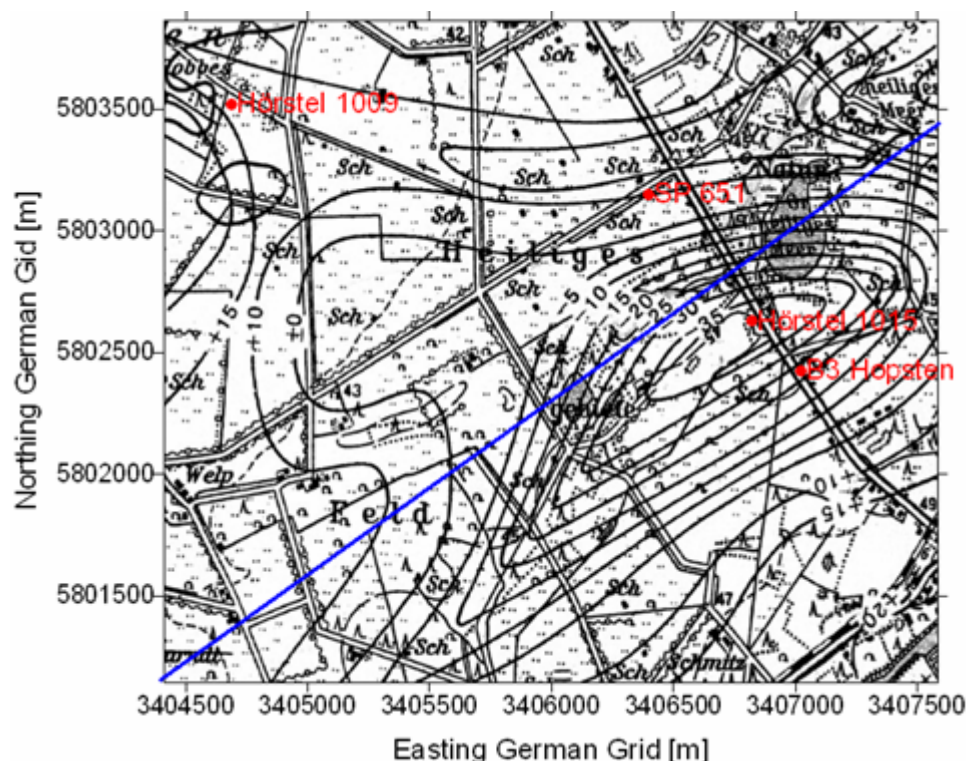


Figure 1: Depth of Quaternary basis in meter below sea level (normal null) after Thiermann (1975). The blue line indicates the "lake axis".

Applied methods and equipment

The drillings show a significant change in the electrical resistivity at the QB. Furthermore, the degree of the groundwater mineralization varies in the different parts of the survey area (Weinert 1999). Therefore, DC and AC electromagnetic methods have been chosen to investigate this area.

Vertical Electric Sounding (VES) has been applied in order to reach the QB at greater depth in the centre of the buried valley. An ABEM Terrameter SAS 300 (3 W, 320 V) with optional use of the SAS 2000 Booster (40 W, 800 V) was used, which enables to induce currents between 0.2–20 mA or 50–500 mA respectively. Schlumberger configuration with maximum current electrode spacing of 1000 m was applied. Twenty-one soundings have been carried out in the area along distinct profiles (Figure 2). Results from two NW-SE profiles with a station interval of about 1000 m are displayed in Figure 3. The apparent resistivities have been inverted with Bobachev's 1D-inversion Program IPI2Win (Bobachev 2002).

The **Radiomagnetotelluric (RMT)** method was additionally applied in order to use a resistivity sounding method which provides very quick measurement progress. An investigation depth of about 50 m has been expected in that survey area.

Main Results

Vertical electrical soundings (VES)

Figure 3 shows the pseudo cross sections and the inverted resistivity cross sections of the two VES profiles. The fit of the inversions varies between 0.4 % and 5 %. The "East-Profile" might indicate some kind of valley structure

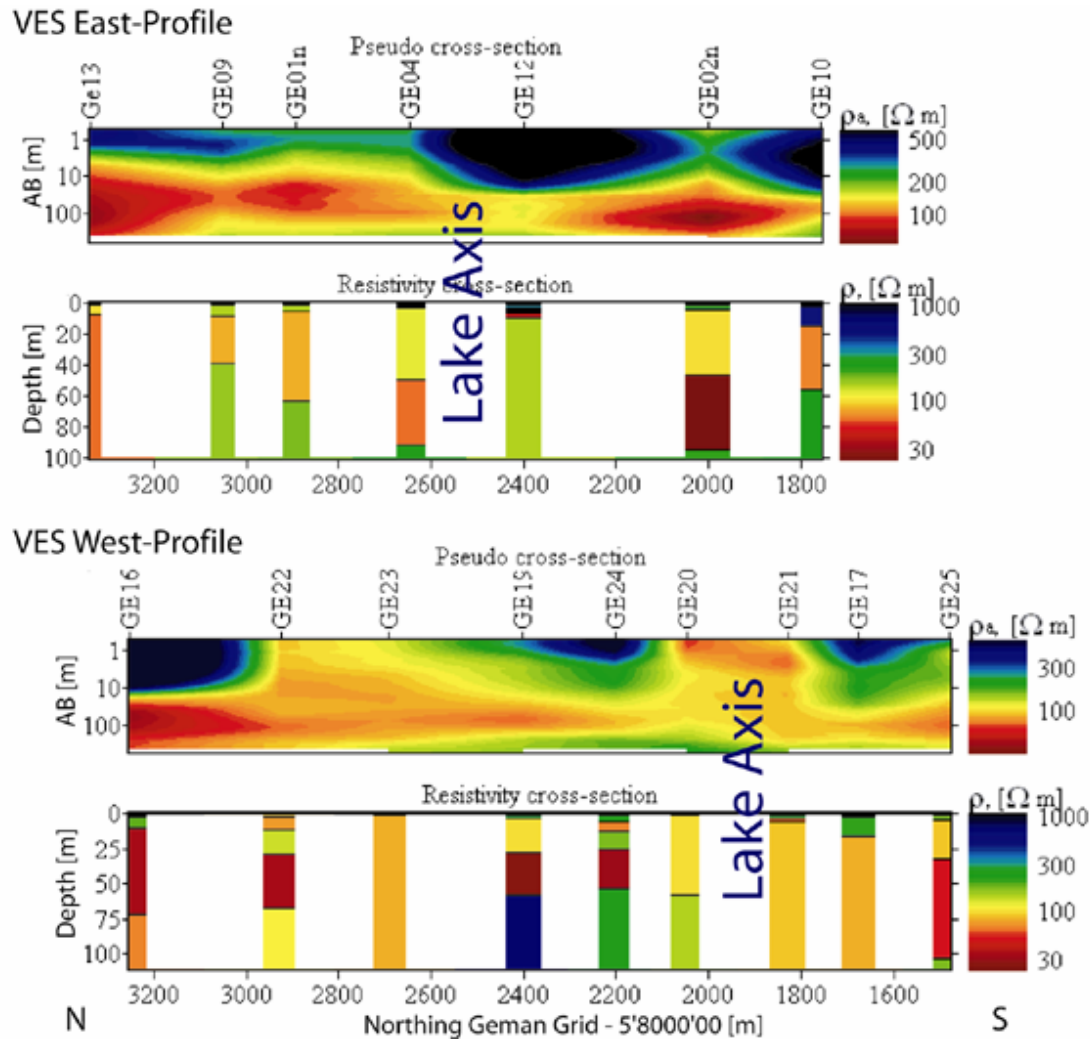


Figure 3: VES results: pseudo sections (left corner North) of apparent resistivity against current electrode spacing and 1D inversion models. Depth scale is in depth beneath surface.

marked by the increasing thickness of the resistive top layers (100-100 Ωm) over a prominent conductive layer (30-50 Ωm) from north towards the "lake axis". Under the conductive layer a more resistive half space (200-300 Ωm) is visible. According to the available borehole data in Table 1 this conductive layer might represent the change from the Quaternary sediments to the "Münder Mergel" (lower Cretaceous/Jurassian marls). Therefore, the top of the conductive layer can indicate the basis of the Quaternary sediments. South of the "lake axis", the thickness of the resistive top layers decreases and therefore the depth of the conductive layer. If a specific symmetry of the buried valley is assumed, then VES-station GE12 is located somewhere in the centre of the valley. This station does not show this conductive layer. That might either be due to the fact, that this layer is simply too deep to be detected at this location or the stratigraphic properties are different in that region.

According to the latter, one has to consider, that the area of the lake axis is the zone of subsurface collapses, which produced the lakes.

The inverted data of the "West-Profile" do not show a valley structure evidently. The most prominent feature of this profile is the missing of the conductive layer at VES-station GE23 and at the three stations around the lake axis. Unfortunately, it was not possible to place VES-stations in the vicinity of a drilling for calibration purposes.

Radiomagnetotelluric (RMT)

The four resistivity cross-sections (Figure 4) gained from the inversion of the RMT data (apparent resistivity and phase) provide a consistent image for the different profiles. All profiles feature a resistive top layer of about 100 to 200 Ωm with varying thickness covering a more conductive half space with a specific resistivity of $\leq 50 \Omega\text{m}$, while this interface is interpreted as the QB. Therefore, the RMT results show the same general behavior as the VES results at the comparable depth scale, but with higher lateral resolution. The thickness variations of the top layer imply a valley structure. Due to the limited penetration depth, the RMT data cannot delineate another layer under the conductive one. In some regions, the interface of the two layers is not visible, but the resistive layer represents the half space. The interpretation is the same as for the VES data: either the conductive layer starts at depths, which are not reachable for the method anymore or it does not exist in that region.

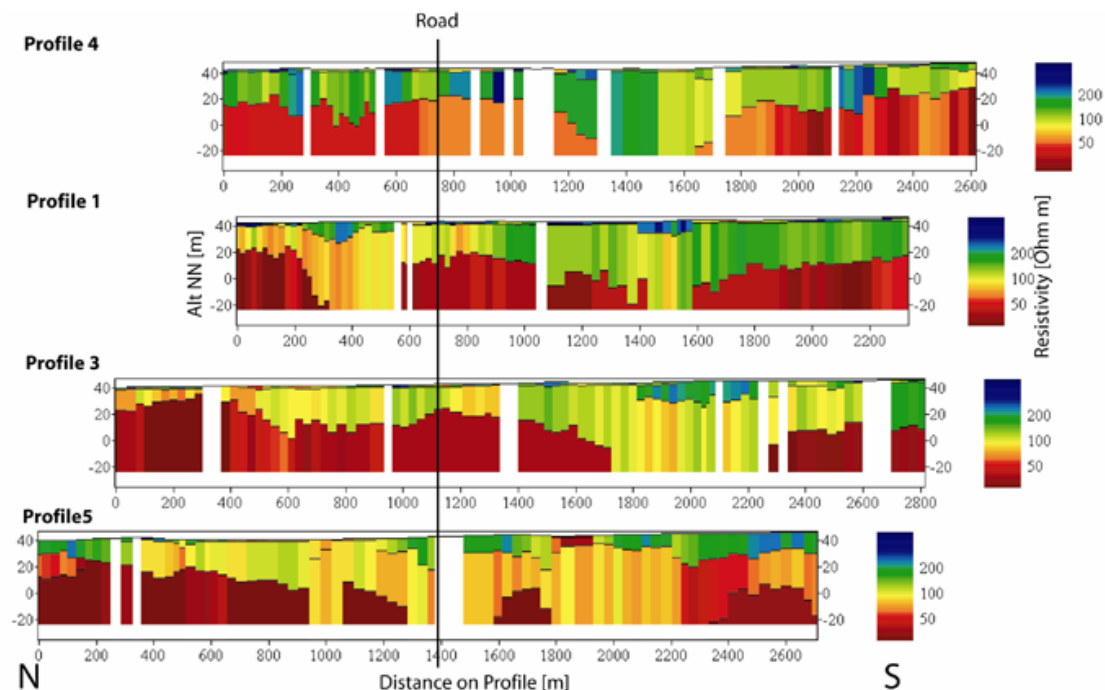


Figure 4: RMT resistivity cross sections obtained from 1D inversions. Depth scale is in "Altitude above sea level" (normal null).

As a matter of fact, all regions of increased resistive top layer thicknesses coincide with regions of observed collapses (Lotze 1956). Furthermore, the RMT inversion results can be compared with the borehole logs very well due to their vicinity to the profiles. The interface between the resistive top layer and the conductive half space at RMT stations near to boreholes coincide within $\pm 2 \text{ m}$ with the depth of the drilled QB. Particularly, the steep slope on RMT-Profile 4 between profile meter 1400 and 1690 is validated by the boreholes H-1015 (-82.5 m beneath surface) and B3 (-47.1 m beneath surface) respectively (Figure 4, Figure 5 and Table 1). Figure 5 provides a

map of the QB depths obtained from RMT inversion models. The depths are given in altitudes above sea level (ASL). Regions deeper than -20 m ASL are blanked because these depths have not been resolved by the RMT data in this case study.

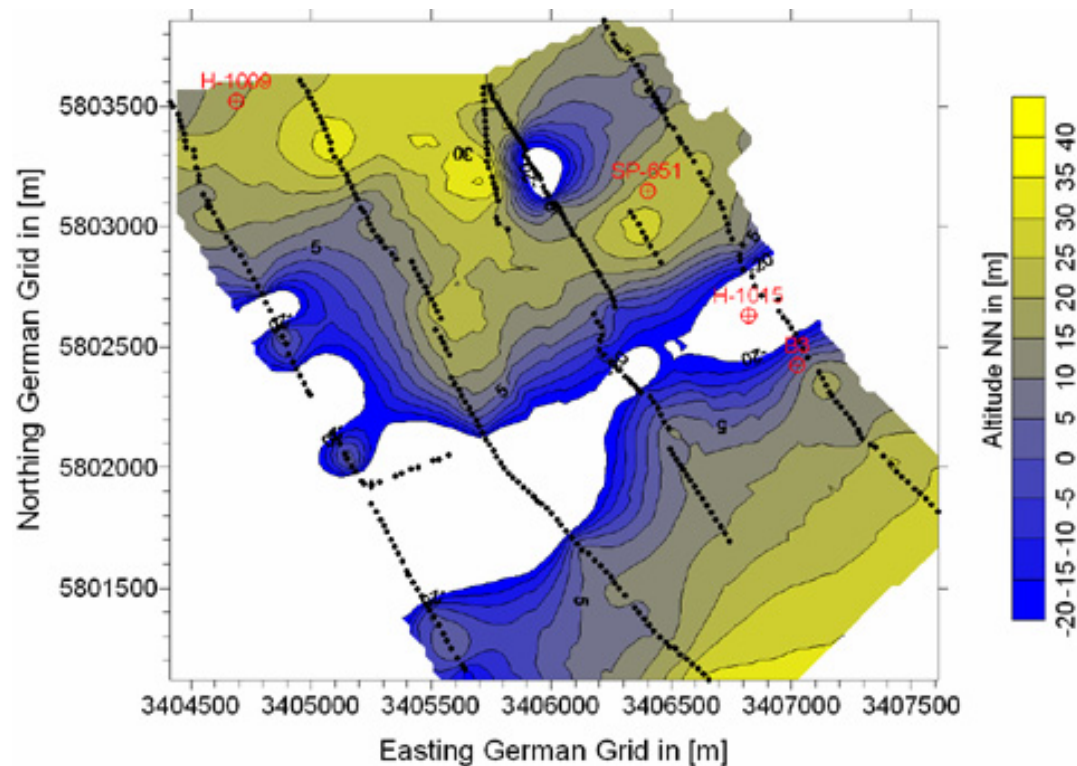


Figure 5: Map of Quaternary basis obtained from RMT inversions. Black dots indicate RMT station locations. Borehole locations are in red. Color code for depth is in altitude above sea level (normal null).

Horizontal Loop Electromagnetic (HLEM)

The HLEM data have been sampled on the central part of RMT-Profile1 in order to map the flanks and the central part of the buried valley (Figure 2). The inphase and quadrature raw data in Figure 6 show only significant lateral variations for the three highest frequencies. The resistivity cross section obtained from 1D inversions in Figure 7 shows models of the general type already obtained from VES and RMT data: a resistive top layer (500 - 1000 Ωm and varying thickness), a conductive layer (10 - 30 Ωm and generally about 10 m thick) and a resistive half space (100 - 250 Ωm).

From profile meter 800 to 1100, the increasing depth of the top of the conductive layer in the HLEM models coincides with the RMT models. Beyond 1100 meter they do not. Particularly remarkable is the fact that the conductive layer stays at about 20 meters depth beneath the surface in the central part of the buried valley, which definitely does not fit to the VES and RMT inversion models and the borehole information about the QB. This behavior might be due to the fact, that the chosen coil separation of 56.57 m is not adequate to the depth of the target in that region and must be greater instead. Furthermore, the HLEM inversion results are strongly depending on the starting model, which is not the case for VES and RMT. Therefore, in this case study HLEM cannot be considered as an alternative to VES in order to combine great information depth as obtained with VES and high lateral resolution due to short station distance as provided by RMT.

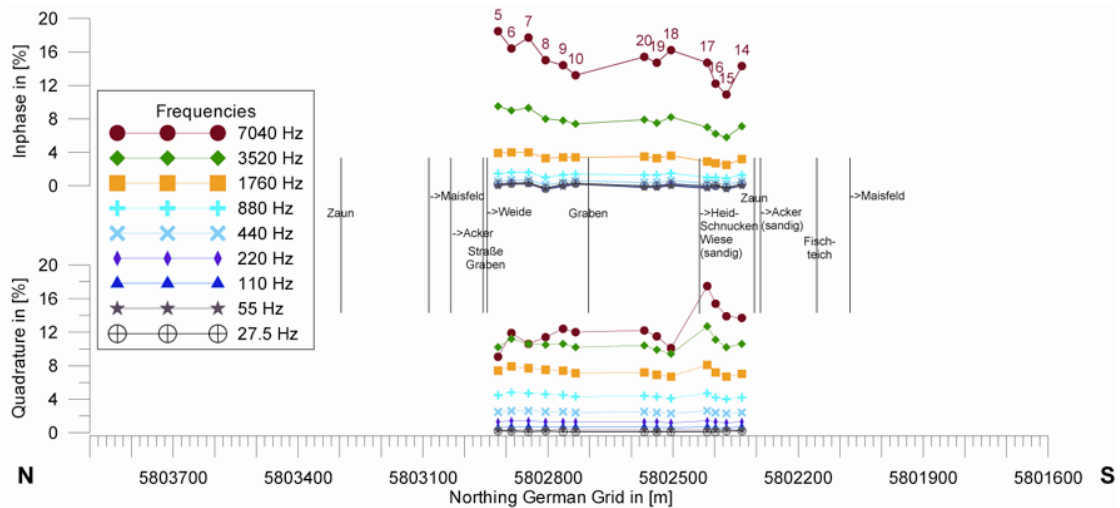


Figure 6: HLEM raw data: Iphase and Quadrature component for different frequencies.

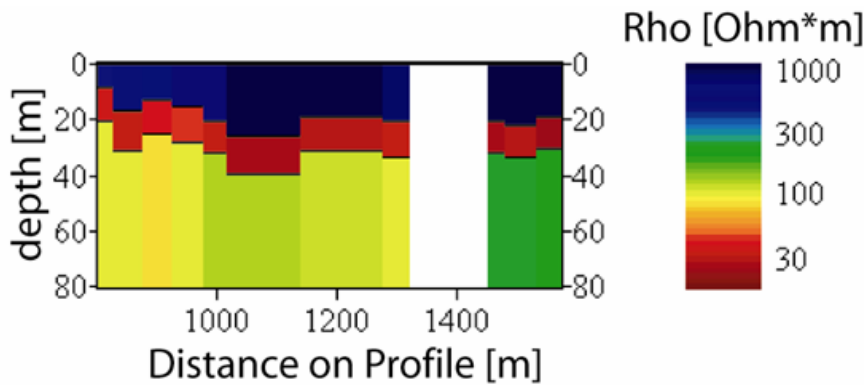


Figure 7: Resistivity cross section from 1D inversion of HLEM data on central part of Profile 1.

Summary and Conclusions

Compared to the geological map after Thiermann (1975) in Figure 1, the knowledge about the distribution of the Quaternary basis (QB) can be refined. The shape seems to be more complex than formerly known. Due to the RMT findings, the deepest extension follows along south of the "lake axis". An additional prominent deepening exists in the North. Further small QB depressions are located near to or at areas of geologically mapped collapses (Lotze 1956; Thiermann 1975). This might offer the possibility of delineating yet unknown collapses or even regions of risk for future collapses with RMT. Water quality mapping in terms of salinity was not done, yet.

The used maximum VES electrode separation of 1 km seems not to be sufficient in the centre of the buried valley to find the QB. Additionally, this large setup provides a logistic problem in choosing sounding locations. Consequently, no sounding is located near to a drilling. The location problem and furthermore the slow measurement progress hinders to achieve a necessary denser sounding location distance.

In this study, RMT was the most useful method to delineate the shape and the extension of the QB and therefore the buried valley so far. A large area has been covered in 7 days of field work. The QB depths coincide with borehole data, but the

investigation depth is too small to detect the QB in the central part. At least the regions of greatest depth extension have been isolated. The maximum investigation depth has been about 60 m beneath the surface.

The results of testing the HLEM method as a fast alternative sounding and mapping method compared to VES was rather disappointing in this case. The inversion results have strongly been influenced by the starting model. The conductive layer used as marker for the QB is nearly everywhere at the same depth in the inversion models. Maybe keeping the coil separation fixed was not adequate for the whole profile or frequency sounding is not sensitive enough for the task? However, geometric sounding gives noisy inphase data and is much more time consuming. Another problem of the used HLEM system is that there was no chance for calibration because of missing high resistive ground of necessary thickness near to the survey area.

A better EM alternative to VES for deep sounding might be Transient Electromagnetic (TEM) and concerning high measurement progress airborne electromagnetic (AEM).

Acknowledgements

Many thanks to Mr. Jacques Duprex, the constructor of the used RMT and HLEM systems as well as to the Center of Hydrogeology of the University of Neuchâtel, Switzerland for providing us with the RMT and HLEM equipment and to the department of Applied Geophysics, Institute of Geology of the Rheinische Friedrich Wilhelms University Bonn, Germany for helping us with an additional RMT device.

References

- Bobachev, A.A., 2002. IPI2Win (MT), Moscow State University, Moscow.
- Bosch, F.P. & Müller, I., 2005. Improved karst exploration by VLF-EM-Gradient survey: comparison with other geophysical methods. *Near Surface Geophysics* **3**: 299-310.
- Gabriel, G., Kirsch, R., Simon, B. & Wiederhold, H., 2003. Geophysical investigations of buried Pleistocene subglacial valleys in Northern Germany. *Journal of Applied Geophysics* **53**(4): 159-180.
- Huuse, M., Lykke-Andersen, H. & Piotrowski, J.A., 2003. Geophysical investigations of buried Quaternary valleys in the formerly glaciated NW European lowland: significance for groundwater exploration. *Journal of Applied Geophysics* **53**(4): 153-157.
- Lotze, F., 1956. Zur Geologie der Senkungszone des Heiligen Meeres (Kreis Tecklenburg). *Abh. Landesmus. Naturkunde. Münster* **18**: 1-36.
- McNeill, J.D., 1980. Electromagnetic terrain conductivity measurement at low induction numbers. Technical Note TN-6, Geonics Ltd, Mississauga, Ontario, Canada.
- Thiermann, A., 1975. Geologische Karte von Nordrhein-Westfalen 1:25000: Erläuterungen zu Blatt 3611 Hopsten, Geologisches Landesamt Nordrhein-Westfalen, Krefeld.
- Weinert, M., 1999. Hydrogeologie, Hydrochemie und Isotopenhydrologie des Naturschutzgebietes "Heiliges Meer" (Recke / Nordrhein-Westfalen). PhD thesis, Geologisch-Paläontologisches Institut, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Münster, 149 pp.

Stoneley wave induced electrokinetic potentials in large sandstone blocks

Johannes B. Stoll

ANTARES Datensysteme GmbH
Rudolf-Diesel-Str. 6-8
28816 Stuhr b. Bremen

1 Introduction

This paper describes the results of lab experiments in which electrokinetic potentials, i.e. streaming potentials, are stimulated in large sandstone blocks by an acoustic source. The objective of this study is to design a new logging system called EKL to estimate soil and rock permeability by measuring electro-kinetic signals. A compact experimental set up was planned to measure the electro-kinetic effects in two sandstone blocks of different permeabilities. Suitable laboratory samples, i.e. two sandstone blocks were obtained and saturated with water. Several acoustic sources were tested to find the most suitable technique to generate seismic induced electro-kinetic signals. An electric receiver was developed to measure the electric response signals from the rocks. At least the acoustic wave field was measured using two hydrophones, one as a reference the other moving with the electric receiver. Several tests in two sandstone blocks were run. This set up allowed to estimate the electro-kinetic coefficient, i.e. to normalise the electric field to the pressure, and to correlate it with the hydraulic permeability

2 Physical background of seismic-induced electro-kinetic effects in boreholes

Borehole Seismic Modes

A streaming potential is generated across a water-saturated porous rock when fluid flow is induced by an applied pressure gradient. The overwhelming majority of this work has been in the area of DC streaming potentials, while very little work has been done in the area of frequency-dependent streaming potentials. Although in laboratory studies a DC pressure signal can be easily established, it is an improper method to stimulate electro-kinetic signals in boreholes.

A number of logging methods are used as standard tools to detect and characterise permeable zones in the subsurface. Only seismic waves generated in boreholes are a dynamic method in which fluid flow is involved and therefore provides important information about permeability. The goal of this work were to make laboratory measurements of the electric fields induced by a borehole seismic wave and to study to which extent it can be used in the determination of formation permeability.

One of the most important acoustic modes, which is related to fluid motion in porous rocks, is the *Stoneley wave*. It is a guided wave in the borehole that arrives after the shear wave and the fluid compressional wave. Another important mode is the so-called *slow compressional wave*. It is a body wave and travels in the fluid in the pores at a velocity less than that of the fluid. Its amplitude decays rapidly with distance, turning into heat before it can be detected by a sonic log. No pores, no fluid, no slow compressional wave.

Although predicted by Biot in 1956, the slow wave was not detected in the lab until 1982 by Johnson and Plona. Biot theory shows that acoustic waves create relative motion between the fluid and the solid frame due to inertial effects. As the matrix is accelerated, the fluid lags behind, resulting in viscous dissipation of acoustic energy. At low frequencies, the viscous skin depth is much larger than the pore size. Fluid and solid are virtually locked together moving in phase. At higher frequencies, the viscous skin depth is very small and the fluid and solid are essentially decoupled. Velocity is a maximum, and attenuation is low. For water-saturated rocks, the critical frequency in the Biot theory, where attenuation and dispersion are maximum, is often on the order of 100kHz. Increasing viscosity pushes the critical frequency even higher. Therefore seismic waves and sonic logging are almost always in the low-frequency range of the Biot theory. At low frequencies the Biot slow wave is diffusive and at high frequencies it is propagatory. The propagatory wave is very difficult to observe in rocks (Johnson and Plona, 1982). The diffusive mode of the slow wave is of practical importance for permeability estimation using borehole Stoneley waves.

The Stoneley wave is a guided mode propagating primarily in the borehole fluid and applying pressure against the borehole wall. This pressure generates a diffusive wave in the pore fluid in the rock. Energy conversion occurs from Stoneley wave to diffusive wave causing both attenuation and reduction of the Stoneley wave velocity. In practice, it is used to estimate the permeability of rock formation. The wave motion in the fluid-filled pores acts as a pump forcing fluid into pores and fractures. Higher permeability absorbs more energy, thus reducing the amplitude of the Stoneley wave.

Seismo-electric conversion

In Biot's theory a wave propagation is proposed in two-phase porous media that allows for the fluid phase to move relative to the solid phase during seismic wave passage. Energy dissipation is assumed to be solely due to the viscous shearing of the fluid. When a fluid electrolyte moves relative to a solid, an electric field is generated that migrates ions (**Figure 1**). The generated electric field pushes on the excess ions in a direction opposite to the applied pressure gradient. This electric field migrates ions in the fluid and thus dissipates energy as Joule heat. The potential associated with this electric field is called the streaming potential. In most cases the electro-kinetic losses can be ignored if the electrolyte molarity is in the order of 0.1 M or greater (Pride and Morgan,

1991). In this case wave propagation isn't influenced by electro-kinetic forces.

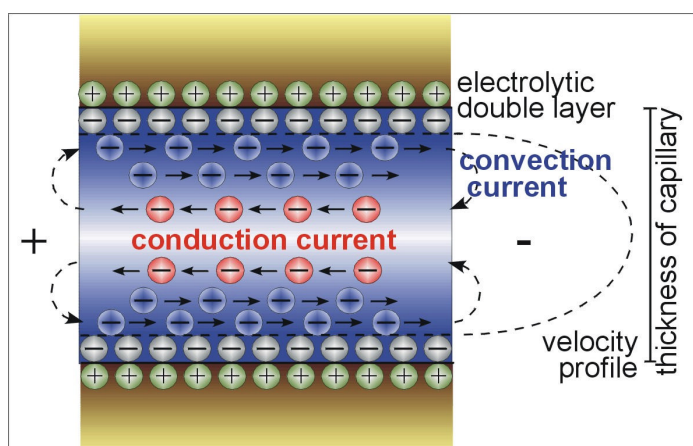


Figure 1: Principle of generation of streaming potential

As the fluid flows, it carries with it the mobile charges of the diffuse portion of the double layer producing an electrical convection current. As fluid flows into the entrance region of the capillary, the positively charged fluid of the diffuse double layer is replaced by neutral electrolyte. This effectively exposes the negative surface charge and results in the entrance having a net negative charge. Simultaneously at the exit, the positively charged double layer fluid is streamed out into the neutral electrolyte resulting in the exit region acquiring a net positive charge. An electric field is therefore induced along the length of the capillary. The potential associated with this field is called streaming potential.

In this case the observed streaming potential travels with the guided wave in the borehole. This is the *first type* of seismo-electric conversion. When this seismic wave encounters an interface in which there is a change in medium parameters as the porosity, permeability or the ion concentration of the pore fluid an electromagnetic wave is generated. This EM wave has the frequency of the seismic wave that generates it. It is the *second type* of seismo-electric conversion.

Pride (1994) derived a set of coupled equations that describe the conversion of energy between the electromagnetic and acoustic wave fields. These equations have the form of Maxwell's equations coupled to Biot's equations. The coupling between the seismic and electromagnetic wave fields lies in a frequency dependent coupling coefficient. This set of equations is the result of volume averaging the continuum equations applied to the grains and pore fluid.

For a horizontally layered medium Ranada Shaw (2005) showed, that a vertical propagating acoustic wave field can be expressed in terms of their lateral variation and then decoupled into two independent sets of partial differential equations. These two sets are the P-SV-TM and the SH-TE case. The P-SV-TM coupling includes the interactions between the compressional, vertical shear (SV) and the TM (traverse magnetic) electromagnetic wave, while the SH-TE coupling includes the interactions between the horizontal shear (SH) and the TE (traverse electric)

electromagnetic waves. TM and TE refer to the polarisation of the magnetic and electric fields in the electromagnetic wave.

3 Petrophysical characterisation of the Bentheimer and Roman sandstone blocks

In the above section 2 the generation of streaming potential was described as a multi physics problem, in which the wanted permeability depends on several petrophysical parameters. Pride's paper describes a model for the coupling between the elasto-dynamic and electromagnetic wave fields. Many petrophysical parameters are involved in this coupling, which are listed below:

Table 1: *Parameters involved in the seismo-electric effect*

solid and fluid particle velocities
Porosity
the averaged bulk stress
fluid pressure
fluid, solid and bulk densities
fluid viscosity
dynamic permeability
Tortuosity
fluid and rock conductivity
electrical permittivity
zeta-potential

In order to extract the permeability from electro-kinetic logging it requires the knowledge of all these parameters. Therefore two sandstones of different origin, the Bentheimer and Roman sandstone block, were characterised in the laboratory to determine most of the petrophysical parameters of **Table 1**.

Core samples were obtained while drilling through the sandstone block and petrophysically characterised in the laboratory. The core measurements were carried out in the petrophysics lab of Geophysica GmbH (Stolberg).

A core logger from Geotek Ltd consisting of several devices provides the compressional wave velocity v_p and the bulk density ρ . The apparatus to measure the **acoustic velocities** consists of an ultrasonic transducer, which is energized by an electrical pulse. At the other end of the sample a transducer of the same type measures the travel time of the pulse, which is then converted into the appropriate acoustic velocity.

The interaction of γ -rays by Compton scattering is dependent only upon the number density of the scattering electrons. This in turn is directly proportional to the **bulk density** of the rock material. The device,

to measure the density, consists of a detector and a source of gamma rays whose primary mode of interaction is Compton scattering. The attenuation of the γ -rays is exploited for the determination of the bulk density ρ .

The **electrical resistivity** (Ωm) (conductivity S/m) of the rock samples is estimated by applying a standard four-electrode array. Power is supplied to the current electrodes attached to both ends of the sample. The voltage difference is picked up by copper wires wound around the sample. In order to avoid polarisation effects a low frequency current of 8.33Hz is supplied. Depending on the conductivity of the sample the current strength varies between 100nA and 10mA. The measurements are carried out with fluids of different conductivity. Plotting the bulk conductivity against fluid conductivity provides the formation factor.

A Gas Pycnometer provides reliable measurements of **rock matrix density**. This instrument is based on the principle of gas intrusion into pores. The device performs a fully-automated, non-destructive test. The Gas Pycnometer uses the ideal gas law to determine the volume of a sample, given a known volume of the sample chamber and gas reservoir and a change in pressure. An isolated chamber is floated with helium gas applying a pressure of 1.5-1.7 bar. The volume of the sample is then converted into the density if the weight of the sample is known. This instrument is also capable of measuring pore volume and pore volume distribution. The porosity is crosschecked by using an alternative way, i.e. the method of Archimedes.

Zeta potential measurements were made using a technique called micro-electrophoresis. A high quality stereoscopic microscope is used to comfortably observe colloidal particles inside a chamber called an **electrophoresis cell**. Electrodes placed in each end of the chamber are connected to the Zeta Meter unit which creates an electric field across the chamber. Charged colloids move in the field and their velocity and direction are related to their zeta potential. These measurements were made with a device from the University of Bonn.

The **hydraulic permeability** was measured using a commercial apparatus. Applying a constant pressure gradient across the sample the volume flow of an inertial gas (nitrogen) is measured and converted into permeability by Darcy's law.

The **formation factor** measurements were performed using an aqueous solution of sodium chloride as the pore solution because the conductivity of a few standard concentrations of this electrolyte are known to a high precision. A range of concentrations between 0.01 and 1mol were used. The specimens were first vacuum saturated with one of the NaCl electrolyte concentrations and then mounted.

Formation factor, F , is defined as

$$F = \frac{R_0}{R_w}$$

where R_0 is the resistivity of a formation fully saturated with water of resistivity R_w . It is related to formation porosity ϕ via a number of empirical relationships of the form

$$F = \frac{a}{\phi^m}$$

where m is the cementation exponent and a is sometimes called the Archie constant. **Figures 2 and 3** display the results of the conductivity of the fluid saturated rock samples versus the conductivity of the saturating fluid.

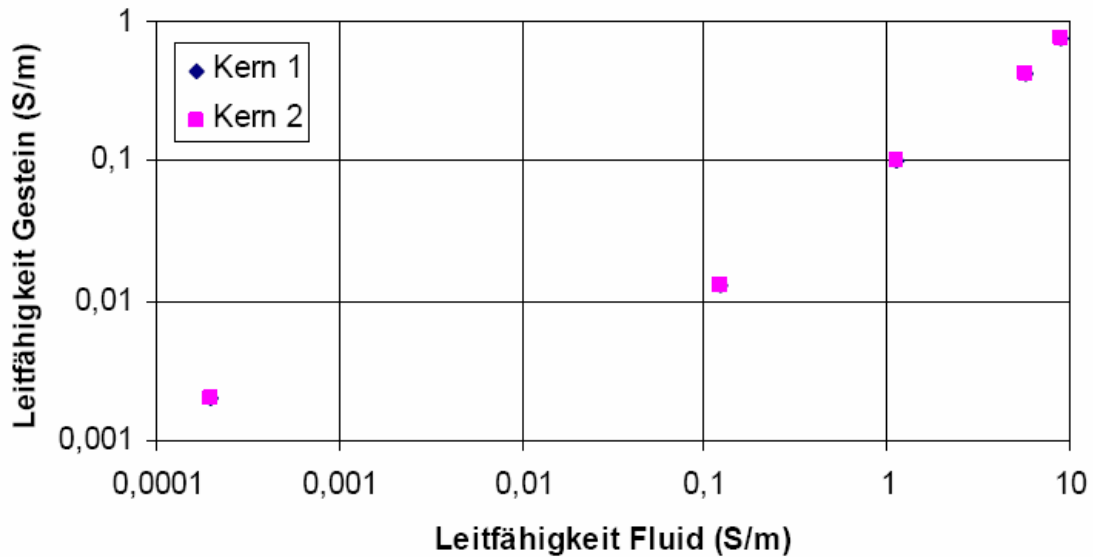


Figure 2: Bentheimer sandstone block: Electrical conductivity of the fluid-saturated sample versus fluid conductivity

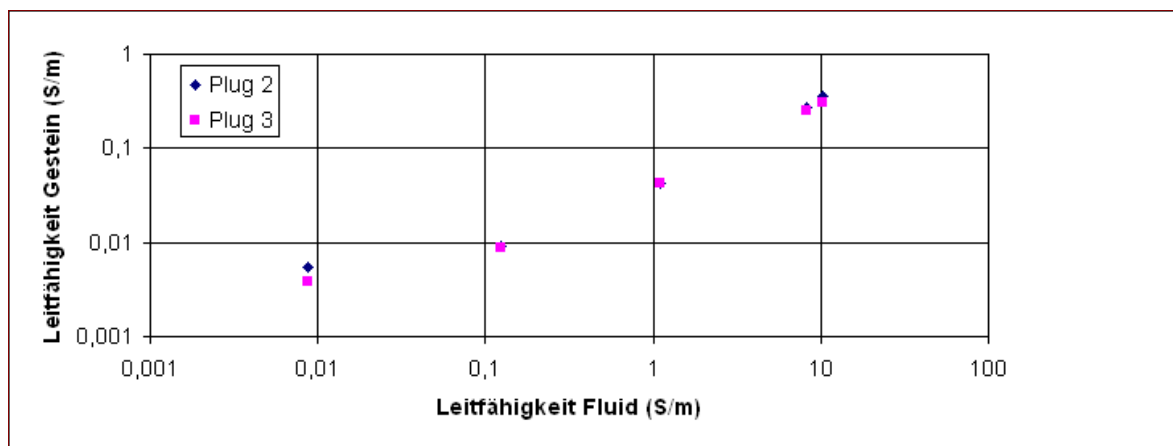


Figure 3: Roman sandstone block: Electrical conductivity of the fluid-saturated sample versus fluid conductivity

Rock samples from the two sandstone blocks were petrophysically characterised in the lab, which yielded following results (**Table 2**):

Table 2: Physical properties of two sandstone blocks

Physical properties	Bentheimer	Roman
<i>Weight/Height/Diameter</i>	1.5 tons / 1.1m / 0.7m	2.5tons / 1.8m / 0.7m
<i>Hydraulic permeability k_o (mDarcy)</i>	2250	6.25 parallel 2.33 perpendicular
<i>Porosity Φ (p.u.)</i>	25	15
<i>P-wave velocity (m/s)</i>	2100 (dry) 2550(saturated)	3300 parallel 3400 perpendicular
<i>ζ-Potential (mV) @ 30mS/m of aqu. solut.</i>	22	19
<i>Formation Factor F</i>	1 st sample: 11.9 2 nd sample: 11.8	1 st sample: 28.33 2 nd sample: 30.9
<i>Density (kg/m³)</i>	2000 (dry) 2250 (saturated)	2200 (dry) 2360 (saturated)

4 Electro-kinetic responses obtained from sandstone blocks

Electro-kinetic (EK) measurements were carried out in large sandstone blocks (**Figure 4**). A simple electrode dipole and hydrophones shown in **Figure 5a** were used to sense the electric field variations and the acoustic field, respectively (**Figure 5b**). The source was a short hollow steel tube held near the top of the borehole and hit on top with a hammer.



Figure 4: Roman sandstone (left) and Bentheimer sandstone (right). One (left) was wrapped round in a plastic foil, the other (right) was put in a container. Both were saturate with fresh water.

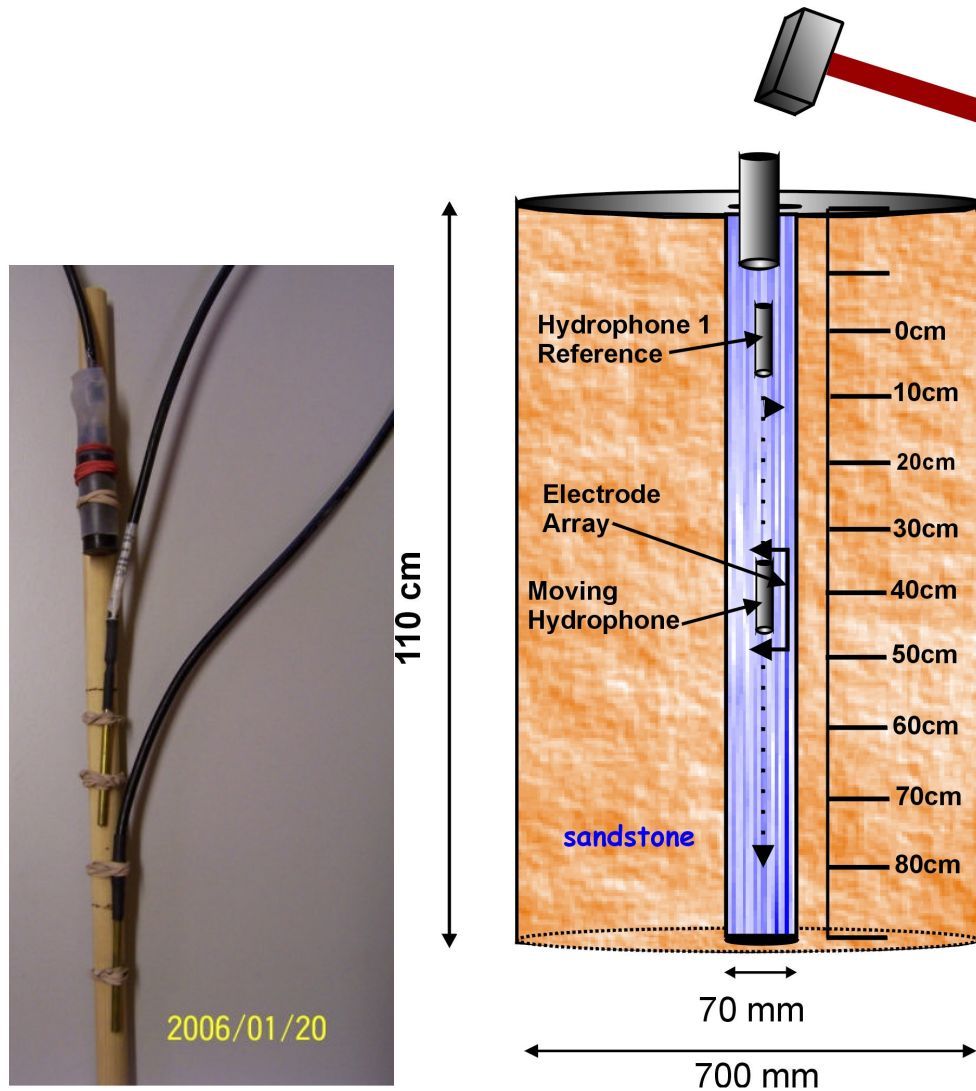


Figure 5a,b: Experimental setup

I first verified that the signals are originated in the sandstone by observing no signals when the borehole was screened with a metal or plastic tube. I also run a null test in a water filled container without a sandstone. Likewise no electric signals were observed which implies that the signals observed in the sandstone blocks are a result of electro-kinesis.

Figure 6 shows the waveforms from the Bentheimer, in which can be seen a low frequency pressure wave travelling down the block with a speed of 600m/s. This velocity is consistent with that of the Stoneley wave in these conditions, even though the sensors are at distances that are a fraction of a wavelength from the source. The high frequency signal travelling with this wave is caused by the source ringing with a period that can be related to the length of the metal tube. The EK waveform shows a signal travelling at the same velocity as the pressure wave. The average **normalised electro-kinetic factor** (NEF) is calculated as $2.49\mu\text{V}/\text{Pa}\cdot\text{m}$ with a spread of $\pm 0.74\mu\text{V}/\text{Pa}\cdot\text{m}$ between levels. Surprisingly, there are no reliable signs of the electromagnetic waves, also called initial burst. It may have been cancelled out across the dipole.

Using a finite element code (Pain et al., 2005) the response of the block was modelled using the measured water conductivity of 0.07S/m and the zeta potential given in **Table 2**. Source signature and magnitude are defined by the response at the upper hydrophone. The other fluid and matrix properties were calculated from the measured P-wave velocity, V_p , an estimated V_p/V_s ratio and from standard values for water and sandstone. A typical pair of waveforms from the model has been superimposed on the measured waveforms in **Figure 7**. The average model NEF is $2.01\mu\text{V}/\text{Pa}\cdot\text{m}$.

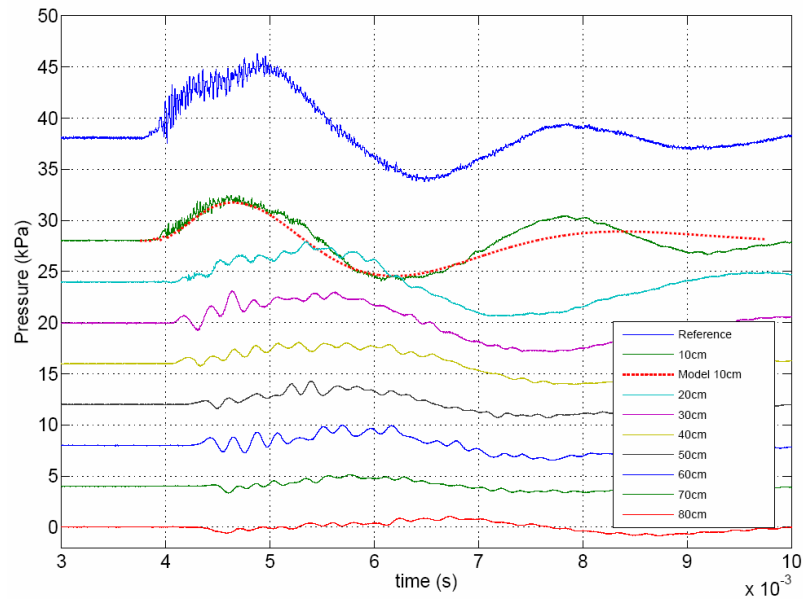


Figure 6: Pressure at the moving hydrophone at different positions in the Bentheimer sandstone. A low frequency and a high frequency wave can be seen. Superimposed are results from the model at 20cm.

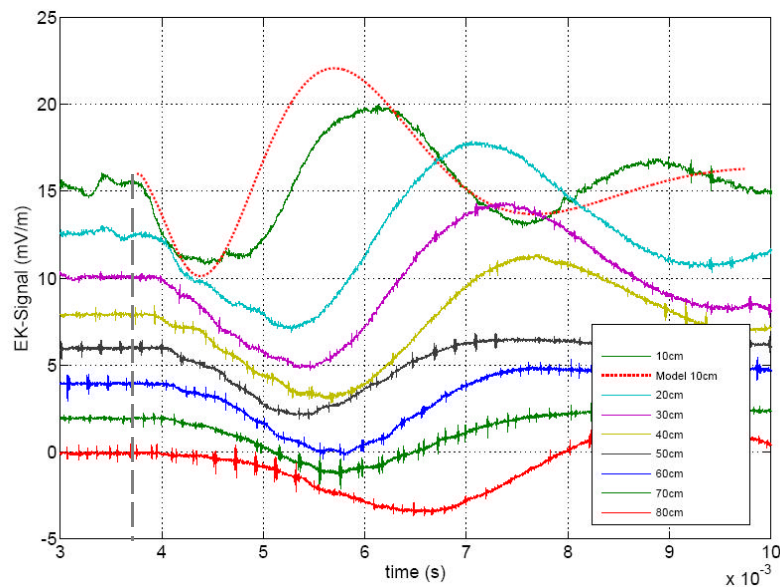


Figure 7: EK signal at the moving electric dipole at different positions in the Bentheimer sandstone. The vertical lines indicate the time at which pressure passes the reference hydrophone.

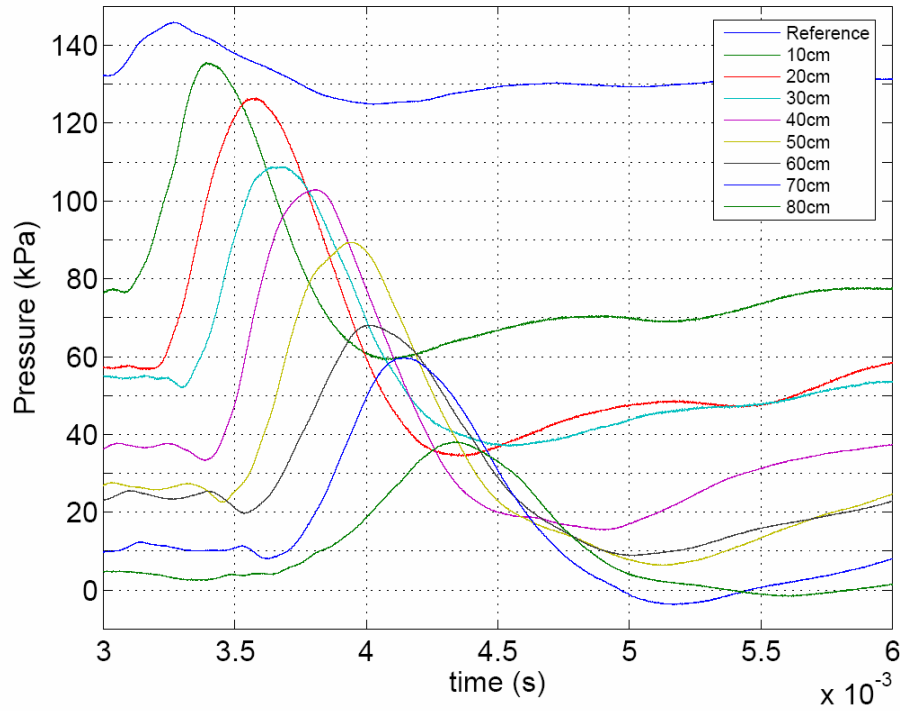


Figure 8: Pressure at the moving hydrophone at different positions in the Roman sandstone. A single wave at about 700Hz is observed.

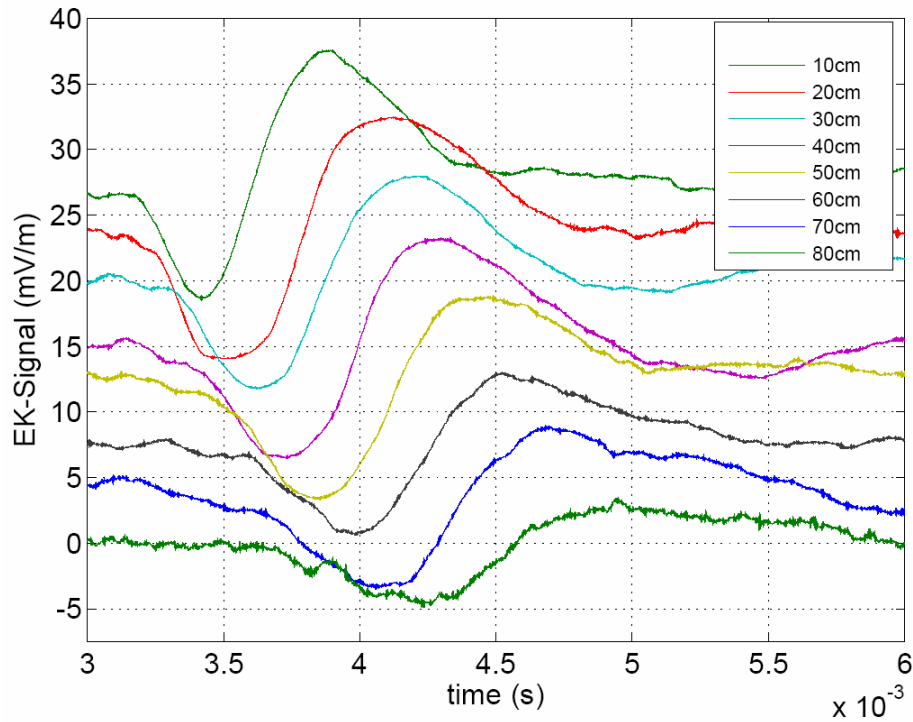


Figure 9: EK signal at different positions in the Roman sandstone.

Similar measurements were made in the Roman block, giving an average NEF of $0.16 \pm 0.02 \mu\text{V}/\text{Pa}\cdot\text{m}$ (**Figures 8, 9**). The results of all measured and modelled values are summarized in **Table 3**. The overall agreement shows that the model is able to predict the response of actual EK measurements with reasonable accuracy. The results also demonstrate

experimentally that NEF is a function of permeability. While not conclusive, it is unlikely that the large difference in NEF could be explained by the moderate difference in porosity between the two blocks.

Table 3: Summary of the measured and modeled results obtained in the two sandstone blocks.

		Bentheimer	Roman
ϕ	p.u.	24	15
K	mD	2200	6.25
ζ	mV @ 0.03S/m	21.4	19
NEF Measured	$\square V /$ Pa-m	2.49 +/-0.74	0.16 +/- 0.02
NEF Modeled	$\square V /$ Pa-m	2.01	0.5

According to Biot's theory porosity and permeability of rock formations can be derived from borehole electro-seismic measurements. Specifically, the porosity can be derived from the NEF and the permeability can be derived from the NEF versus the frequency of Stoneley wave induced electrical field. However, several petrophysical parameters must be known to estimate the porosity and permeability. Many of them, which are involved, are not directly accessible in situ such as tortuosity or zeta-potential. Both, porosity and permeability, are a linear function of these parameters. **Figure 10** displays a possible transform between NEF and permeability obtained from Lab observations (red) and from finite element modelling (blue) as well. Due to different input parameters both transforms are separated. The last one was used to estimate the permeability in limestones.

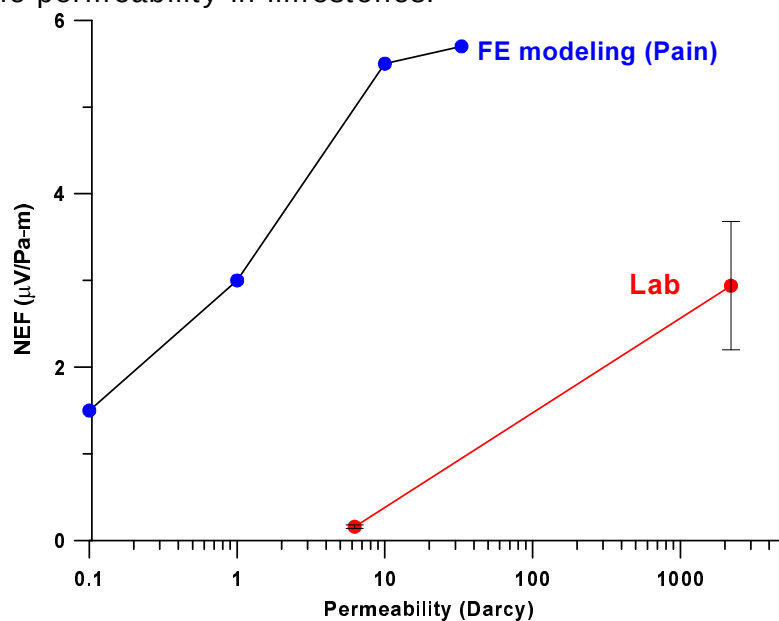


Figure 10: NEF vs. hydraulic permeability obtained from the Bentheimer and Roman sandstone block (red), and as used in the borehole experiment (blue)

5 Summary

Laboratory results from two sandstone blocks confirm experimentally that EK signals vary with permeability and that Stoneley induced electrical fields can be generated by a simple acoustic source. Results agree qualitatively with those predicted by the model and support the conclusion that NEF depends on permeability. The laboratory investigations suggest that the determination of the NEF has the potential to measure formation permeability.

Acknowledgements

I am grateful to G. Nover (Uni Bonn) for providing the zeta-potential of the two sandstone blocks, and to Geophysics GmbH, Stolberg, for providing the petrophysical data.

References

- Biot, M.A., 1956a. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low-Frequency Range, *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, 2, 168-178.
- Biot, M.A., 1956b. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. Higher Frequency Range, *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, 2, 179-191.
- Johnson, D.L., and Plona, T.J., 1982. Acoustic slow waves and the consolidation transition, *J. Acoust Soc America*, Vol. 72, No. 2, pp 556-565.
- Pain, C., Saunders, J., Worthington, M., Singer, J., Stuart-Bruges, W., Mason, G., and Goddard, A., 2005. A mixed finite element method for solving the poroelastic Biot equations with electrokinetic coupling. *Geophys. J. Int.*, 160, 2, 592-608.
- Pride, S.R., Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media, *Physical Review B*, 50, 21, pp 15678–15696
- Pride, S.R., and Morgan, F.D., 1991. Electrokinetic dissipation induced by seismic waves.
- Ranada Shaw, A., 2005. The seismo-electric method and its sensitivity to subsurface contrasts. PhD thesis, TU Delft

Umbau von MAGSON-Magnetometern und Kalibrierung mittels Rotation des Sensors im Erdfeld

E. Pulz, O. Ritter

GeoForschungsZentrum Potsdam, Telegrafenberg, D-14473 Potsdam, Germany

1. Einleitung

Zum Gerätepool des GFZ Potsdam gehören seit 1993 10 MAGSON 3 axial fluxgate Magnetometer (Abb. 1). Die Sensoren wurden mit großem Aufwand in der mechanischen Werkstatt des Geomagnetischen Observatoriums Niemegk des GFZ wasserdicht gemacht. Danach hatten sich die Sensoren im Feldeinsatz bewährt, die Elektronik dagegen nicht.



Abb. 1 MAGSON 3 axial fluxgate Magnetometer Baujahr 1993

Die Eckpunkte für die Entwicklung einer neuen Elektronik lauteten:

- Stromverbrauch $< 1.5\text{W}$ (Original ca. 3W)
- keine Bedienelemente (Strom anschließen fertig)
- Platinengröße $218 \times 94\text{ mm}^2$ (kompatibel zum Castle System)
- Bessere Eigenschaften gegenüber der Originalelektronik bzgl. Rauschen und Temperaturabhängigkeit
- Arbeitsbereich $\pm 60000\text{nT}$

2. Realisierung

Einfach zu realisieren war der Punkt, keine Bedienelemente, da der moderne 24bit ADC des Earthdataloggers (EDL) zum Einsatz kommen sollte. Es ist nun nicht mehr erforderlich, eine Feldkompensation vorzusehen.

Die Verbesserung der Eigenschaften konnte erreicht werden durch eine andere Art der Kernanregung. Es wird die so genannte ferroresonance excitation mode (FEM) in Anwendung gebracht (Berkman u.a.).

Der niedrige Stromverbrauch steht im krassen Gegensatz zur Vorgabe, geringes Rauschen und hohe Auflösung, erschwerend kam hinzu, daß keine Eingriffe am Sensor möglich waren. Die Leistungsaufnahme von 1W konnte nur erreicht werden, durch die Festlegung der Betriebsspannung auf $\pm 5V$.

Aus diesen Prämissen ergibt sich ein Skalenfaktor von 0.075mV/nT .

Die Leiterkartengröße $218 \times 94 \text{ mm}^2$ wurde entsprechend der „standardisierten“ Gehäuse des MT-Gerätepools gewählt und in SMD-Technik gefertigt (Abb2,3).

Die Abb. 4 zeigt einen Vergleich zwischen alter und neuer Elektronikeinheit.

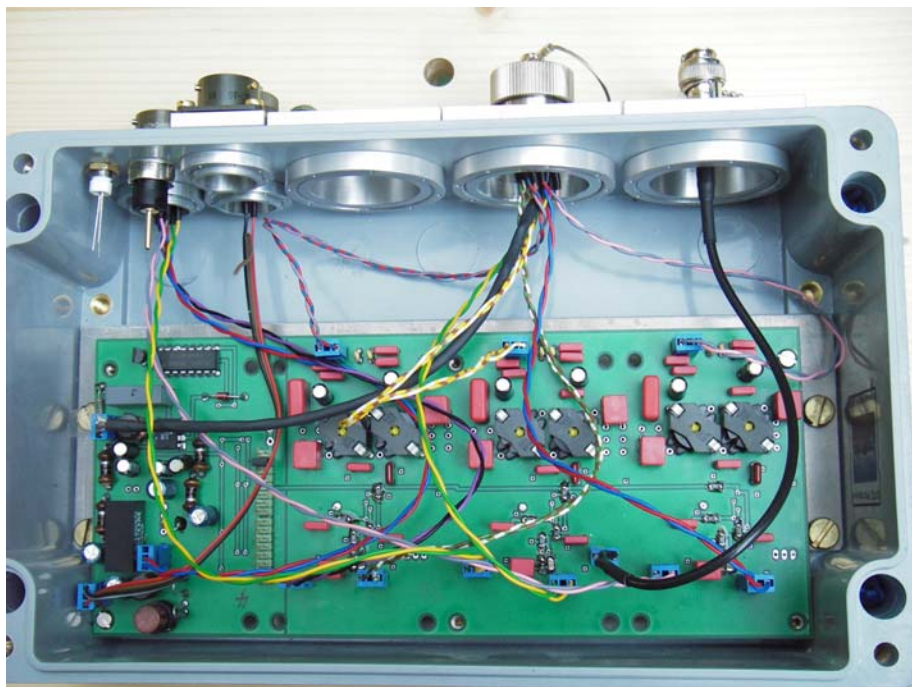


Abb. 2 Leiterkarte im Gehäuse



Abb. 3 Elektronik in Operation

Linke Buchse:	Ausgang Y, zur Sensororientierung
Weißes Kabel:	Sensoranschluss
Schwarzes Kabel:	EDL-Anschluß + Stromversorgung
Kleine Buchse unten:	separate Stromversorgung
Große Buchse oben u.	
andere Anschlüsse:	nicht belegt



Abb. 4 Vergleich alte/ neue Elektronik

3. Kalibrierung

Die „neuen“ fluxgate Magnetometer liefern die volle magnetische Flussdichte in jeder Komponente im Gegensatz zum Vorgängermodell, das nur die Variationen lieferte. Dieser Umstand erleichtert die Kalibrierung der Magnetometer.

AUSTER u. a. haben nachgewiesen, dass in diesem Fall eine Kalibrierung durch Drehung des Sensors im Magnetfeld möglich ist. Man braucht hierfür kein Spulensystem und es ist keine aufwendige Justierung erforderlich. Man muss lediglich dafür sorgen, dass die Drehachse nicht mit der Richtung des magnetischen Feldvektors übereinstimmt. Eine weitere Voraussetzung ist eine hinreichende Feldhomogenität. Zusätzlich benötigt man ein Skalar-Magnetometer, das die Flussdichte am Ort der Drehung liefert. Um Fehler auszuschließen, wurde eine Iteration angewandt, die zwei Rotationsachsen verlangt mit jeweils 12 Stellungen des Sensors.

Als Resultat erhält man die Skalierungsfaktoren für alle 3 Komponenten, die Nullpunktfehler und die Orthogonalitätsfehler.

3.1. Physikalische Grundlagen der Kalibrierung

Man transformiert mit Hilfe der Euler'schen Gleichungen den herrschenden Magnetfeldvektor in das 3-dimensionale orthogonale Koordinatensystem des zu kalibrierenden Magnetometers.

$$\vec{B}_R = \vec{R} \times \vec{B}$$

B_R Magnetfeld im Magnetometersystem

R Rotationsmatrix

B Magnetfeldvektor

Die Einführung von Fehlergruppen O für Orthogonalität

Sk für Skalenwert

N für Nullpunktfehler

führt zu folgender Gleichung:

$$\vec{B}_{RN} = O \times Sk \times R \times B + N$$

Weiterhin muss gelten:

$$|\vec{B}_{RN}|^2 = |\vec{B}_R|^2 = |\vec{B}|^2$$

Während der Iteration wird demnach der mit Hilfe der Fehlermatrizen berechnete Feldbetrag B_{RN} mit dem tatsächlichen Betrag des Magnetfeldes verglichen. Die Kenntnis der Matrix R ist dabei nicht erforderlich. (D. h. man braucht die Rotationswinkel nicht zu kennen.)

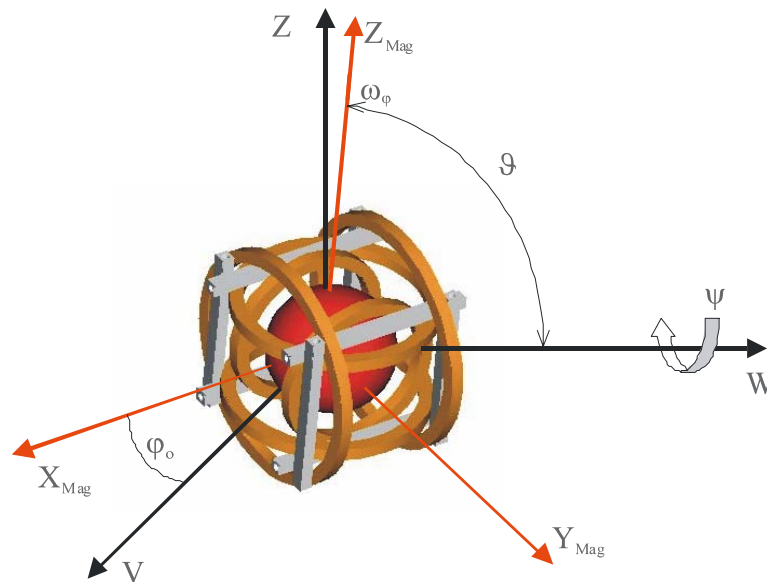
Warum? Benutzt man die Messergebnisse von 3 verschiedenen Positionen einer Drehachse für die Feldberechnung in einem neuen Koordinatensystem, dem Rotationssystem, so kann man zeigen, dass die Winkelmatrix eine Einheitsmatrix ist:

Die magn. Flussdichte in Richtung der Rotationsachse W ist:

$$B_w = B_{MagX} \cdot \sin \phi_0 \cdot \sin \delta_0 + B_{MagY} \cdot \cos \phi_0 \cdot \sin \delta_0 + B_{MagZ} \cdot \cos \delta_0$$

B_w hängt nicht vom Rotationswinkel ψ ab.

Benutzt man drei Messungen zur Bestimmung der magn. Flussdichte:



$$\begin{aligned} B_w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{Mag\ x1} & B_{Mag\ y1} & B_{Mag\ z1} \\ B_{Mag\ x2} & B_{Mag\ y2} & B_{Mag\ z2} \\ B_{Mag\ x3} & B_{Mag\ y3} & B_{Mag\ z3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0 \\ \cos \varphi_0 \sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta_0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{MB}_{Mag} * \hat{\mathbf{n}}(\varphi_0, \vartheta_0) \end{aligned}$$

Berechnet man den Betrag des Vektors B_w , stellt man fest, dass die Matrix mit den Winkeln gleich 1 ist.

D. h. man braucht die Positionswinkel des Sensors nicht zu kennen.

3.2 Kalibriervorgang

Der Sensor wird in eine Vorrichtung (Abb. 5) gespannt und um die Rotationsachse in 6 Positionen (ca. alle 60°) gedreht und in jeder Stellung werden die Flussdichten der Komponenten gespeichert. Parallel dazu werden die F- Messwerte mit einem Skalar-magnetometer registriert. Dann wird der Sensor um seine eigne Achse gedreht und der Vorgang wiederholt.

Das ganze wird in einer zweiten Richtung der Rotationsachse wiederholt, so dass insgesamt 24 Sensorstellungen zur Auswertung kommen.

Die Vorrichtung erlaubt die Rotation in zwei orthogonalen Richtungen. Die Fixierung in 60° Positionen erfolgt mit Holzstöpseln. Eine Drehung des Sensors um die eigene Achse ist zusätzlich möglich. In Tab. 1 findet man als Beispiel das Resultat der Kalibrierung eines der umgebauten Magnetometer.

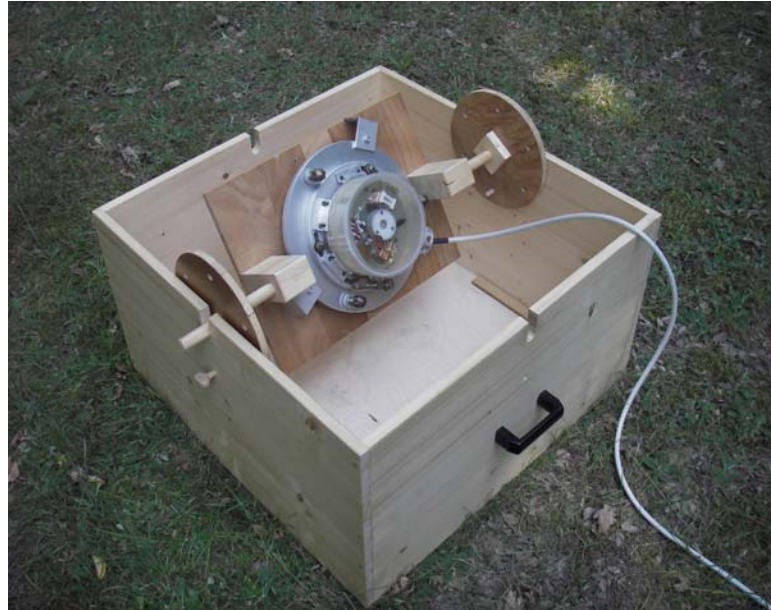


Abb.5 Kalibriervorrichtung

Komponente	X	Y	Z
Offset [nT]	6.2	-4.2	1.9
Skalenfaktor	1.019	0.993	1.001
Orthogonalitätsfehler (normiert)	-0.003	0.011	0.001
Skalenfaktor mit Spule ermittelt	1.009	0.99	0.996

Tab. 1 Kalibrierung MAG 07

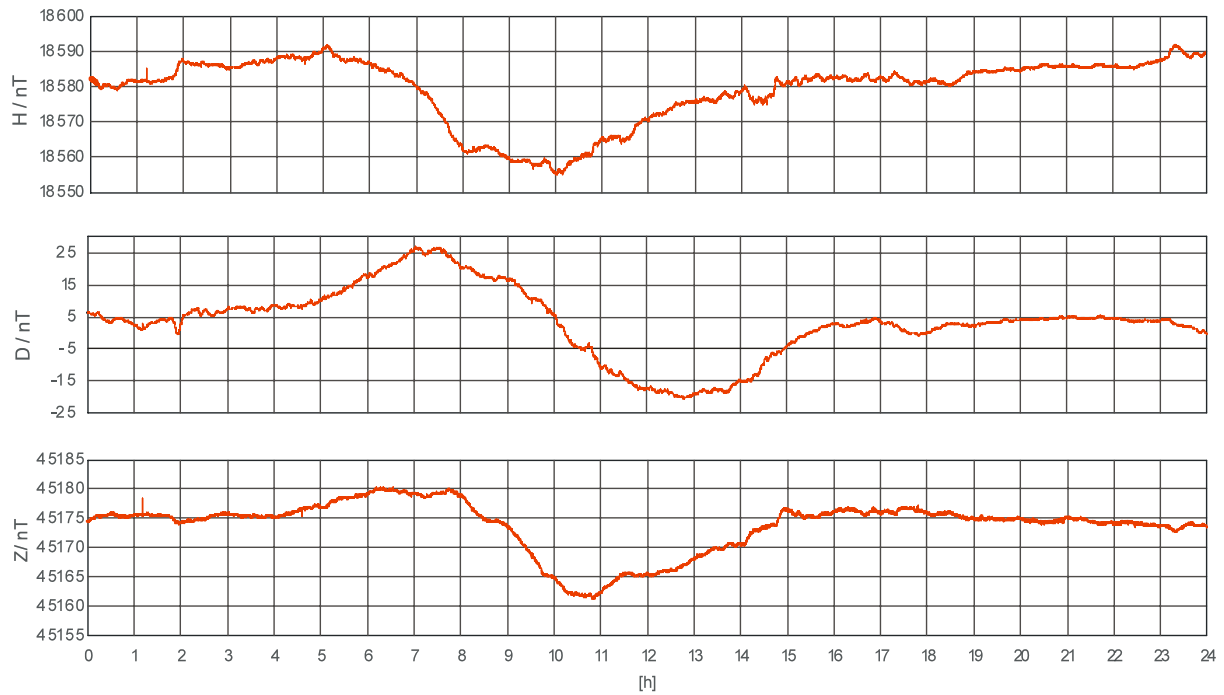
4. Zusammenfassung

Die im Observatorium Niemegek neu entwickelte Ansteuerungselektronik für Fluxgate Magnetometer ermöglicht einen rauscharmen Betrieb bei niedrigem Stromverbrauch (1W). Das neue Gehäuse ist wasserdicht und benötigt keine externen Bedienelemente mehr. Nach Anschluss des Sensorkabels und des EDL-Kabels ist das Magnetometer einsatzbereit. (Stromversorgung erfolgt über das EDL-Kabel, aber auch separat möglich). Die Ausrichtung des Sensors erfolgt mit Hilfe eines Voltmeters, das an die BNC-Buchse (links) angeschlossen wird. Die Geräte haben sich während zweier Expeditionen bewährt. Eine Registrierung über 24 Stunden und ein Vergleich zum LEMI (ebenfalls ein Magnetometer aus dem GFZ-Gerätepool) findet man in Abb. 6. Die Elektronik kommt mittlerer Weile auch an Sensoren anderer Hersteller zum Einsatz. Die Anregungsfrequenz kann man einfach verändern.

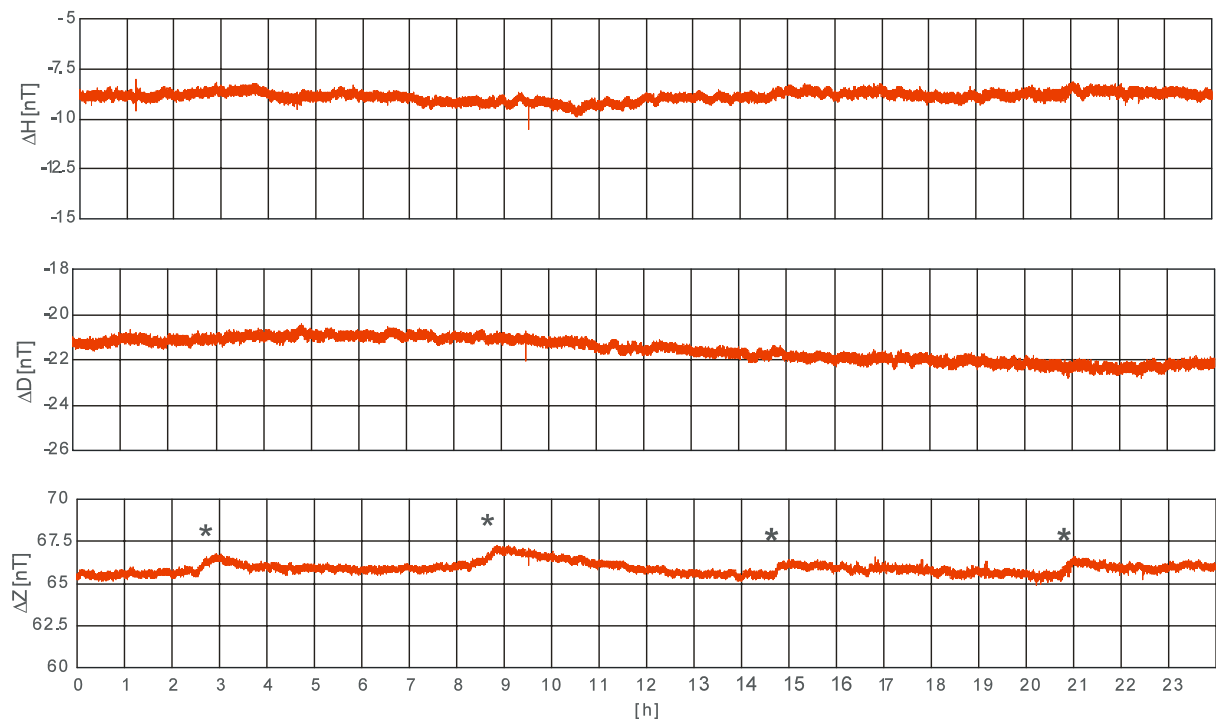
5. Literatur

R. Berkman, B. Bondaruk, V. Korepanov
Advanced Flux-gate Magnetometers with Low Drift
XIV IMECO World Congress 1997 Tampere June pp 121-6

H.U. Auster, K.H. Fornacon, E. Georgescu, K.H. Glassmeier and U. Motschmann
Calibration of flux-gate magnetometers using relative motion
Meas. Sci. Technol. 13 (2002) 1124-1131



a)



* Ursache EDL, Speichervorgang auf Festplatte

b)

Abb. 6 a) Registrierung mit MAG07/ EDL am 21.09.2005 Abtastrate 10 samples/ sec (Darstellung ohne jegliche Filterung)
b) Mag07 (EDL 3 Kanal) –LEMI09 (EDL 6 Kanal) am 21.09.2005 Abtastrate 10 samples/ sec

Numerische Simulation einer Permittivitätssonde zur Messung der elektrischen Eigenschaften planetarer Regolithe

M. Panzner¹, F. Sohl², K. Spitzer¹

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat die simulationstechnische Begleitung einer Sondenentwicklung zur Messung der elektrischen Eigenschaften - Leitfähigkeit und Dielektrizitätszahl - planetarer Regolithe (Mars, Mond, Merkur) zum Inhalt. Die hardwaretechnische Entwicklung wird von der Europäischen Raumagentur ESA und dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt DLR durchgeführt. In einem ersten Ansatz konnten wir ein Finite-Elemente-Simulationsprogramm auf der Basis von unstrukturierten, adaptiven Dreiecksgittern für beliebige zweidimensionale axialsymmetrische Verteilungen der Leitfähigkeit und Dielektrizität entwickeln, das die Sondengeometrie beinhaltet und den gewählten quasistatischen Ansatz im Frequenzbereich von 10^2 Hz bis 10^6 Hz für elektrische Leitfähigkeiten $< 10^2$ S/m validiert. Mögliche induktive Effekte finden in der Simulation volle Berücksichtigung. Als nachvollziehbares Beispiel einer heterogenen Verteilung der elektrischen Größen wird eine vertikale Sondenfahrt durch eine eingelagerte Schicht simuliert. Abschließend werden im Hinblick auf eine zukünftige Dateninversion räumliche Verteilungen der komplexen Sensitivität vorgestellt.

Einleitung

Kürzlich wurde von der japanischen Raumsonde Hayabusa erstmals eine Bodenprobe an der Oberfläche eines nur wenige hundert Meter großen Kleinplaneten entnommen, die zur weiteren Analyse im Jahr 2007 unversehrt an der Erdoberfläche abgesetzt werden soll. Während die oberflächennahen Schichten von Mars und Erdmond, welche hauptsächlich aus porösem, unverfestigtem Material (Regolith) bestehen, bereits in der Vergangenheit mit Hilfe stationärer und mobiler Landegeräte näher untersucht werden konnten (?), stehen derartige Erkundungen für den sonnennächsten Planeten Merkur noch aus. Nicht zuletzt aufgrund möglicher astrobiologischer Fragestellungen wird hierbei der Suche nach flüchtigen Bestandteilen (Wasser, Eis, Klathrate) im Untergrund erhebliches Interesse beigemessen. Die vergleichende Betrachtung planetarer Regolithe, die von unterschiedlich beschaffenen Körpern stammen, trägt darüber hinaus zu einem besseren Verständnis der frühen Entwicklung des inneren Sonnensystems bei.

¹Institut für Geophysik - TU Bergakademie Freiberg, Gustav-Zeuner-Str. 12, 09596 Freiberg, Email: klaus.spitzer@geophysik.tu-freiberg.de

²Institut für Planetenforschung - Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Rutherfordstrasse 2, D-12489 Berlin, Email: Frank.Sohl@dlr.de

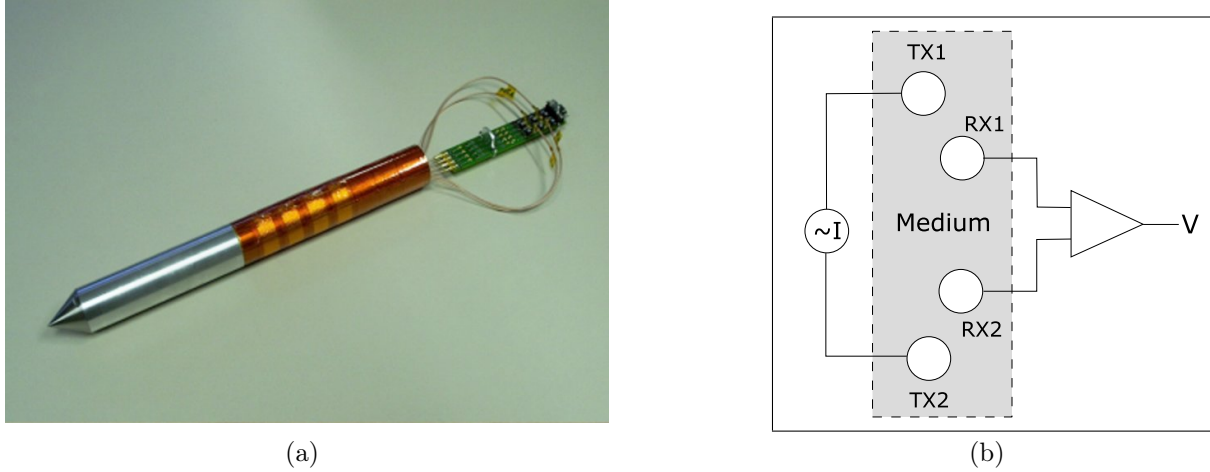


Abbildung 1: a) Prototyp einer Permittivitätssonde nach Hamelin et al. (2003)
b) Prinzipskizze der Messsonde. Das System besteht aus einem Sendeelektrodenpaar TX mit Stromgenerator und einem Messelektrodenpaar RX mit einer Messbrücke zur Bestimmung des Potentials in Betrag und Phase.

Die chemischen und physikalischen Eigenschaften planetarer Lockermaterialien (Ksanformali, 2001) wirken sich in besonders charakteristischer Weise auf die Messungen der komplexen Leitfähigkeit $\tilde{\sigma}$ im Frequenzbereich aus, die von der elektrischen Leitfähigkeit und der dielektrischen Polarisierbarkeit des Materials kontrolliert wird. Von Trautner und Grard (2002) wurde eine Sonde (Abb. 1(a)) zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit σ und der relativen Permittivität ε_r vorgestellt, die durch einen Schlagmechanismus in den Boden getrieben wird (Mole). Numerische Simulationen sollen nun die Entwicklung begleiten und Experimente, die bisher maßgeblich im Labor ausgeführt wurden, synthetisch erweitern.

Die Messkonfiguration entspricht einer klassischen Wenner-Vierpolanordnung (Abb. 1(b)). Über das äußere Sendeelektrodenpaar (TX) wird ein Wechselstrom kapazitiv in das die Sonde umgebende Medium eingespeist. Mit den beiden inneren Messelektroden (RX) wird das durch den Strom hervorgerufene elektrische Potential in Betrag und Phase gemessen. Für die Auswertung der Messung wird die quasistatische Näherung vorausgesetzt. Mit dem erweiterten Ohmschen Gesetz $\vec{j} = (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) \nabla V$, wobei $\vec{j}$ die Stromdichte, ω die Kreisfrequenz, ε_0 die Dielektrizitätskonstante, V das elektrische Potential und i die imaginäre Einheit darstellen, erhält man die scheinbaren Größen

$$\varepsilon_r^a = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} \cos(\phi_0 - \phi) \quad (1)$$

$$\sigma^a = -\frac{\Delta V_0}{\Delta V} \omega \varepsilon_0 \sin(\phi_0 - \phi), \quad (2)$$

wobei ΔV_0 für die Potentialdifferenz zwischen den beiden Messelektroden und ϕ_0 für die Phase stehen, wenn sich die Sonde für eine Referenzmessung im Vakuum befindet. ΔV und ϕ sind Potentialdifferenz und Phase für eine Messung in einem leitfähigen dielektrischen Medium.

Grundlagen der numerische Simulation

Mit Hilfe der numerischen Simulation können das Hardware- und Experimentaldesign optimiert und die physikalischen Phänomene im Bereich der Sonde untersucht werden. So ist es notwendig, den Gültigkeitsbereich des quasistatischen Ansatzes für die Auswertung der Messung zu überprüfen. Bei bestimmten Kombinationen von Frequenz- und Leitfähigkeit können induktive Effekte auftreten, die diese Voraussetzungen verletzen und das Messergebnis verfälschen. Ebenso gilt es, den Einfluss der extrem leitfähigen Sondenelektroden auf das elektrische/elektromagnetische Feld im Umfeld der Sonde zu untersuchen. Des weiteren können hardwarespezifische Größen wie Auflösungsvermögen, Eindringtiefe, Sensitivität gegenüber Parameteränderungen und der Einfluss der Ankopplung der Sonde an das umgebende Medium ermittelt und analysiert werden.

In einem ersten Ansatz haben wir ein kommerzielles Entwicklungspaket für Finite-Elemente-Formulierungen (Femlab/Matlab) verwendet und ein 2D-axialsymmetrisches Modell erstellt, welches die Geometrie der Permittivitätssonde beinhaltet. Die der Finite-Elemente-Modellierung zu Grunde liegenden Differentialgleichungen wurden so gewählt, dass induktive Effekte berücksichtigt werden. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ werden über das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ und das elektrische Skalarpotential V formuliert:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4)$$

Um die Ausbreitung von niederfrequenten elektromagnetischen Feldern in einem quellenfreien und leitfähigen polarisierbaren Medium vollständig zu beschreiben, müssen die um den Verschiebungsstrom erweiterte Kontinuitätsgleichung (5) und das Ampèresche Gesetz (6) erfüllt sein. Im Frequenzbereich gilt somit außerhalb der Quellen:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 = \nabla \cdot [(\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) \nabla V] \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} = (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) \nabla V, \quad (6)$$

wobei $\vec{H}$ die magnetische Feldstärke, μ_0 die Induktionskonstante und μ_r die relative magnetische Permeabilität sind. Durch Einsetzen der Gleichungen (3) und (4) in die Gleichungen (5) und (6) kann mit $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$ ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem abgeleitet werden:

$$-\nabla \cdot \left[(i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r) \vec{A} + (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) \nabla V \right] = 0 \quad (7)$$

$$(i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r) \vec{A} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0\mu_r} \nabla \times \vec{A} \right) + (\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) \nabla V = 0, \quad (8)$$

welches die Grundlage für die Finite-Elemente-Formulierung darstellt. Um die Eindeutigkeit der Lösung dieses Differentialgleichungssystems zu gewährleisten, wird eine Coulomb Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ vorgenommen. Gleichung (7) wird mit einer skalaren Testfunktion

γ und Gleichung (8) mit einer vektoriellen Testfunktion $\vec{\tau}$ multipliziert. Durch anschließende Integration über das Gebiet Ω erhält man die so genannte Schwache Form des Finite-Elemente-Ansatzes. Mit $\tilde{\sigma} = \sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$ und $\mu = \mu_0\mu_r$ lautet diese:

$$\int_{\Omega} \nabla \gamma \cdot (i\omega \tilde{\sigma} \vec{A} + \tilde{\sigma} \nabla V) d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma \vec{j}_n \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \vec{\tau} \cdot [i\omega \tilde{\sigma} \vec{A} + \tilde{\sigma} \nabla V] d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{\tau} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{\tau} \cdot \left[\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \right] d\vec{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

Gesucht sind die Lösungen V und $\vec{A}$, so dass die Gleichungen (9) und (10) für alle Testfunktionen γ und $\vec{\tau}$ erfüllt sind. Die Integrale über den Rand Γ des Gebietes Ω in den Gleichungen (9) und (10) werden über die natürlichen Randbedingungen für die Normalkomponente der elektrischen Stromdichte $\vec{j}_n = \tilde{\sigma} \partial_n V + i\omega \tilde{\sigma} \vec{A}$ und die Tangentialkomponente des Magnetfeldes $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right)$ definiert, wobei $\vec{n}$ die nach außen gerichtete Flächennormale auf dem Rand ist.

Mit dem Übergang zu endlichdimensionalen Funktionenräumen für die Ansatz- und Testfunktionen folgt aus den Gleichungen (9) und (10) nach der Methode der Finiten-Elemente (Jin, 1993) ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Größen V und $\vec{A}$ enthält.

Die Quellströme werden über inhomogene Neumann-Randbedingungen für das elektrische Potential an den Rändern der Stromelektroden (TX) vorgegeben. Durch Verwendung von gemischten Randbedingungen für das elektrische Potential und das magnetische Vektorpotential an den äußeren Rändern konnte deren Einfluss auf das Modellierungsergebnis wesentlich reduziert werden.

Im Kontaktbereich der Sondenelektroden existieren sehr hohe Leitfähigkeitskontraste, die dort große Gradienten im elektrischen Potential erzeugen. Um trotzdem eine möglichst genaue numerische Lösung für das elektrische Potential in diesem Bereich zu erhalten, wurde das unstrukturierte Dreiecksgitter in der Nähe der Elektroden adaptiv stark verfeinert (Abb. 2). Der Modellbereich um die Elektroden ist von besonderem Interesse, da für die Simulation einer Messung das Potential an den Messelektroden (RX) abgefragt wird.

Wie in Abbildung 3(b) dargestellt, zeigen die Simulationsergebnisse für das Modell eines vertikalen elektrischen Dipols (VED) gute Übereinstimmung mit den dafür existierenden analytischen Lösungen in homogenen Medien (Telford, 1990) (Abb. 3(a)).

Ergebnisse

Im Frequenzbereich von $10^2 \text{ Hz} < f < 10^6 \text{ Hz}$ konnte für eine beliebige heterogene Parameterverteilung eine stabile Modellantwort berechnet werden. Für Frequenzen $f < 10^2 \text{ Hz}$ ist

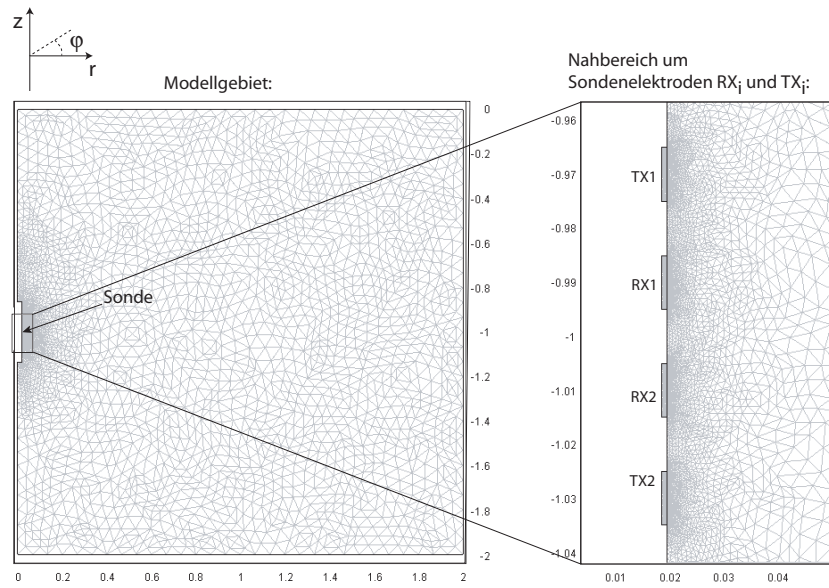


Abbildung 2: Diskretisierung des Modellgebietes. Im Bereich der Sondenelektroden wurde das Gitter adaptiv stark verfeinert.

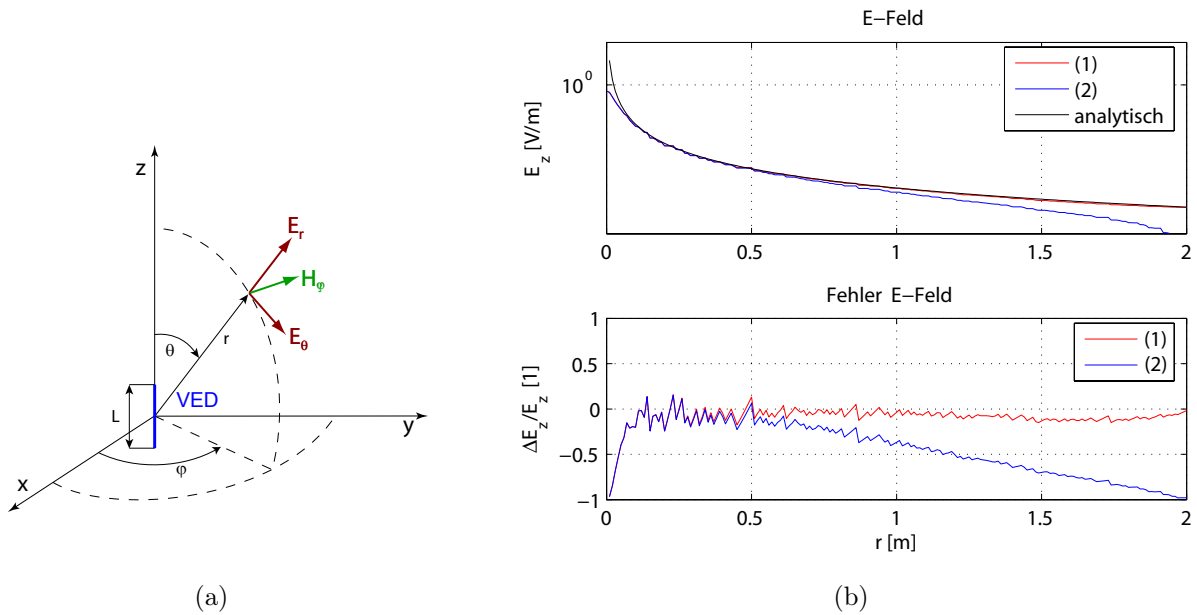


Abbildung 3: a) Schematische Darstellung eines VED b) Darstellung der z-Komponente des elektrischen Feldes $\vec{E}_z$ in der Äquatorialebene als Funktion des Abstandes r zum Dipolmittelpunkt für (1) gemischte Randbedingungen und (2) Dirichlet Randbedingungen. Durch Implementation von gemischten Randbedingungen erhält man höhere Genauigkeiten bis zum Rand. Abweichungen treten lediglich in der Nähe der Singularität auf.

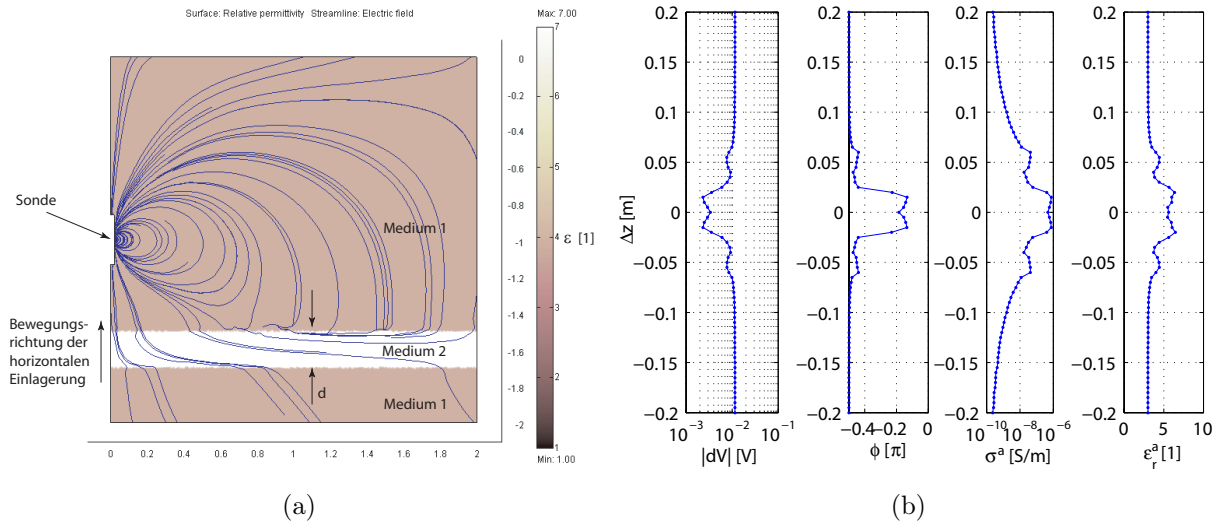


Abbildung 4: a) Simulation einer Sondenfahrt durch ein Modell mit einer eingelagerten Schicht abweichender elektrischer Parameter. Die Position dieser Schicht wird in z -Richtung variiert. b) Darstellung von Potentialdifferenz ΔV und Phase ϕ zwischen den Messelektroden RX für verschiedene Positionen Δz eines Horizontes der Dicke d relativ zur Sondenmitte; Modellvorgaben: Medium 1: $\sigma = 10^{-10}$ S/m, $\epsilon_r = 4$; Medium 2: $\sigma = 10^{-6}$ S/m, $\epsilon_r = 7$, $d = 0.05$ m

das Problem schlecht konditioniert und nicht mehr numerisch stabil lösbar. Bei Frequenzen $f > 10^6$ Hz verliert der hier verwendete Ansatz seine Gültigkeit, da Wellenphänomene die Ausbreitung der elektromagnetischen Felder dominieren.

Der quasistatische Ansatz (Gl. 1 - 2) für die Auswertung der Messung wurde für Leitfähigkeiten $\sigma < 10^{-2}$ S/m validiert. Im betrachteten Frequenzbereich von 10^2 Hz $< f < 10^6$ Hz gilt das Prinzip der kleinen Induktionszahlen B (Benderitter et al., 1994), wonach induktive Effekte für $B \ll 1$ vernachlässigbar klein sind. Die Induktionszahl $B = L/\tau$ ist über die Skalenlänge der Messung L und die elektromagnetische Eindringtiefe τ definiert.

Für die Bestimmung von geschichteten Einlagerungen aus den während einer Sondenfahrt gesammelten Messdaten ist es unbedingt notwendig, die Signatur einer solchen horizontalen Einlagerung zu kennen. Dazu wurde eine vertikale Sondenfahrt simuliert und ein synthetisches Messprofil aufgezeichnet (die linken beiden Subplots in Abb. 4(b)). Um den Einfluss der Ränder auf das Simulationsergebnis zu minimieren, bleibt die Sonde fest in der Mitte des Modells und die Position des Horizontes mit abweichenden elektrischen Parametern wird relativ zur Sonde verändert (Abb. 4(a)). Den rechten beiden Subplots der Abbildung 4(b) ist zu entnehmen, dass die Bestimmung von ϵ_r^a und σ^a nach Gl. (1) und (2) hinreichend gut gelingt. Eine Auflösungsstudie hat darüber hinaus gezeigt, dass Schichten der Dicke $d > 2$ cm mit der Sonde nach Hamelin et al. (2003) gut aufgelöst werden können (ohne Abb.).

Die Berechnung der Sensitivitäten über die Perturbationsmethode (Abb. 5 - 6) zeigt, dass die Wirktiefe, d.h. der Modellbereich, der das Messsignal maßgeblich beeinflusst, in

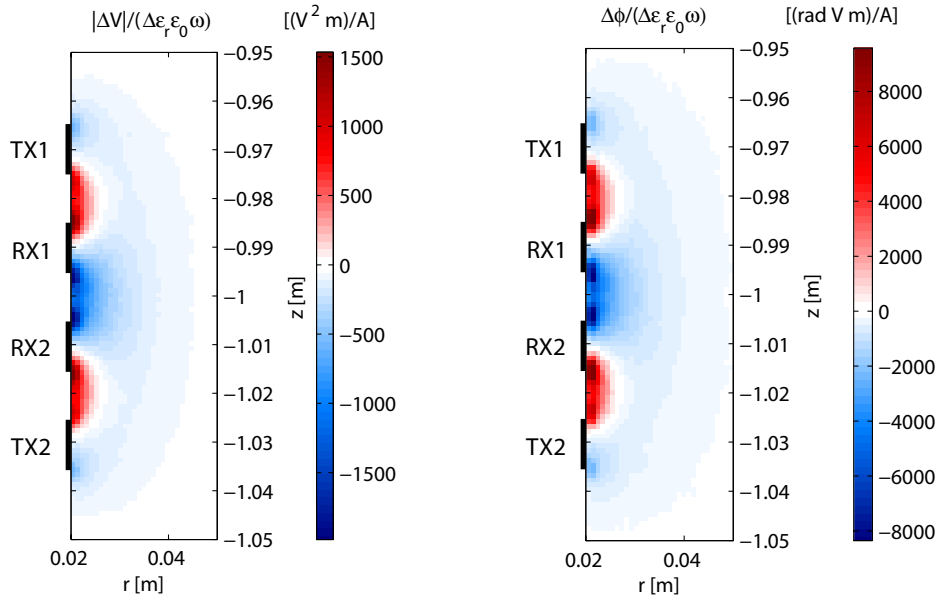


Abbildung 5: Darstellung der Sensitivitäten des Betrages $|\Delta V|$ und der Phase ϕ des Messsignals gegenüber Änderungen der relativen Permittivitätszahl ε_r bei $f = 1 \text{ kHz}$; Modellhintergrund: $\sigma = 10^{-8} \text{ S/m}$ und $\varepsilon_r = 4$. Der jeweilige Modellparameter wurde lokal um $\delta = 5\%$ geändert.

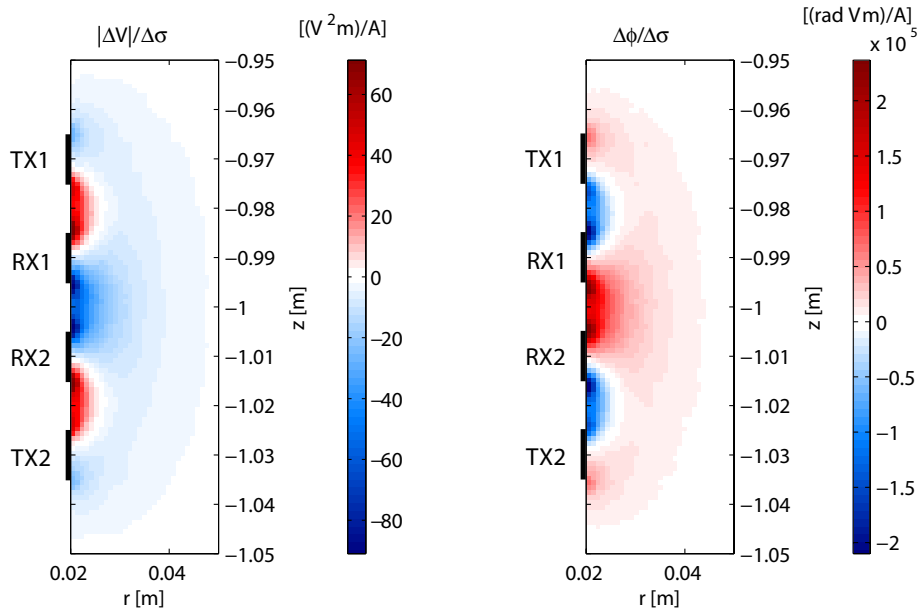


Abbildung 6: Darstellung der Sensitivitäten des Betrages $|\Delta V|$ und der Phase ϕ des Messsignals gegenüber Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit $\Delta\sigma$ bei $f = 1 \text{ kHz}$; Modellhintergrund: $\sigma = 10^{-8} \text{ S/m}$ und $\varepsilon_r = 4$. Der jeweilige Modellparameter wurde lokal um $\delta = 5\%$ geändert.

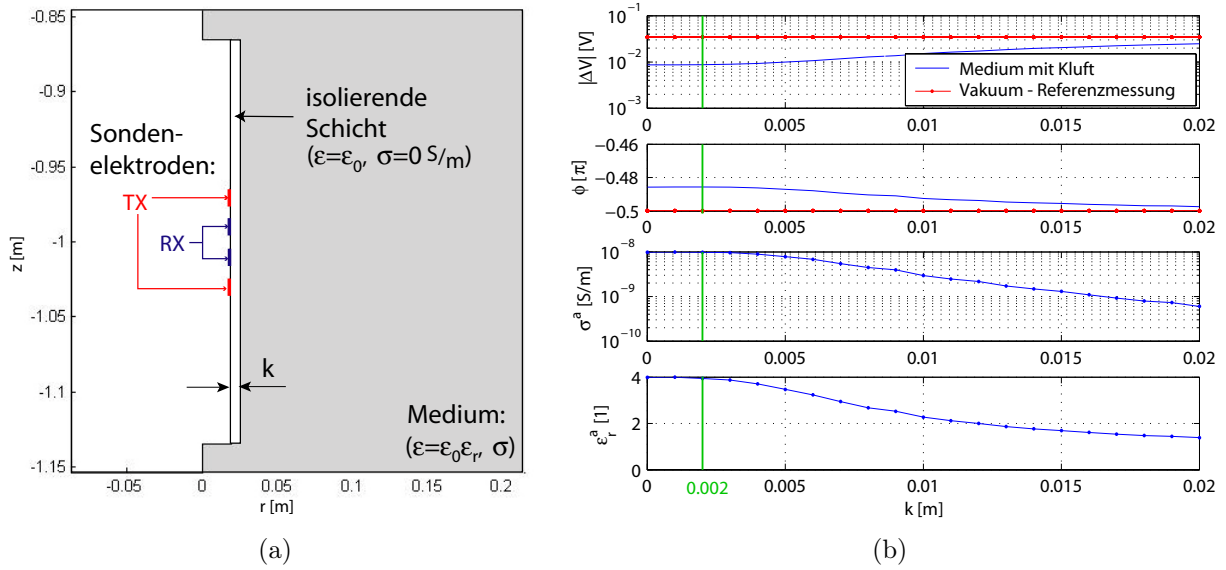


Abbildung 7: a) Die Sonde wird durch eine Kluft der Breite k vom umgebenden Medium getrennt. b) Darstellung der Simulationsergebnisse für Potentialdifferenz zwischen den RX-Elektroden $|\Delta V|$ und Phase ϕ sowie daraus abgeleitete Parameter ϵ_r^a und σ^a als Funktion der Kluftbreite k zwischen Sonde und Medium. Bei $k < 2 \text{ mm}$ sind die Fehler bei der Bestimmung von ϵ_r^a und σ^a kleiner 2%. Modellvorgaben: $\sigma = 10^{-8} \text{ S/m}$, $\epsilon_r = 4$.

etwa dem Abstand der Messelektroden entspricht. Die Beträge der ermittelten Sensitivitäten zeigen deutlich, dass der Betrag der zwischen den Messelektroden (RX) messbaren Spannungsdifferenz ΔV maßgeblich von der relativen Permittivität des umgebenden Mediums beeinflusst wird, während der Phasenwinkel ϕ des Messsignals sehr sensitiv für Variationen in der elektrischen Leitfähigkeit ist.

Eine schmale räumliche Kluft (Abb. 7(a)) mit den elektrischen Eigenschaften $\sigma = 0 \text{ S/m}$ und $\epsilon = \epsilon_0$ zwischen Sonde und umgebendem Material verfälscht die Messung nur unwesentlich, obwohl sich die Kluft im hochsensitiven Bereich der Messung befindet. Eine solche Kluft könnte sich z.B. beim Einrammen der Sonde in heterogenes Material bilden und soll im Sinn einer schlechten Ankopplung verstanden werden. Unsere Simulationsergebnisse haben gezeigt, dass bei Klüften der Breite $k < 2 \text{ mm}$ der Fehler bei der Bestimmung von σ^a und ϵ_r^a bei unter 2% liegt (Abb. 7(b)).

Ausblick

Perspektivisch möchten wir Simulationen für beliebige dreidimensionale Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit σ und der dielektrischen Permittivität ϵ , sowie Machbarkeitsstudien im Hinblick auf eine zwar eingeschränkte, aber dennoch mögliche Dateninversion durchführen. Diese könnte durch die gezielte Positionierung von einer sehr kleinen Anzahl von Elektroden (z.B. am Landefahrzeug) möglich werden. Eine grobe räumli-

che Rekonstruktion der elektrischen Parameter würde zusätzliche Informationen über die Heterogenität des Oberflächenmaterials terrestrischer Planeten liefern und Fragen im Zusammenhang der planetaren Entwicklungsgeschichte beantworten helfen.

Literatur

- Benderitter, Y., Jolivet, A., Mounir, A., und Tabbagh, A. (1994). Application of the electrostatic quadripole to sounding in the hectometric depth range. *Journal of Applied Geophysics*, 31, 1-6.
- Hamelin, M., Trautner, R., und Grard, R. (2003). Detection of near-surface ice on mars with electromagnetic techniques on board future surface vehicles. *Journal of Geophysical Research*, 108, 8045–8055.
- Jin, J. (1993). *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley and Sons, Inc.
- Ksanfomaliti, L. V. (2001). Physical properties of the hermean surface (a review). *Solar Systems Research*, 35, 339-353.
- Telford, W. (1990). *Applied geophysics*. Cambridge University Press.
- Trautner, R., und Grard, R. (2002). Measuring the electric properties of planetary environments with mutual impedance (MI) probes. *Earth-like planets and moons. Proceedings of the 36th ESLAB Symposium*, 10, 105-107.

Geophysikalische Erkundung des Kohlefeuergebietes von Wuda, China, mit Magnetik und Elektromagnetik

Autoren:

G. Schaumann, G. Reitmayr, H. Schmidt, B. Siemon, B. Röttger†, H.-J. Rehli, Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR), Hannover

Einleitung

Im Rahmen des BMBF-geförderten Projektes „Innovative Technologies for Exploration, Extinction and Monitoring of Coal Fires in North China“ haben AGRS (China Aero Geophysical Survey and Remote Sensing Centre for Land and Resources) und BGR eine Hubschrauberbefliegung mit elektromagnetischen und magnetischen Messungen über dem von Kohlefeuern betroffenen Gebiet bei Wuda (ca. 110 km²) in der Inneren Mongolei am südlichen Rand der Wüste Gobi im Jahr 2004 durchgeführt. In ausgewählten Teilen des betroffenen Gebietes wurden ein Jahr später Messungen insbesondere mit der Transientelektromagnetik (TEM) und Magnetik am Boden ergänzt. Das Ziel der geophysikalischen Untersuchungen war, die Kohlebrände aufgrund ihrer physikalischen Parameter zu detektieren und zu kartieren. Kohlebrände stellen ein weltweites Problem dar und verbrauchen mehr als 20 Mio. Tonnen dieser Ressource jährlich allein in Nordchina. Weit mehr als 100 Mio. Tonnen werden außerdem durch die Brände im direkten Umfeld für den Bergbau unbrauchbar gemacht (Voigt et al., 2004).

Aufgrund der Erkenntnis, dass die Erhitzung von Kohle über 200°C bis zu 800°C sowie die Verkokungsprozesse eine Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit bewirken (Duba, 1977; King, 1987), wurden die brennenden Bereiche auf Änderungen in der Leitfähigkeit sowie auf magnetische Anomalien untersucht. Dazu wurden die Ergebnisse der Hubschrauberbefliegung mit denen der Bodengeophysik und den Lokationen der Kohlebrände in Beziehung gesetzt. Eine satellitenunterstützte Kartierung der Brandzonen von DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt) ergänzt die thermische Erkennung dieser Bereiche im Vergleich zu nicht durch Kohlefeuer betroffenen Gebieten. Weitere Arbeiten werden unter kohlepetrographischen, gaschemischen und thermischen Aspekten von Projektpartnern durchgeführt.

Durchführung und Ergebnisse

Im Messgebiet (siehe Abb. 1) wurden 65 TEM-Sondierungen über 12 Profilen durchgeführt, davon werden Ergebnisse einiger Profile, die die Feuerzonen überqueren, vorgestellt. Das Gebiet ist überwiegend von Sandstein bedeckt, darunter befinden sich bis zu 18 abbauwürdige Kohleflöze unterschiedlicher Tiefenlage.

Die Untersuchung der lokalen Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit im Bereich der Feuerzonen zeigt insbesondere für die TEM Strukturen hoher Leitfähigkeit, die bei den meisten Messstationen mit den Brandzonen korrelieren. Dabei wird in eindimensionalen Modellen für jede Station ohne a-priori-Informationen für die

Startmodelle eine gut leitende Schicht aus Inversionsmodellrechnungen ermittelt, die mit einfallenden Kohleflözen gut übereinstimmt. Dargestellt wird dies an der Feuerzone mit der Nummer 8, eine von über 20 Brandzonen im betroffenen Gebiet.

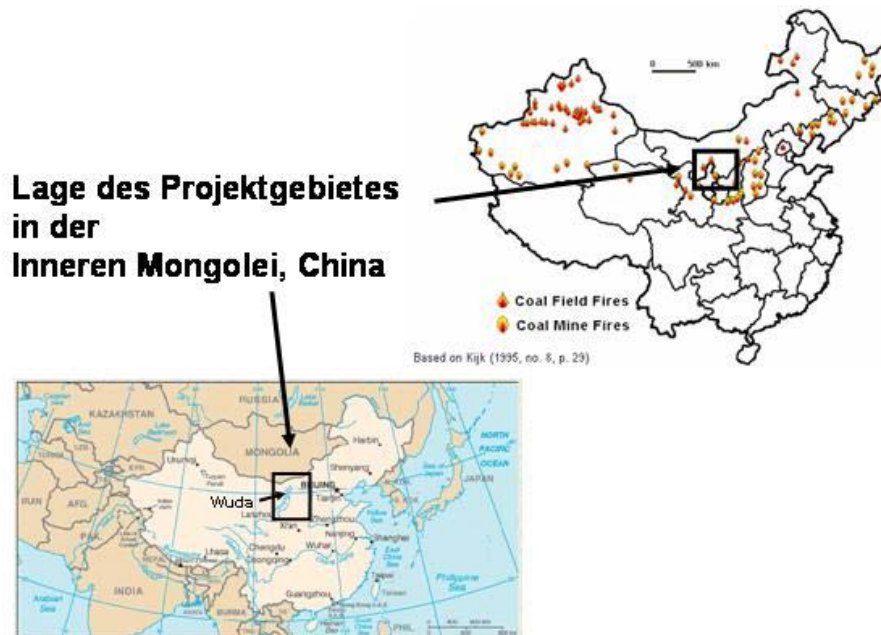


Abb. 1: Lage des Kohlefeuergebietes von Wuda, Innere Mongolei, China

Abbildung 2 zeigt eine flächenhafte Darstellung des scheinbaren spezifischen Widerstandes aus der Hubschrauberbefliegung (Siemon, 2001) für die Frequenz 4650 Hz für das Gebiet um die Feuerzone 8, die Schwerpunktstiefe schwankt je nach Leitfähigkeit zwischen ca. 20 bis 35m. Für den Bereich der TEM-Profile 6 und 7 liegt die Schwerpunktstiefe bei ca. 20 bis 26m. Die schwarzen Kreise kennzeichnen Gebiete, in denen Kohleförderanlagen ursächlich für Anomalien sind. Das schwarze Oval im linken Bildrand kennzeichnet einen Bereich, dessen hohe Leitfähigkeit nicht erklärt werden kann. Ursächlich könnten hier erhöhte Mineralkonzentrationen in den Sedimenten sein. Die Bereiche erhöhter Leitfähigkeit aus den Hubschraubermessungen korrelieren im östlichen Teil des Profils 3, im mittleren Teil des Profils 5 und im Verlauf des Profils 6 mit den Stellen, an denen die am Boden durchgeführten TEM-Messungen einen guten Leiter in der Tiefe der Kohleflöze ermittelten.

Die Stationen mit Schichten hoher Leitfähigkeit sind bei Profil 3 die Stationen 47, 45 und 44, bei Profil 6 die Stationen 1, 4, 2, 3 bis 6 und bei Profil 5 die Stationen 62 bis 58 (Abb. 3, 4 und 6). Bei der Vertikalsektion von TEM-Profil 3 (Abb. 3) fällt insbesondere die Station 47 auf. Sie weist einen guten Leiter in geringer Tiefe auf und korreliert sowohl mit einem akut brennenden Bereich als auch mit einer deutlichen Anomalie in den bodenmagnetischen Messungen (Abb. 7). Die Stationen 46 bis 44 haben einen sehr oberflächennahen guten Leiter, wobei Station 44 in einen von den Hubschraubermessungen erfassten Bereich guter Leitfähigkeit fällt (Abb. 3, vgl. Abb. 2).

Die Vertikalsektion des spezifischen Widerstands aus den TEM-Messungen für Profil 6 zeigt eine gut leitende Schicht, die von Süd nach Nord einfällt, beginnend bei einer Tiefe von ca. 25m (Abb. 4). Dieses Profil beginnt mit Station 1 kurz hinter der brennenden Abbruchkante der Feuerzone 8, weiter südlich war das Gelände aufgrund großer Spalten nicht begehbar. Das darunter liegende Kohleflöz wurde an dieser Stelle in einer Tiefe von ca. 20m erbohrt. Im Verlauf nach Norden, also mit Abstand vom brennenden Bereich nimmt die Tiefe dieses guten Leiters zu und die Leitfähigkeit nimmt ab (von ca. 10 Ohm*m zu ca. 23 Ohm*m). Die gasgeochemischen Untersuchungen von BGR deuten auf ein Fortschreiten des Brandes in nord-östlicher Richtung hin. Dies korreliert mit dem erwähnten Verlauf der gut leitenden Schicht des Profils 6 und setzt sich im 50m östlich benachbarten parallelen TEM-Profil 7 (Abb. 5) fort.

Die Vertikalsektion des spezifischen Widerstands aus den TEM-Messungen entlang Profil 5 (Abb. 6) ergibt ebenfalls eine Korrelation mit der Brandzone. Hier korreliert der von West nach Ost einfallende gute Leiter an den Stationen 60 bis 58 mit der Stelle, an der das betroffene Kohleflöz abtaucht. Die brennenden Bereiche werden ebenfalls an dieser Stelle kartiert. In diesem Bereich weist der spezifische Widerstand aus der Hubschrauberbefliegung erniedrigte Werte auf (Abb. 2).

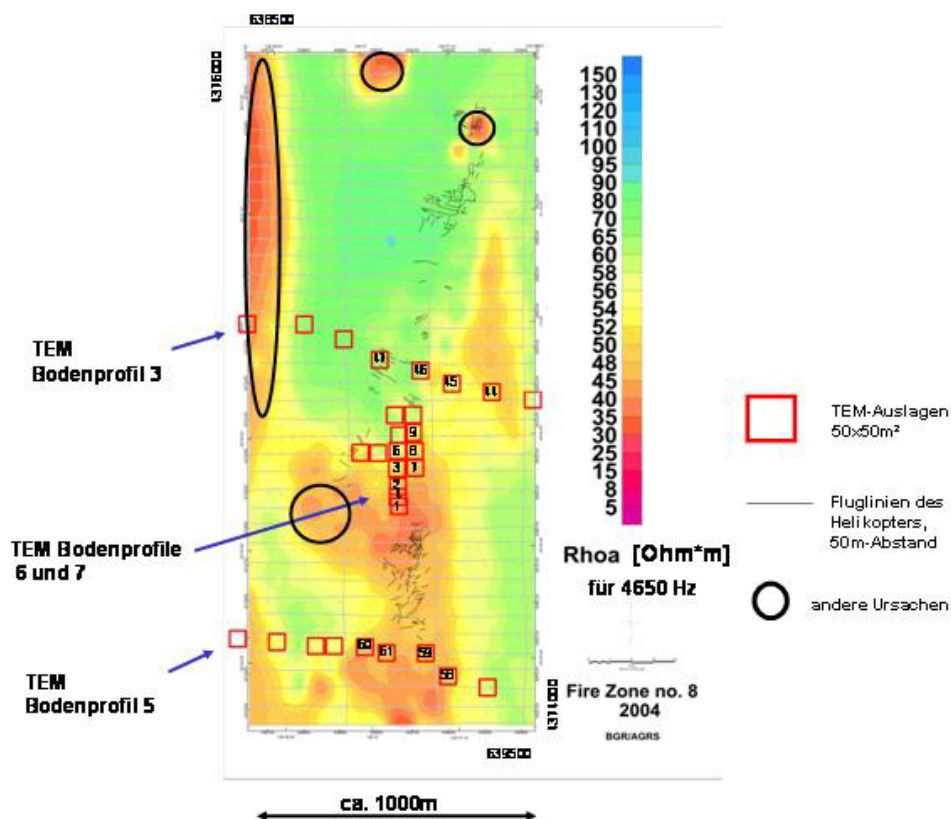


Abb. 2: Flächenhafte Darstellung des scheinbaren spezifischen Widerstandes $R_{\rho a}$ [Ohm*m] aus den Hubschraubermessungen für die Frequenz 4650 Hz (BGR-Software). Die Bodenstationen der TEM überqueren im selben Gebiet die aktive Brandzone Nr. 8.

1-dimensional resistivity model from TEM data

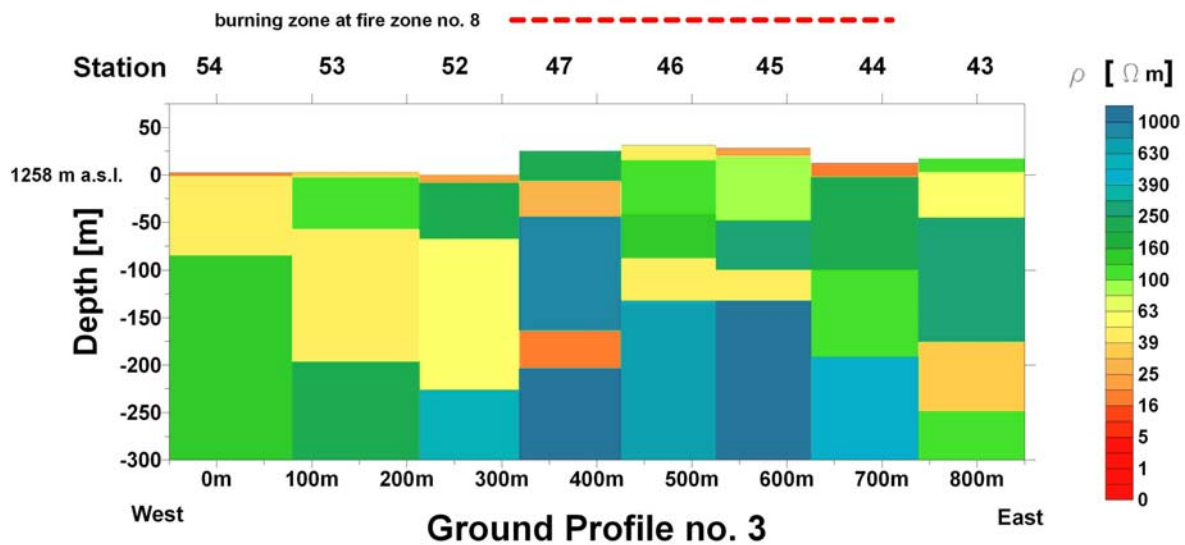


Abb. 3: Vertikalsektion des spezifischen Widerstands aus den TEM-Messungen entlang Profil 3. Der brennende Bereich der Feuerzone ist mit einer gestrichelten roten Linie markiert.

1-dimensional resistivity model from TEM data

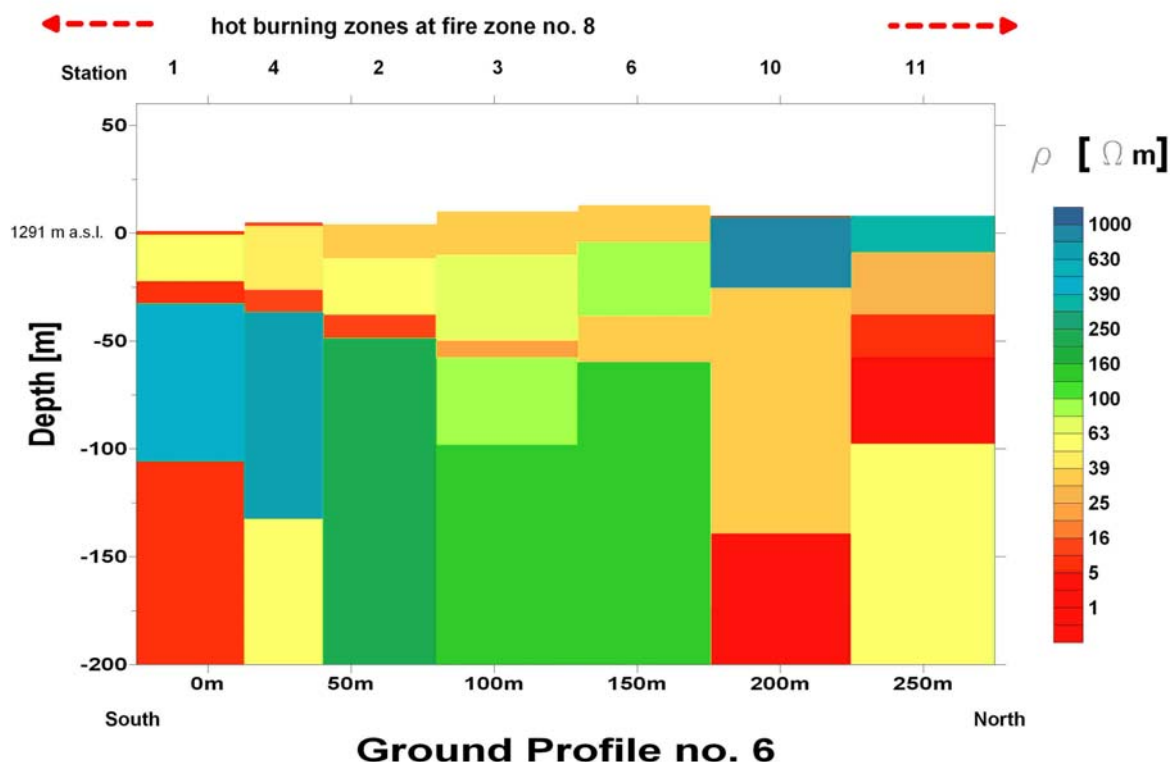


Abb. 4: Vertikalsektion des spezifischen Widerstands aus den TEM-Messungen entlang Profil 6. Der brennende Bereich der Feuerzone ist mit einer gestrichelten roten Linie markiert. Die gut leitende Schicht fällt von Süd nach Nord ein, beginnend bei einer Tiefe von ca. 25m kurz hinter der brennenden Abbruchkante.

1-dimensional resistivity model from TEM data

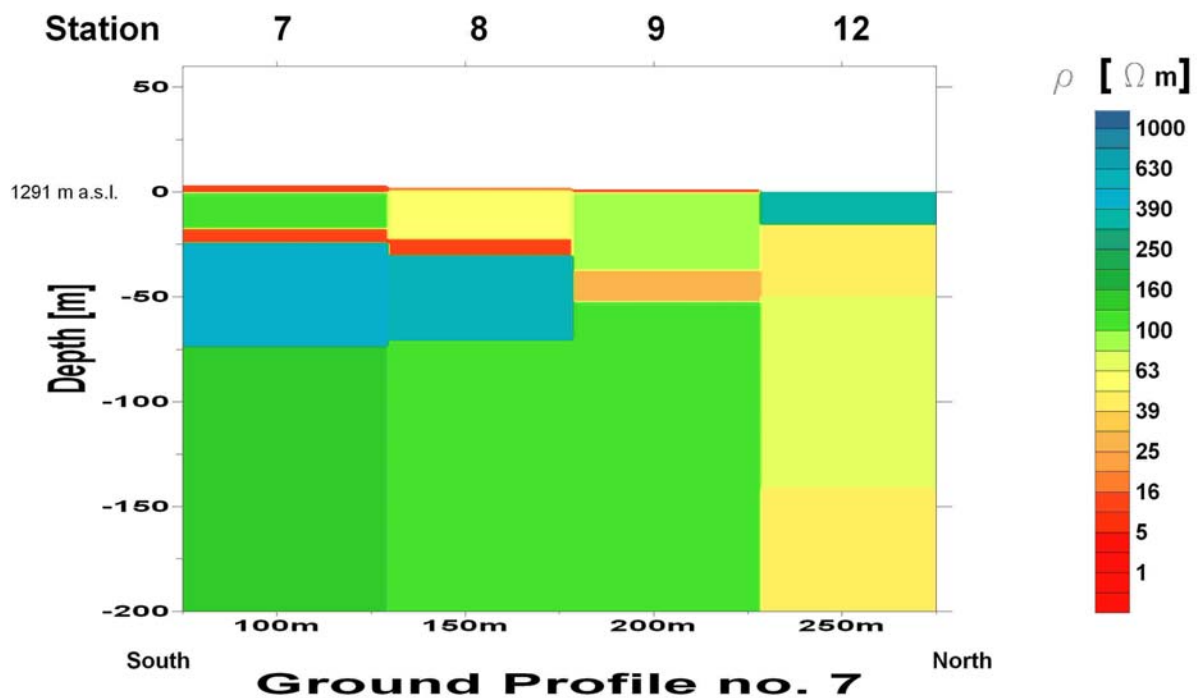


Abb. 5: Vertikalsektion des spezifischen Widerstands aus den TEM-Messungen entlang Profil 7.

1-dimensional resistivity model from TEM data

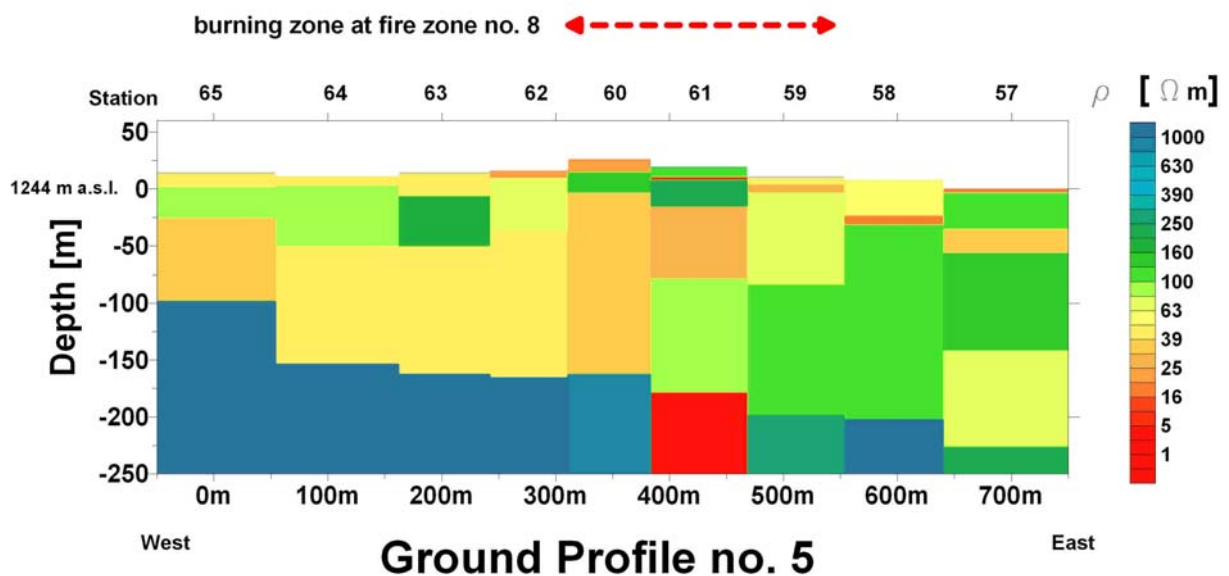


Abb. 6: Vertikalsektion des spezifischen Widerstands aus den TEM-Messungen entlang Profil 5. Der brennende Bereich der Feuerzone ist mit einer gestrichelten roten Linie markiert. Mit der Brandzone korreliert der von West nach Ost einfallende gute Leiter an den Stationen 60 bis 58.

Boden-Magnetikmessungen auf Feuerzone 8

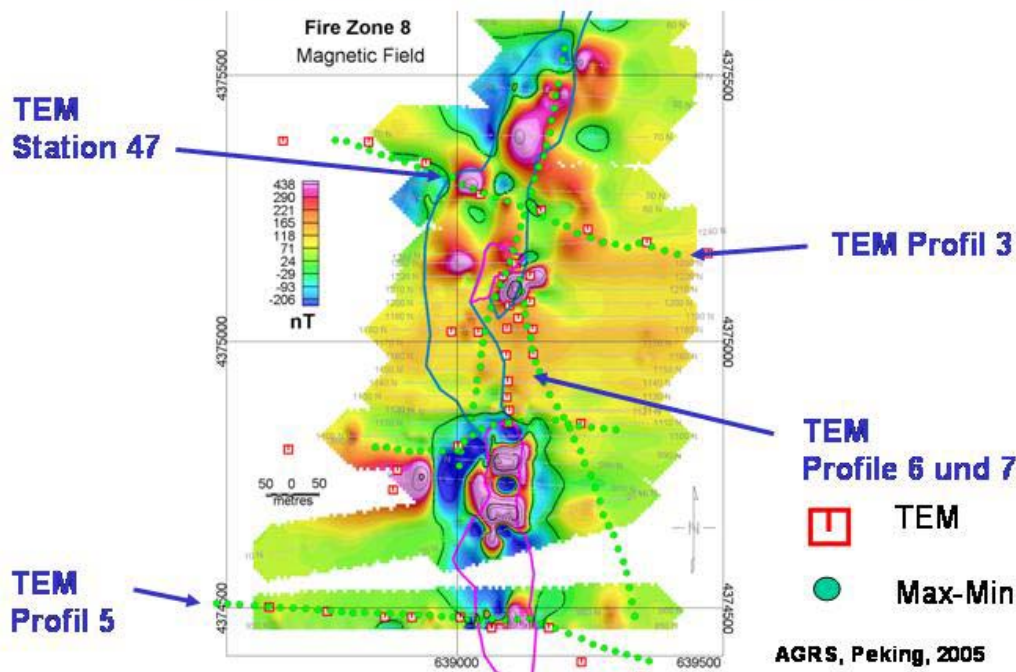


Abb. 7: Anomalien des Magnetfeldes aus Bodenmessungen, AGRS, 2005

Die im Linienabstand von 10m durchgeführten Magnetfeldmessungen am Boden weisen im Bereich von ausgebrannten und brennenden Bereichen stark erhöhte Amplitudenwerte auf und zeigen eine klare Korrelation mit den Brandzonen (Abb. 7). Für die aerogeophysikalischen Messungen erweist sich aufgrund der Abnahme der Amplitude des Magnetfeldes mit der Flughöhe (durchschnittlich 50-60m) eine weniger stark ausgeprägte Korrelation der Magnetfeldanomalien mit den brennenden Bereichen als bei den magnetischen Bodenmessungen (Abb. 8). Die Magnetfeldwerte der Anomalien aus den Bodenmessungen sind um ca. einen Faktor 50 höher als die der Hubschraubermagnetik. Begründet liegt dies in der Abschwächung des Magnetfeldes in Abhängigkeit des Abstandes zur Quelle.

Für die Beurteilung der über den Brandzonen gemessenen Daten wurden Vergleichsmessungen in nicht von Bränden betroffenen Bereichen innerhalb und außerhalb des Gebietes von Wuda durchgeführt und auf Merkmale in der Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit untersucht. Dabei wurden bei Messungen über intakten Flözen keine Schichten hoher Leitfähigkeit in der Tiefe des Kohleflözes ermittelt.

Hubschrauberomagnetik

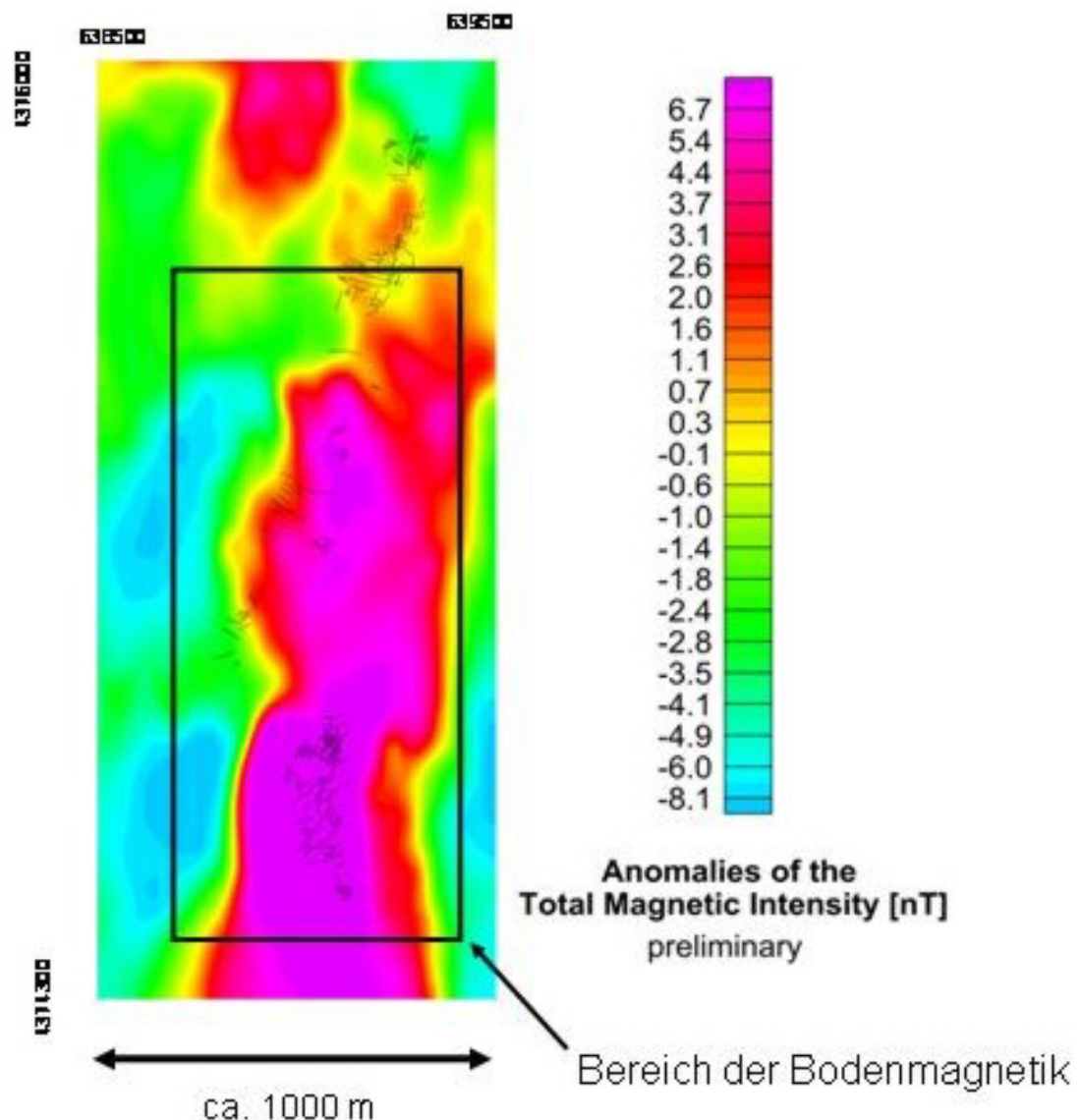


Abb. 8: Anomalien des Magnetfeldes aus Hubschraubermessungen

Neben der Ergänzung der aerogeophysikalischen Erkundung zu größeren Tiefen mit Hilfe der TEM können hier die Unterschiede in der Verteilung des spezifischen Widerstandes in den von Kohlebränden betroffenen und den nicht betroffenen Bereichen durch die Bodenmessungen verdeutlicht werden. Beide Methoden zeigen die Bereiche auf, die durch erhöhte Messpunktdichte für eine Lokalisierung von Brandzonen und deren Fortschreiten genauer untersucht werden sollten. Ein Monitoring der elektrischen Leitfähigkeit und der Magnetfeldanomalien kann hier weitere Hinweise zur Ausbreitung der Brandzonen bringen.

Literatur

Duba, A., 1977, Electrical conductivity of coal and coal char, *Fuel* 56: 441-443.

Duba, A., 1983, Electrical conductivity of Colorado oil shale to 900° C, *Fuel* 62: 966-972.

Hooper, R. L., 1987, Factors affecting the magnetic susceptibility of baked rocks above a burned coal seam, *International Journal of Coal geology*, 9, 157-169, Elsevier.

Jödicke, H., 1991, Zonen hoher elektrischer Krustenleitfähigkeit im Rhenoharzynikum und seinem nördlichen Vorland, *Hochschulschriften Band 24*, Münster.

King, A., 1987, Cindered Coal Detection Using Transient Electromagnetic Methods, *Geoexploration Vol. 24*, 4/5, 367-379.

Ruhrkohlen-Handbuch, 1969, Verlag Glückauf, Essen.

Siemon, B., 2001, Improved and new resistivity-depth profiles for helicopter electromagnetic data, *Journal of Applied Geophysics*, 46, 65-76.

Sternberg, R., Lippincott, C., 2004, Magnetic surveys over clinkers and coal seam fires in Western North Dakota, Department of Earth and Environment, Lancaster.

Voigt, S., Tetzlaff, A., Zhang, J., Kuenzer, C., Zhukow, B., Strunz, G., Oertel, D., Roth, A., Van Dijk, P. & H. Mehl, 2004, Integrating Satellite Remote Sensing Techniques for Detection and Analysis of Uncontrolled Coal Seam Fires in North China, *International Journal of Coal Geology*, No. 59, pp. 121-136.

Gleichstromgeoelektrische Untersuchungen eines mit aeroelektromagnetischen Messungen kartierten Süßwasservorkommens im Sahlenburger Watt unter Berücksichtigung von Äquivalenzfällen.

Helmut Rodemann(1), Eva Brost(3), Jörn Schünemann(1), Ursula Noell(2), Bernhard Siemon(2), Franz Binot(1), Achim Sauer (3)

1. GGA-Institut, Stilleweg 2, D-30655 Hannover, 2. Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe, Stilleweg 2, D-30655 Hannover, 3. ehemals GGA-Institut

Schlagworte: Geoelektrik, Hubschrauber-Elektromagnetik, Süßwasserlinse, Cuxhaven, Sahlenburger Watt

Zusammenfassung

Im Sahlenburger Watt an der Nordseeküste westlich von Cuxhaven wurde im Rahmen einer aerogeophysikalischen Erkundung mit dem Hubschrauber-Messsystem der BGR eine Süßwasserlinse kartiert. Ergänzend wurden zwei Geoelektrik-Profile im Watt und entlang der Küste vermessen. Die Auswertung fand unter Berücksichtigung von Äquivalenzfällen für geschichtete Halbraummodelle statt und Mess- und Parameterfehler wurden diskutiert. Es zeigte sich eine recht gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Hubschrauber-Elektromagnetik und mehrdimensionale Modellrechnungen ergaben keine prinzipiellen Unterschiede zu den eindimensionalen Inversionsmodellen.

Summary

In the Sahlenburg mud-flat at the North Sea coast to the west of the city of Cuxhaven a freshwater lens was mapped using BGR's helicopter-borne geophysical system. In addition, two geoelectric profiles were measured within the tidal flats and along the shore. The data evaluation with respect to layered half-space models laid emphasis on the discussion of both equivalent models and data and parameter errors. The inversion models showed a fairly good agreement with those obtained from helicopter-borne electromagnetic data. Multi-dimensional modelling revealed no principal differences to the one-dimensional inversion results.

Einführung

Als Süßwasserlinsen werden hier örtlich abgegrenzte Süßwasservorkommen in einem Salzwasseraquifer bezeichnet. Süßwasserlinsen treten normalerweise unter Inseln auf, wo die lokale Grundwasserneubildung das Meerwasser verdrängt. WORZYK (1995) untersuchte beispielsweise ein Süßwasservorkommen unter der Insel Borkum mit geoelektrischen Tiefensondierungen. TRONICKE

et al. (1999) und SENGPIEL & MEISER (1981) kartierten eine Süßwasserlinse unterhalb von Spiekeroog mit geoelektrischen und Radarverfahren bzw. mit der Hubschrauber-Elektromagnetik. Das Watt ist eine Fläche im Küstenbereich des Gezeitenmeeres, die bei Hochwasser überflutet und bei Niedrigwasser ganz oder teilweise vom Wasser freiläuft. Es kann durch ein viel verzweigtes Rinnensystem (Priele) durchzogen sein (MURAWSKI, 1983). Die Süßwasserlinse im Bereich des Sahlenburger Watts westlich von Cuxhaven, die auch strandnahe, von KURTZ (2004) ausführlich beschriebene Grundwasseraustritte im Wattenmeer aufweist, ist Gegenstand geophysikalischer Untersuchungen.

Im Rahmen einer aerogeophysikalischen Erkundung der Küstenaquifere zwischen Weser- und Elbemündung im Jahre 2000 mit dem Hubschrauber-Messsystem der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR) wurde die Verbreitung dieser Süßwasserlinse kartiert (SIEMON & BINOT, 2003). Das GGA-Institut führte zwei Jahre später geoelektrische Sondierungen mit dem Schlumberger-Verfahren durch (BROST et al., 2003). Die geoelektrischen Messungen sollten dazu dienen, einen Vergleich mit den Hubschraubermessungen zu ermöglichen.

Profilbeschreibung

Die geoelektrischen Tiefensondierungen erfolgten entlang von zwei Profilen (Abb. 1). Das erste Profil verlief im Watt westlich von Sahlenburg in nordwestlicher Richtung und hatte eine Länge von 2 km. Die Auslagerichtung der 14 Schlumberger-Messungen betrug 58 Grad (also senkrecht zur Profilrichtung) und die Auslagenlänge (AB/2) zumeist 200 m. Das zweite Profil entlang eines Küstenweges verlief ungefähr in NS-Richtung und war 1,5 km lang. Die Auslagerichtung variierte zwischen 8 und 35 Grad, also etwa parallel zur Profilrichtung. An den sieben Messpunkten des Profils wurden AB/2 Längen zwischen maximal 400 und 600 m ausgelegt. In naher Umgebung der Profile befinden sich verschiedene Bohrungen.

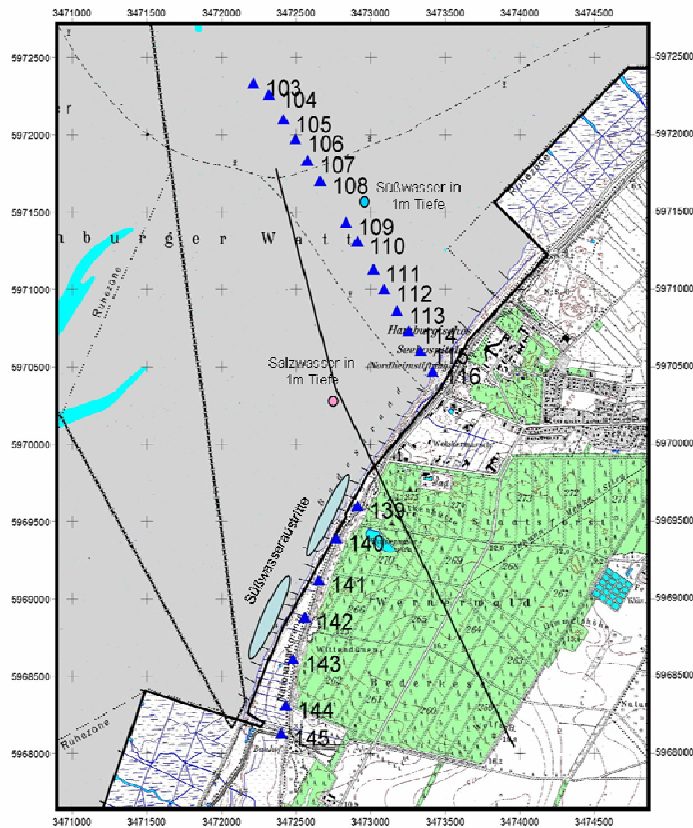
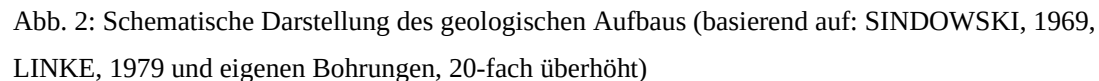


Abb. 1: Lage der Profile und Nummerierung der Geoelektrik-Messpunkte. Blauer Kreis: Süßwasser in 1m Tiefe; roter Kreis: Salzwasser in 1 m Tiefe. Die hellblauen Linsen vor dem Ufer kennzeichnen Süßwasseraustritte. Die östliche schwarze Linie gibt den ungefähren Verlauf des in Abb. 2 dargestellten Profils wieder. Profil 1: Messpunkte 103 – 116, Profil 2: Messpunkte 139 – 145. Die beiden anderen schwarzen Linien markieren Hamburgisches Territorium. Bei dem dargestellten Gebiet grenzt der Altenwalder Geestrücken direkt an das Watt. Östlich vom Punkt 116 befindet sich der Ort Sahlenburg.

Fig. 1: Position of the profiles and numbering of the geoelectric sites. Blue circle: fresh water in 1m depth; red circle: salt water in 1 m depth. The light blue lenses at the shore symbolize fresh water outflows. The eastern black line represents the approximate course of the profile shown in fig. 2. Profile 1: points 103 – 116, profile 2: points 139 – 145. The two other black lines mark Hamburg territory. In the displayed area the Altenwalder Geestrücken is in immediate contact with the mud-flat. East of the point 116 the village Sahlenburg is located.

Geologische Situation

Das auf der Geest durch Versickerung des Niederschlages gebildete Grundwasser bewegt sich von der Geest Richtung Watt. Das neu gebildete Grundwasser schiebt sich dem hydraulischen Gradienten folgend unter der Kleischicht Richtung NW und tritt nur teilweise als Geestrandquelle zutage. Nach ca. 1 km endet die Kleischicht, und das Grundwasser vermischt sich mit dem Meerwasser. Am Rand der Kleischicht steigt das Süßwasser auf. Es konnte mit einer 1m tiefen Bohrung gewonnen werden (blauer Punkt in Abb. 1).



SCHNEIDER (1988) gibt folgende Wertebereiche für den spezifischen Widerstand für die verschiedenen hydrogeologischen Einheiten der Insel Baltrum an:

Salzwassersand: 3-10 Ωm

Der spezifische Widerstand von Salzwasser mit 3,5% Salzgehalt (Nordsee) beträgt bei 20°C 0.2 Ωm (WESTERN-ATLAS, 1985). Diese Werte zeigen, dass geoelektrische Verfahren gut geeignet sind, die Aquifersalinität zu erkunden.

Hubschrauber-Messungen

Das von der BGR beflogene Messgebiet „Cuxhaven“ hat eine Ausdehnung von ungefähr 22 km x 24 km und ist um ca. 18° von N gegen E gedreht (SIEMON, 2005). Die Hubschrauber-elektromagnetischen (HEM) Messungen mit fünf verschiedenen Frequenzen (384 Hz, 1830 Hz, 8610 Hz, 41300 Hz, 192600 Hz) liefern Informationen über die Verteilung des spezifischen elektrischen Widerstandes in unterschiedlichen Tiefen. Die Ergebnisse können als Widerstandskarten oder Vertikalschnitte präsentiert werden. Die Karte der Abb. 3 zeigt den scheinbaren spezifischen Widerstand bei einer Messfrequenz von 1830 Hz (SIEMON et al., 2001). Im Bereich des Sahlenburger Watts ist landeinwärts eine Erhöhung der spezifischen Widerstände zu erkennen, die durch ein Süßwasservorkommen zu deuten ist. Die Ausdehnung von etwa 5 km Länge und 1,5 km Breite stimmt gut mit der bei LINKE (1979) angegebenen Kleischicht überein. Die Mächtigkeit der Süßwasserlinse kann auf Basis der HEM-Ergebnisse auf 30 – 40 m abgeschätzt werden.

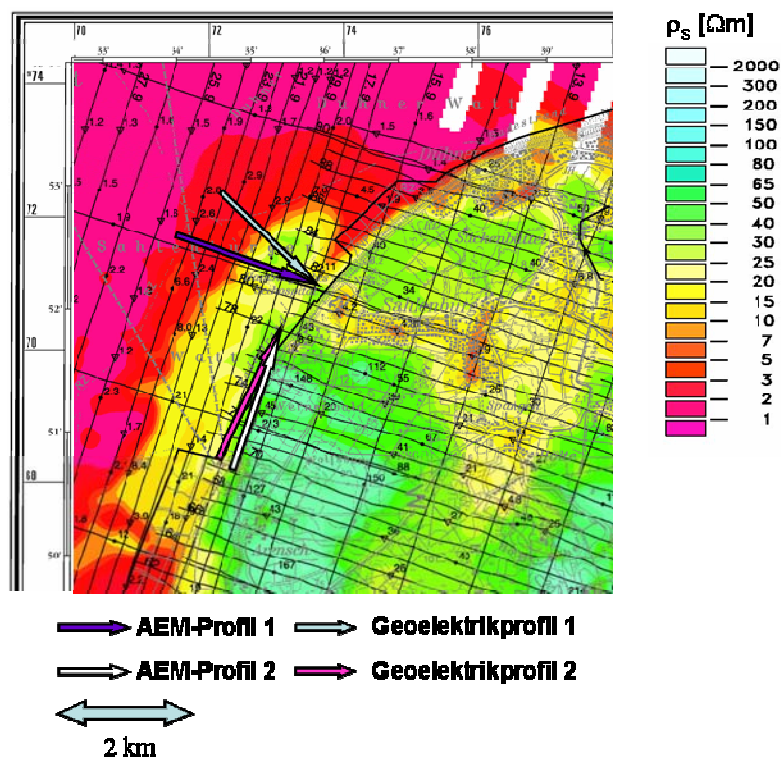


Abb. 3: Flächenhafte Verteilung der scheinbaren spezifischen Widerstände ρ_s , abgeleitet aus HEM-Messungen, im NW des Messgebiets „Cuxhaven“ (SIEMON et al., 2001). Der violette und der weiße Pfeil zeigen die Lage der HEM-Profilabschnitte (Abb. 6a & 7a), die beiden anderen Pfeile geben die Lage der Geoelektrikprofile im Watt (blau, Abb. 6b,c) und am Ufer (rot, Abb. 7b,c) wieder. Am linken und oberen Rand sind Rechts- und Hochwerte sowie Länge und Breite in Minuten angegeben.

Fig. 3: Distribution of the ρ_s values (ρ_s =apparent resistivity) in the NW of the survey area “Cuxhaven” derived from helicopter-borne measurements (SIEMON et al., 2001). The purple and the white arrows show the location of the HEM profiles (Fig. 6a & 7a). The blue and the red ones show the location of the geoelectric profiles (Fig. 6b,c & 7b,c). Scales: Local coordinates and longitude and latitude in minutes.

Geoelektrik-Messungen

Die geoelektrischen Sondierungen wurden in Voll-Schlumberger-Auslage durchgeführt: Über zwei Elektroden (A und B) wird ein Strom in den Boden eingespeist, und an den Sonden (M und N) in der Mitte der Auslage wird eine Potentialdifferenz gemessen. Aus der gemessenen Spannung, der Stärke des eingespeisten Stromes und unter Berücksichtigung eines für die Aufstellung charakteristischen Geometriefaktors, wird der scheinbare spezifische Widerstand des Untergrundes als Funktion der Auslagenlänge ($AB/2$) berechnet und als Sondierungskurve dargestellt (Abb. 4 & 5), s. TELFORD et al. (1998). Die Auswertung und Interpretation der Daten erfolgte sowohl mit Hilfe von Hilfskurven (im Folgenden als Handauswertungen bezeichnet) als auch mit dem im GGA-Institut als Weiterentwicklung des Marquardt-Inversionsprogramms INGESO (MUNDRY & DENNERT, 1981) konzipierten 1D-Inversionsprogramms GKF2 (RODEMANN & REITMAYR, 1996, 1998). Das Marquardt-Verfahren, das auch zur Inversion der HEM-Daten verwendet wird, ist eine Kombination der Methode des steilsten Abstiegs und der Newton-Methode (WEIDELT, 1989) und wird auch als gedämpfte Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet.

Bei einer Inversion wird in einem automatisierten Iterationsprozess eine Modellkurve so lange an die Kurve der Messwerte angepasst, bis eine bestimmte Fehlergrenze unterschritten ist. Das erforderliche Startmodell kann beim von uns benutzten Programm GKF2 wahlweise durch die Eingabe eines Schichtmodells mit den Parametern h (Mächtigkeiten) und ρ (spezifische elektrische Widerstände) oder automatisch durch das Programm (durch Ermittlung von Extrema und Wendepunkten, mit oder ohne Eingabe der Anzahl der Schichten) erstellt werden. Ausgewählte Parameter können festgehalten werden oder dürfen nur innerhalb eines bestimmten Bereichs variieren. Außerdem kann das Programm so eingestellt werden, dass die Abfolge der Mächtigkeiten ein Mindestmaß übersteigt (Mächtigkeit = Faktor $\times$ Hangendes; ist der Faktor zu klein, ergeben sich Dünnschichtfälle, bei denen die beiden Parameter Mächtigkeit und spezifischer Widerstand nicht mehr getrennt voneinander bestimmt werden können (MUNDRY, 1985)). Für die Größe „Faktor“, die für die Bezeichnung einer Schicht als „dünn“ zutrifft, gibt FLATHE den Wert Faktor ≤ 1 an. Jedoch ergeben sich auch schon für größere Werte stark anwachsende Parameterfehler.

Für das Abweichungsmaß können folgende Größen verwendet werden:

Logarithmische Least-Squares-Abweichung,

Lineare Least-Squares-Abweichung (L2-Norm, „soft bounds“)

Maximum-Norm-Abweichung (L_∞ -Norm, „hard bounds“).

Die Inversion wird durch Gewichtungsfaktoren für die Messwerte gesteuert, die z.B. abhängig vom reziproken Quadrat des Messfehlers sein können (INMAN, 1975). Die Wahl der Schichtzahl ist bei der Auswertung oft kritisch. Im Allgemeinen wird zwar die Anpassung mit größerer Schichtzahl besser, die Zahl der Schichten sollte aber möglichst gering sein, da sich mit Vergrößerung der Schichtzahl auch die Parameterfehler vergrößern.

Die Parameterfehler (oder Parameter-Vertrauensbereiche) sind sehr wichtig im Zusammenhang mit dem in der Geoelektrik oft kritischen Problem der „äquivalenten Modelle“ (MUNDRY, 1985).

Ausgangspunkt sind gemessene ρ_s -Messwerte mit ihren jeweils zugehörigen gemessenen oder geschätzten Messfehlern. Auf diese Weise wird ein Fehlerschlauch definiert. Am Ende einer erfolgreichen Inversion liegt ein Parametersatz der besten Approximation vor. Ihm entspricht eine theoretische ρ_s -Kurve, die vollständig im Fehlerschlauch verläuft. Man sucht nun Modelle mit entsprechenden ρ_s -Kurven, die ebenfalls vollständig im Fehlerschlauch verlaufen. Alle diese Modelle lösen die Inversionsaufgabe gleich gut; sie alle sind äquivalent.

Nachdem möglichst viele dieser Äquivalenzfälle gefunden wurden, kann man die Parameterfehler als die maximale relative Abweichungen der äquivalenten Parameter von der Bestapproximation berechnen. Hierzu sollten nicht nur einzelne Parameter betrachtet werden, sondern Kombinationen mehrerer Parameter. In der Praxis führen Raster-Variationen von Kombinationen je zweier Parameter schon zu relativ guten Ergebnissen (Parameter-Kombinations-Methode). Bessere Ergebnisse erhält man bei Benutzung der Wendepunkt-Extrema-Methode, die jedoch nicht auf alle Messkurven anwendbar ist (RODEMANN & MÜLLER, 2000). Die Parameterfehler haben eine ähnliche Bedeutung wie Messfehler bei einfachen Messungen. Sie sind ein Maß für die mögliche Schwankungsbreite des jeweiligen Parameters. Die Aussage: Der spezifische Widerstand beträgt $100 \Omega\text{m} \pm 10\%$ und ist dabei wesentlich detaillierter und belastbarer als die Aussage: $100 \Omega\text{m}$. Das Intervall des ρ_s -Werts mit einem ρ_s -Messfehler wird bei der Rechnung in die Parameter-Intervalle transformiert. Manchmal kann ein vergrößerter Anpassungsfehler in Kauf genommen werden, um die Parameterfehler entsprechend zu verkleinern.

Bei der Auswertung der Messdaten mit dem Programm GKF2 kann ein sog. Astausgleich durchgeführt werden. Mehrere Äste, d.h. Versätze in den Sondierungskurven, können entstehen, wenn der Sondenabstand aufgrund zu kleiner Messspannungen bei großen Auslagen vergrößert werden muss. Die Ursache hierfür kann beispielsweise an geometrischen Messfehlern oder an lokalen Widerstandsinhomogenitäten im Untergrund liegen. Bei einer Versetzung der Sonden kann es aufgrund von kleinräumigen lateralen Variationen des spezifischen Widerstands im Boden zu Messwertänderungen kommen. Um eine durchgehende Messkurve zu erhalten, wird normalerweise der vordere Teil der Sondierungskurve an den hinteren Teil angeglichen, da man annimmt, dass bei einem kleinen Sondenabstand die beiden Potential-Sonden eher auf einer lokalen

Widerstandsanomalie stehen und so einen Versatz des Widerstandsniveau verursachen, als bei größerer Aufstellungsweite (REPSOLD, 1991, WORZYK, pers. Mitt.).

Messfehler, Anpassungsfehler und Parameterfehler

Die verwendete Geoelektrik-Apparatur des GGA-Instituts erlaubt zusammen mit einem selbstentwickelten Messwert-Erfassungsprogramm die Erfassung der scheinbaren spezifischen Widerstände ρ_s zusammen mit statistischen Messfehlern. Bei kleinen Auslagen ($AB/2 < 1000$ m) liegen diese Messfehler zumeist im Bereich zwischen 0.1% und 1%. Erfahrungsgemäß zeigen die ρ_s -Kurven jedoch eine deutlich stärkere Streuung von ρ_s - von einem $AB/2$ Wert zum nächsten (Abb. 4 & 5). Mögliche Gründe sind Fehler in der nicht perfekten geometrischen Anordnung der Elektroden ($AB/2$, $MN/2$, A, B, M und N liegen nicht auf einer Linie), in kleinräumige Variationen des elektrischen Widerstands oder in unterschiedlichen elektrischen Ankopplungen von Sonden und Elektroden (RODEMANN & WORZYK, 1996). Zusätzlich spielen wahrscheinlich systematische Restfehler nach der Kalibrierung eine Rolle. All diese Effekte führen schließlich zu einem größeren Messfehler (typisch 3%, z.T. deutlich größer).

Die Kenntnis der Messfehler ist deshalb sehr wichtig, da man damit Fehler der berechneten Modellparameter abschätzen kann. Dafür wurden die Messdaten geglättet und mit dem Messfehler von 3% kombiniert.

Im Folgenden werden Anpassungs- und Parameterfehler für 2- und 3-Schicht-Modelle anhand von zwei Beispielen diskutiert. Die in den Tabellen 1 und 2 (unten) verwendeten Bezeichnungen bedeuten: q : verbleibende Abweichung von Mess- und Modellkurve (lineare Abweichungsquadrate), ep_1 bis ep_3 : Parameterfehler der Schichtwiderstände ρ_1 bis ρ_3 (Maximum-Norm), eh_1 und eh_2 : Parameterfehler der beiden Schichtmächtigkeiten h_1 und h_2 (alle Angaben in %).

Beispiel 1: Punkt 103 (Profil 1)

Die Geoelektrik-Messdaten am Punkt 103 des Profils 1 im Watt (siehe Abb. 1) sind mit 2- und 3-Schicht-Modellen invertiert worden. Abb. 4 zeigt die Daten und das Inversionsmodell für den 3-Schichtfall sowie die hieraus berechnete synthetische Sondierungskurve. Es handelt sich bei diesem Beispiel um einen so genannten Maximumfall, bei dem die 3. Schicht wegen der technisch bedingten Begrenzung der maximalen Auslage ($AB/2 = 200$ m) praktisch nicht erfasst wurde. Weiterhin ist das Verhältnis der Schichtmächtigkeiten h_2/h_1 kleiner als 2 und damit die 2. Schicht elektrisch dünn. Bei einer 2-Schicht-Auswertung ergibt sich eine maximale Abweichung $q=5\%$, die Parameterfehler sind relativ klein ($<10\%$, Tab. 1). Bei einer 3-Schicht-Auswertung ist der Anpassungsfehler mit $q=3\%$ zwar kleiner, für die Parameterfehler ergeben sich jedoch erheblich größere Werte, besonders für die dünne 2. Schicht, bei der sie 30% überschreiten können (Tab. 1).

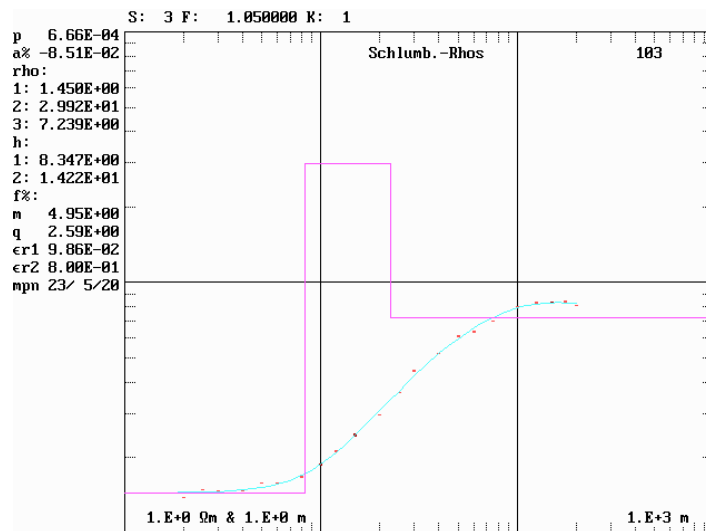


Abb. 4: Sondierungskurve (ρ_s -Kurve) mit Messdaten (rote Fehlerbalken) und Modelldaten (blaue Kurve) des 3-Schicht-Inversionsmodells (violette Linie) am Punkt 103 von Profil 1 (vgl. Abb. 1)

Fig. 4: Measured sounding curve (ρ_s -curve, red error bars) with model data (blue curve) derived from the 3-layer-inversion model (pink line) at site 103 of profile 1 (cf. Fig. 1)

Tabelle 1: Anpassungs- und Parameterfehler für 2- und 3-Schicht-Modelle am Punkt 103 von Profil 1

Fehler [%]	2-Schicht-Auswertung	3-Schicht-Auswertung
q	5	3
$\epsilon\rho_1$	3	3
$\epsilon\rho_2$	5	>30
$\epsilon\rho_3$	-	15
ϵh_1	8	7
ϵh_2	-	>30

Beispiel 2: Punkt 109 (Profil 1)

Bei diesem Beispiel besitzt die ρ_s -Kurve keine untere Asymptote. Damit sind ρ_1 und h_1 der Deckschicht ähnlich unbestimmt wie bei einem Dünnschichtfall und ρ_1 wurde deshalb auf den Wert $1,2 \Omega m$ festgehalten. Eine 2-Schicht-Auswertung führt hier auf den relativ großen Anpassungsfehler von $q=13\%$. Die Parameterfehler sind relativ groß, besonders bei der 1. Schicht (Tab. 2). Die 3-Schicht-Auswertung ergibt wieder einen verkleinerten Anpassungsfehler $q=7\%$. Die 3. Schicht ist wie beim Punkt 103 praktisch nicht erfasst. Auch hier resultieren relativ große Parameterfehler (Tab. 2).

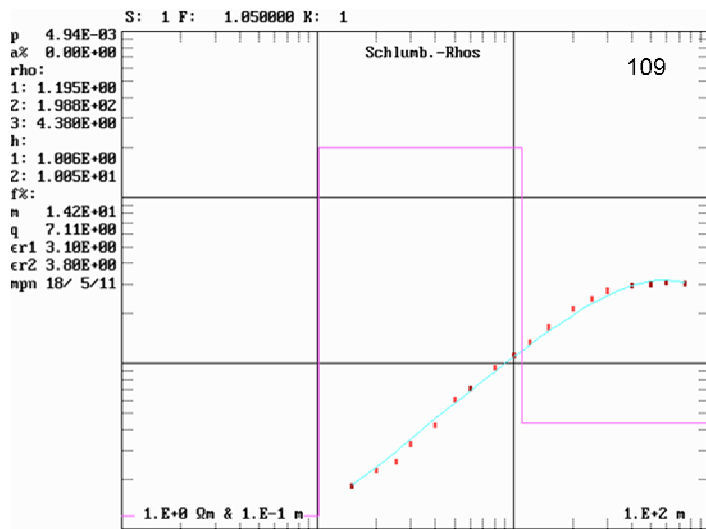


Abb. 5: Sondierungskurve (ρ_s -Kurve) mit Messdaten (rote Fehlerbalken) und Modelldaten (blaue Kurve) des durch Inversion gefundene Modells (violette Linie) am Punkt 109 von Profil 1 (vgl. Abb. 1)

Fig. 5: Measured sounding curve (ρ_s -curve, red error bars) with model data (blue curve) derived from the inversion model (pink line) at site 109 of profile 1 (cf. Fig. 1)

Tabelle 2: Anpassungs- und Parameterfehler für 2- und 3-Schicht-Modelle am Punkt 109 von Profil 1

Fehler [%]	2-Schicht-Auswertung	3-Schicht-Auswertung
q	13	7
$\epsilon\rho_1$	16	22
$\epsilon\rho_2$	7	>30
$\epsilon\rho_3$	-	>30
ϵh_1	18	23
ϵh_2	-	>30

Man erkennt an diesen Beispielen, dass die 2-Schicht-Modelle zu größeren Anpassungsfehlern führen, jedoch mit kleineren Parameterfehlern verbunden sind. Hier muss der Benutzer entscheiden, welche Genauigkeitsmaße wichtiger sind. Bei nicht signifikanter Verringerung des Anpassungsfehlers bei Erhöhung der Schichtzahl (z. B. kleiner als 25%) sollte man die kleinere Schichtzahl verwenden. Bei den 3-Schicht-Fällen laufen die Parameterfehler zum Teil aus dem Suchbereich des Rasters, wobei je 2 Parameter gleichzeitig variiert wurden. Bei beiden Profilen waren die Anpassungsfehler für die Handauswertung größer als die entsprechenden Werte für Inversionsrechnungen. Bei Profil 2 ergeben sich bezüglich der Anpassungsfehler und Parameterfehler ähnliche Resultate.

Vergleich von geoelektrischen und HEM-Ergebnissen

Profil 1

Bei dem Profil 1 durch das Watt (Abb. 6) fällt eine laterale Zerteilung bei den spezifischen Widerständen auf. Im nordwestlichen Bereich bis zum Punkt 108 ergibt sich bei der 3-Schicht-Auswertung der Geoelektrikdaten eine obere Schicht mit niedrigen spezifischen Widerständen (Wattsedimente mit Salzwassergehalt). Die 2. Schicht dürfte von Brackwasser beeinflusst sein, während die 3. Schicht Salzwater enthalten könnte. Der Bereich um die Profilpunkte 108 und 109 könnte eine Übergangszone zwischen Salzwater und Süßwater sein. Ab dem Punkt 109 landwärts finden wir bei der 1. Schicht sehr niedrige spezifische Widerstände (Salzwater) und erhöhte spezifische Widerstände in der 2. Schicht. Dies deutet auf die gesuchte Süßwaterlinse hin. Die variierenden spezifischen Widerstände der 3. Schicht könnten auf Sanden mit Ton- und Schlufflagen hindeuten. Nach oben durch die Klei- und Torfschicht begrenzt (nach SE hin), tritt das leichtere Süßwater erst nach dem Verschwinden dieser Schicht im Watt wieder hervor. Diese Schicht ist dünn und deshalb geoelektrisch nicht erkennbar. Die Kleischicht verhindert auch in umgekehrter Richtung das Eindringen des Salzwaters in den darunter liegenden Süßwaterbereich.

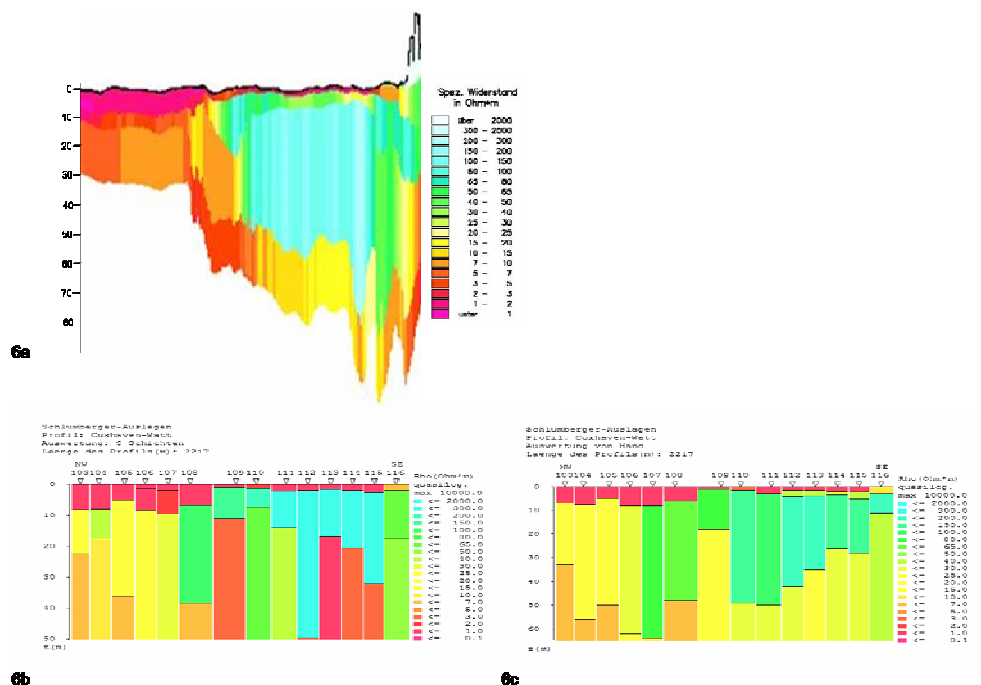


Abb. 6: Vergleich von HEM-Inversionen (a) mit Ergebnissen von Geoelektrik-Inversionen mit 3 Schichten (b) sowie den Resultaten der Handauswertung (c) für Profil 1 (Watt, vgl. Abb. 3).

Fig. 6: Comparison of HEM inversions (a) with results of geoelectric inversions with 3 layers (b), and results of curve fitting (c) along profile 1 (tidal flats, cf. Fig. 3)

Die fehlenden unteren Asymptoten bei den Messkurven der Punkte 109 und 110 deuten darauf hin, dass die Mächtigkeit der obersten Schicht sehr gering ist (die minimalen AB/2-Werte sind hier zu groß). Dies passt mit dem Befund zusammen, dass in diesem Bereich das Süßwasser bereits mit einer 1 m tiefen Bohrung gewonnen werden konnte (siehe blauen Bohrpunkt in Abb. 1). Bei den Modellen der Handauswertung ist die gut leitende (salzhaltige) Deckschicht dünner. Außerdem ergibt sich ein niedrigerer Widerstandswert für die 2., schlechter leitende Schicht, die Süßwasser repräsentiert. Bei einem Vergleich mit den HEM-Inversionsergebnissen (Abb. 6a) wird deutlich, dass beide Verfahren ein ähnliches Ergebnis liefern. Sowohl die Ausdehnung längs des Profils, als auch die Mächtigkeit der obersten Schicht stimmen in beiden Fällen relativ gut überein.

Profil 2

Bei allen 7 Punkten des Ufer-Profils (Profil 2, vgl. Abb. 3) weisen die ρ_s -Kurven im Prinzip auf einen Vierschichtfall hin, dessen oberste Schicht relativ hohe spezifische Widerstände besitzt, was auf trockene Geestsande deutet (Abb. 7). Es folgt eine Wechsellagerung mit der besser leitenden 2. Schicht (Sande mit Ton- und Schlufflagen) mit einer schlechter leitenden 3. Schicht (Süßwasser führende Geestsande) und einer wieder besser leitenden 4. Schicht (Salzwasserbereich). Eine Intrusion von Salzwasser in den Geestbereich könnte ebenfalls existieren (SIEMON, 2005). Die Widerstandsmodelle des Profils 2 weichen deutlich von denen des Profils 1 ab. Auf Profil 1 ist eine ausgeprägte laterale Widerstandsvariation erkennbar (2D/3D-Struktur), bei Profil 2 ist das nicht der Fall.

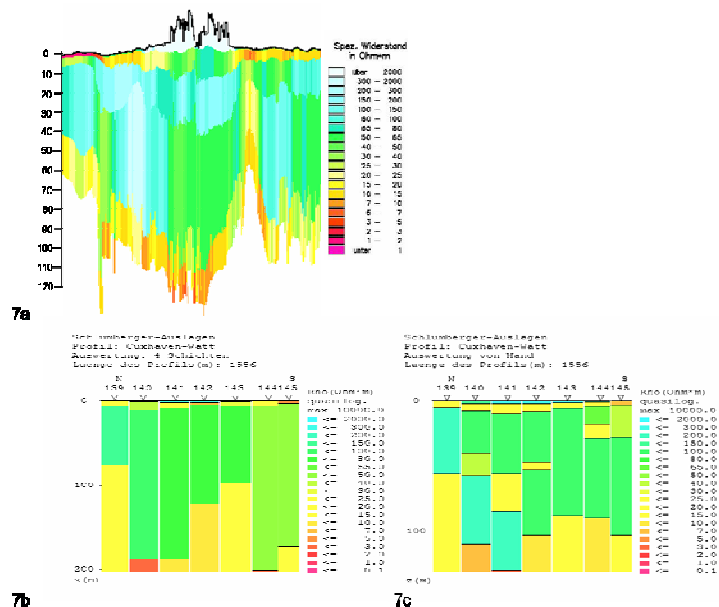


Abb. 7: Vergleich der HEM-Ergebnisse (a) für das Profil 2 (Ufer) mit den Geoelektrik-Inversionsergebnissen mit 4-Schichten (b). Bei den Handauswertungen (c) wurden bis zu 6 Schichten verwendet.

Fig. 7: Comparison of HEM inversion results (a) along profile 2 (shore) with geoelectric models with 4 layers. Up to 6 layers were used for curve fitting (c).

Die Grenze zur untersten Schicht ist bei beiden Geoelektrik-Auswertungen ähnlich. Die spezifischen Widerstände bei den Punkten 139 bis 141 sind bei der Handauswertung höher und entsprechen damit eher den Resultaten der HEM-Auswertung.

Quantitativer Vergleich von Geoelektrik- und HEM-Modellen

Für beide Profile ist die Übereinstimmung der geoelektrischen mit den HEM-Resultaten aufgrund des visuellen Vergleichs recht gut. Für einen quantitativen Vergleich wurde für das geoelektrische und das aeroelektromagnetische Watt-Profil der Schnittpunkt bestimmt. Es wurden zur Vereinfachung (angenäherte Rotationssymmetrie) Geoelektrik- und HEM-Daten (5-Schicht-Fälle) mit entsprechender Distanz vom Schnittpunkt betrachtet. Die nach lateraler Mittelung der HEM-Daten gewonnenen Mächtigkeiten und spezifischen Widerstände wurden mit den Modellparametern der Geoelektrik verglichen sowie in eine Vorwärtsrechnung eingespeist. Es ergaben sich z. T. deutliche Abweichungen, deren Ursachen noch geklärt werden sollen. So können u.a. Anisotropien des spezifischen Widerstands hierfür verantwortlich sein. Bei diesem Vergleich wurde die Handauswertung nicht in Betracht gezogen, weil, wie erwähnt, die dabei auftretenden Abweichungen zu den Messkurven relativ groß waren.

Mehrdimensionale Modellrechnungen

An der Geometrie der Anomalie, wie sie sich aus den HEM-Ergebnissen ergibt (Ellipsenform, s. Abb. 3), ist erkennbar, dass es sich um eine zwei- bzw. dreidimensionale Struktur handelt. Entsprechende Vorwärtsrechnungen mit vorhandener Software (RODEMANN et al., 2004) wurden für die Punkte 103 und 109 aus dem Profil 1 durchgeführt. Dabei wurde das 3D-Programm 8h2 (RODEMANN et al., 2004) mit automatischer Gitterkonstruktion und das Vorwärtsprogramm Dreid (Autor: SPITZER, Uni Freiberg) verwendet. Es ergab sich, dass die mehrdimensionalen Modellrechnungen zu keinen signifikant anderen Ergebnissen führten. Es ist aber anzunehmen, dass sich dies bei wesentlich größeren Auslagen ändern würde. Die Abweichungen von der Messkurve haben ihren Grund in den verwendeten 2-Schicht-Auswertungen. 3-Schicht-Auswertungen verbessern, soweit durchgeführt, die Übereinstimmung. Das Programm 8h2 eignet sich auch zu Inversionsrechnungen. Einen Überblick über weitere Inversionsalgorithmen gibt GÜNTHER (2004). Die folgende Abb. 8 zeigt einen Vergleich einer 1D-Inversion und einer 2D-Anpassung aufgrund von 1D-Inversionen, beides für einen 2-Schicht-Fall.

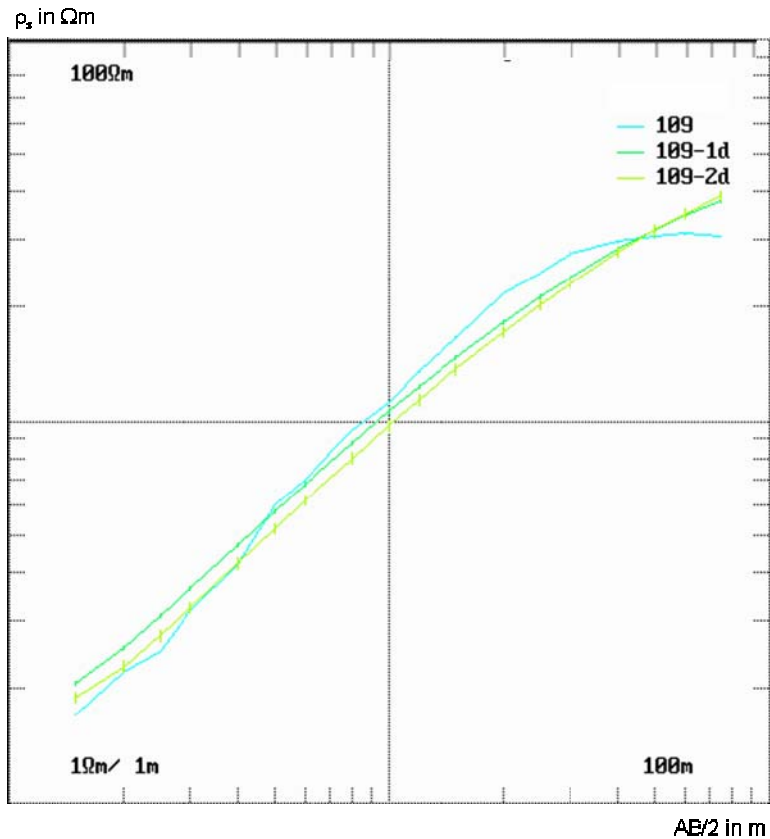


Abb. 8: Vergleich der gemessenen Sondierungskurve (blau) am Punkt 109 mit zwei 2-Schicht-Auswertungen. Die grüne Kurve (109-1d) ist das Resultat der 1D-Inversion mit festgehaltenem oberen spezifischen Widerstand. Die hellgrüne Kurve (109-2d) ist das Resultat einer 2D-Vorwärtsrechnung. Dabei wurde für jeden Punkt des 1. Profils eine 1D-Inversion (2-Schichtfälle) durchgeführt. Die resultierenden spezifischen Widerstände und Mächtigkeiten wurden gerundet. Die Widerstandsverteilung in Form eines 2D-Gitters wurde in das erwähnte Programm 8h2 eingegeben.

Fig. 8: Comparison of the measuring curve (blue) at point 109 with two 2-layer-calculations. The green curve (109-1d) is the result of the 1D-inversion with fixed upper resistivity. The light green curve (109-2d) resulted from a 2D-forward calculation. For each point of the first profile a 1D-inversion (2-layer cases) was performed. The resulting resistivity and thickness values were rounded. The resistivity distribution in the form of a 2D-mesh was input into the mentioned program 8h2.

Die Widerstandsverteilung aus den 1D-Inversionen wurde für das Startmodell der 2D-Rechnung des 1. Profils verwendet. Im Vergleich zu den Messkurven ergibt sich für die 1D-Inversion eine maximale Abweichung von 24% und ein Wert für die kleinsten Abweichungsquadrate (lsq) von 13%. Die 2D-Auswertung mit der Kombination der 1D-Inversionen ergibt andererseits eine maximale Abweichung

von 21% und eine lsq-Abweichung von 14%. Man erkennt, dass die Ergebnisse nicht stark voneinander abweichen. Die 1D-Inversion scheint damit schon ein recht gutes Ergebnis zu liefern. 3D-Rechnungen ergab keine deutlichen Unterschiede.

Ausblick

Die Untersuchungen einer Süßwasserlinse im Watt mit Hubschrauber-Elektromagnetik und Gleichstrom-Geoelektrik haben gezeigt, dass die Resultate der beiden geophysikalischen Methoden recht gut übereinstimmen und sich damit gegenseitig ergänzen und stützen. Die Resultate stimmen auch mit den beschriebenen hydrogeologischen Ansichten überein. Die Frage der Anisotropie des spezifischen Widerstandes konnte durch die einfache Gegenüberstellung der Daten allerdings nicht ausreichend beantwortet werden, vgl. den Abschnitt „Quantitativer Vergleich von Geoelektrik- und HEM-Modellen“. Hierzu ist eine gleichzeitige Inversion (joint inversion) nötig, die mindestens für die Geoelektrik eine entsprechende Vorwärtsrechnung erforderlich macht. Hierzu existieren bereits Arbeiten (z.B. WEIDELT, 1999, YIN & WEIDELT, 1999). Es wird angestrebt, eine solche gleichzeitige Inversion durchzuführen, auch weil im GGA-Institut eine solche „joint inversion“ von Seismik- und Geoelektrik-Daten geplant ist. Bei der BGR sind Arbeiten zu einer gemeinsamen Inversion von TEM (Transient-Elektromagnetik) und HEM geplant.

Für eine weitere detaillierte Auswertung der Geoelektrik-Messungen auf dem Sahlenburger Watt besteht nach unserer Meinung z. Zt. keine Notwendigkeit, weil aus den HEM-Daten bereits hinreichend gute Informationen über die laterale und vertikale Ausdehnung der Versalzungen und der Süßwasserlinsen gewonnen werden konnten. Sinnvoll wäre es jedoch, mit Hilfe von Geoelektrik-Langauslagen die Unterkante der Süßwasserlinse sicherer zu bestimmen.

Danksagung

Die Autoren danken Herrn Hans-Joachim Rehli (BGR) für seine kompetente und tatkräftige Unterstützung bei der Durchführung der Messungen. Dem Naturschutzbeauftragten des Niedersächsischen Wattenmeeres danken wir für die Genehmigung zum Vermessen der Wattprofile. Der Kurverwaltung Cuxhaven und der Forstverwaltung Midlum danken wir für die technische Unterstützung.

Literatur

- BROST, E., BINOT, F., NOELL, U., SAUER, J., SUCKOW, A. & SIEMON, B. (2003): Eine Süßwasserlinse im Wattenmeer. Abstract, Tagungsband zur 63. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, 23.-28.2.2003, Jena.
- GÜNTHER, T. (2004): Inversion methods and resolution analysis for the 2D/3D reconstruction of resistivity structures from DC measurements, Dissertation, TU Freiberg.
- INMAN, J. R. (1975): Resistivity inversion with ridge regression, *Geophysics*, 40, p. 798f.

- KURTZ, S. (2004): Grundwasseraustrittsstellen im Sahlenburger Watt: Methoden zur Beprobung von Fluiden und Bilanzierung des Grundwasserausstroms. Diplomarbeit, Universität Bremen, FB Geowissenschaften, Bremen.
- LINKE, G. (1979): Ergebnisse geologischer Untersuchungen im Küstenbereich südlich Cuxhaven – Ein Betrag zur Diskussion holozäner Fragen, Probleme der Küstenforschung im südlichen Nordseegebiet, Band 13, Hrsg: Niedersächsisches Landesinstitut für Marschen- und Wurtenforschung, Wilhelmshaven.
- MUNDRY, E. (1985): Gleichstromverfahren, in: BENDER, F. (Hrsg.) Angewandte Geowissenschaften, Enke Verlag, Stuttgart.
- MUNDRY, E. & DENNERT, U. (1981): INGESO 81, Bericht über ein Programm zur Inversion geoelektrischer Sondierungskurven für horizontal geschichteten Untergrund, NLfB-Bericht Nr. 92894, Hannover.
- MURAWSKI, H. (1983): Geologisches Wörterbuch, Enke Verlag, Stuttgart.
- REPSOLD, H. (1991): GEOKURZ, Geoelektrik in wenigen Worten, Eine kurze Anleitung für die Interpretation geoelektrischer Tiefensondierungen, Eigenverlag, Isernhagen-Kirchhorst.
- RODEMANN, H., BROST, E. & WORZYK, P. (2004): Gleichstromgeoelektrik über dem Baruther Maar, 11. Arbeitsseminar --Hochauflösende Geoelektrik-- 5.-7.10.2004, Tagungsband, Kloster Nimbschen bei Leipzig.
- RODEMANN, H. & MÜLLER, W. (2000): Ansätze zur Abschätzung von Geoelektrik Parameterfehlern (Maximum Norm), Protokoll für das Kolloquium Erdmagnetische Tiefenforschung, 20.-24.3.2000, Altenberg.
- RODEMANN, H. & REITMAYR, G. (1996): Zwei Auswertprogramme für DC-Geoelektrik, in: BAHR, K & JUNGE, A. (Hrsg.) Protokoll über das 16. Kolloquium --Elektromagnetische Tiefenforschung-- auf Burg Ludwigstein, 9.4.-12.4.1996. Göttingen / Frankfurt/Main.
- RODEMANN, H. & REITMAYR, G. (1998): Kurzbeschreibung für das Programm GKF2, Stand 5/98. Technischer Bericht, GGA-Institut/BGR, Hannover.
- RODEMANN, H. & WORZYK, P. (1996): Einige Fehler bei der Schlumberger-Geoelektrik, in: BAHR, K & JUNGE, A. (Hrsg.) Protokoll über das 16. Kolloquium --Elektromagnetische Tiefenforschung-- auf Burg Ludwigstein, 9.4.-12.4.1996. Göttingen / Frankfurt/Main.
- SCHNEIDER, H. (1988): Die Wassererschließung, Erkundung, Bewirtschaftung, und Erschließung von Grundwasservorkommen in Theorie und Praxis, 3. neubearbeitete Auflage, Vulkan-Verlag, Essen
- SENGPIEL, K.-P. & MEISER, P. (1981): Locating the fresh water / salt water interface on Spiekeroog Island by airborne EM resistivity/depth mapping. Geol. Jb., C29.
- SIEMON, B. (2005): Ergebnisse der Aeroelektromagnetik zur Grundwassererkundung im Raum Cuxhaven-Bremerhaven, Zeitschrift für angewandte Geologie, Hannover.
- SIEMON, B. & BINOT, F. (2003): Aerogeophysikalischen Erkundung von Salzwasserintrusionen und Küstenaquiferen im Gebiet Bremerhaven-Cuxhaven – Verifizierung der AEM-Ergebnisse. In: HÖRDT,

- A. & STOLL, J. (Hrsg.): Protokoll über das 19. Kolloquium „Elektromagnetische Tiefenforschung“, 1.-5.10.2001, Burg Ludwigstein, 319-328.
- SIEMON, B., VOß, W., RÖTTGER, B., REHLI, H.-J., PIELAWA, J. (2001): Forschungsvorhaben -- Detaillierte aerogeophysikalische Landesaufnahme-- (DAGLA), Messgebiet Cuxhaven, Technischer Bericht 121236, Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe, Hannover.
- SINDOWSKI, K.-H. (1969): Erläuterungen zu Blatt Altenwalde Nr. 2117, Geologische Karte von Niedersachsen 1:25000, Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung, Hannover.
- TELFORD, W.M., GELDART, L.P. & SHERIFF, R.E. (1998): Applied Geophysics, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- TRONICKE, J., BLINDOW, N., GROSS, R., LANGE, M. A. (1999): Joint application of surface electrical resistivity- and GPR-measurements for groundwater exploration on the island of Spiekeroog - northern Germany. *Journal of Hydrology*, 223, 44-53.
- WEIDELT, P. (1989): Interpretationstheorie geophysikalischer Daten, Vorlesungsskript, WS 88/89, Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig.
- WEIDELT, P. (1999): 3-D Conductivity models: implications of electrical anisotropy, in *Three-Dimensional Electromagnetics*, p. 119-137, ed. Oristaglio, M. & Spies, B., *Geophysical Developments*, 7, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- WESTERN-ATLAS (1985): Log interpretation chart. Houston (Atlas Wireline Services); p. 27
- WORZYK, P. (1995): Geoelektrische Tiefensondierungen auf der Insel Borkum. Untersuchungen zur Veränderung der Süßwasserlinse im Ostland, NfB-Bericht 111751.
- YIN, C. & WEIDELT, P. (1999): Geoelectrical fields in a layered Earth with arbitrary anisotropy, *Geophysics*, 64, 426-434.